Zur konstruktivistischen Begründung der physikalischen Geometrie

DIPLOMARBEIT

von

Ralf Herbig

aus Marburg

Osnabrück, im September 1998

Vorwort

Die vorliegende Arbeit ist aus einer längeren Beschäftigung mit den Grundlagen der Physik und speziell der Geometrie entstanden.

Neben dem Physikstudium hatte ich regelmäßig Seminare und Vorlesungen in Archäologie, Geschichte und in Philosophie besucht.
Im Sommersemester 1992 nahm ich in Marburg an dem von Herrn Prof. Janich geleiteten Proseminar „Die Dreidimensionalität des Raumes" teil. Darin lernte ich die Protophysik kennen. Herbst desselben Jahres hatte ich Gelegenheit, Hörer eines Gastvortrages zu sein, den Herr Prof. Janich vor Marburger Mathematikern hielt; derselbe Vortrag erschien 1992 unter dem Titel „Die technische Erzwingbarkeit der Euklidizität" abgedruckt in einem Sammelband zur methodischen Philosophie. Mit diesem Aufsatz setzt sich der erste Teil meiner Diplomarbeit auseinander.

Herr Prof. Schmidt akzeptierte die kritisch- mathematische Auseinandersetzung mit der Protogeometrie als Ausgangspunkt für eine Diplomarbeit, die ich hiermit vorlege. Ich danke Herrn Prof. Schmidt für die jederzeit gute Betreuung, die mir bei der Anfertigung dieser Arbeit sehr geholfen hat. Den Herren Prof. Kamlah und Prof. Diller bin ich für manch nützlichen Hinweis verpflichtet.

Herr Priv. Doz. Schrimpf und Herr Dipl. Phys. Reeh haben mir in Computerdingen mit Rat und Tat zur Seite gestanden.

Schließlich möchte ich Herrn Prof. Janich gegenüber meine Wertschätzung zum Ausdruck bringen. Ihm habe ich es wesentlich zu verdanken, daß sich mein Interesse an der Philosophie bis heute erhalten hat. Die Protophysik- Kritik, die ich in meiner Diplomarbeit vorbringe, dient allein einer sachlichen Klärung von Problemen, mit denen die heutige Protogeometrie zu kämpfen hat. Auf meine Affinität zur Protophysik hat sie keinen Einfluß.

Osnabrück, im September 1998 R. Herbig

Inhaltsverzeichnis

1 Notationen und Zusammenstellung benötigter Vorkenntnisse

1.1 Absolute Geometrie

Wir verstehen darunter diejenige geometrische Theorie, welche durch die Hilbertschen Axiome der Verknüpfung, Anordnung, Kongruenz und Stetigkeit, also die Axiome $I1-3$, II, III und V in Hilberts „Grundlagen der Geometrie"(9.Auflage, Stuttgart 1962) gegeben wird.

1.2 Nichteuklidische Geometrie

Unter den Begriff „nichteuklidische Geometrie" fassen wir die hyperbolische und die elliptische Geometrie zusammen. Beachte, daß der Begriff in der Mathematik häufig ausschließlich als Synonym für die hyperbolische Geometrie benutzt wird, weil in der hyperbolischen Geometrie alle Axiome Euklid- Hilberts mit Ausnahme des Euklidischen Parallelenaxioms gelten. Letzteres ist durch das Axiom ersetzt: „ Zu einer Geraden und einen nicht auf ihr gelegenen Punkt gibt es in der durch die Gerade und den Punkt bestimmten Ebene mehrere nichtschneidende Geraden durch diesen Punkt. In der elliptischen Geometrie haben zwei in einer Ebene liegende Geraden stets einen gemeinsamen Punkt.

2 Problemstellung

2.1 Der Ursprung der nichteuklidischen Geometrie

Die Geometrie hat ihren Ursprung in der räumlichen Erfahrung. „Geometrie“ bedeutet wörtlich „Erdmessung“. Den griechischen Mathematikern des fünften und vierten vorchristlichen Jahrhunderts kommt das Verdienst zu, die strengen geometrischen Beweise quasi aus dem Nichts hervorgebracht und dadurch die Geometrie zum Vorbild aller Wissenschaft gemacht zu haben. Noch für Kant besaßen alle Sätze der euklidischen Geometrie absolute Gültigkeit. Im vorigen Jahrhundert wich dieses Vertrauen in das Euklidische System infolge der Pionierarbeiten von C.F. Gauß, J. Bolyai und N.J. Lobatschewski der Einsicht, daß die aus der räumlichen Erfahrung abstrahierten Beriffe keineswegs denknotwendig sind.[1] Gewonnen wurde diese Einsicht anhand der Erkenntnis, daß sich das Euklidische Parallelenaxiom, dem zufolge es in einer Ebene zu einer Geraden durch einen nicht auf der Geraden gelegenen Punkt genau eine Nichtschneidende existieren soll, nicht aus den übrigen Axiomen Euklids beweisen läßt. Die „nichteuklidische Geometrie“ gesellte sich als gleichberechtigt neben die euklidische Schulgeometrie: Alle Axiome Euklids mit Ausnahme des Parallelenaxioms werden vorausgesetzt, und der Mathematiker untersucht die geometrischen Strukturen, die sich aus diesen Grundannahmen ergeben. Man unterscheidet dabei nach „elliptischer“ und nach „hyperbolischer“ Geometrie, je nachdem es keine oder mehrere Parallelen zu einer Geraden durch einen Punkt (innerhalb dieser ebenen Konfiguration) gibt. Außerdem betrachtet man die Sätze der sogenannten „absoluten“ Geometrie. Das ist der Inbegriff all derjenigen Sätze, die sich ohne eine spezielle Annahme über die Anzahl von Parallelen beweisen lassen.

2.2 Das Hilbertsche Axiomensystem für die euklidische Geometrie

Gegen Ende des vorigen Jahrhunderts gab Felix Klein das erste vollständige Modell einer nichteuklidischen Geometrie an. Seitdem genießt die nichteuklidische Geometrie uneingeschränktes Hausrecht in der Mathematik. Damit war der Weg frei gemacht für eine neue Einstellung der Geometrie gegenüber. Sie findet ihren endgültigen Ausdruck in David Hilberts “Grundlagen der Geometrie“ ([Hilbert, 1962]). Hilbert verzichtet auf eine Definition von Punkt, Gerade und Ebene. Er unterwirft diese Gegenstände nur bestimmten Eigenschaften, die jedenfalls mit ihrer anschaulichen Interpretation in Einklang stehen. Etwa: je zwei Punkte bestimmen eindeutig eine Gerade, mit der sie inzidieren, oder: für drei Punkte P, Q, R ist erklärt, ob Q zwischen P und R liegt, oder nicht; usw.

[1] Gauß in einem Brief an Olbers vom 28. April 1817: „Ich komme immer mehr zu der Überzeugung, daß die Notwendigkeit unserer Geometrie nicht bewiesen werden kann, wenigstens nicht vom menschlichen Verstande noch für den menschlichen Verstand.“ (zit. nach [Klingenberg, 1971], S. 9.)

Die Interpretation der Gegenstände der Geometrie als Objekte der sinnlichen Wahrnehmung ist bei Hilbert in den Hintergrund gerückt; was den Mathematiker an der Geometrie interessiert, sind einzig und allein die formalen Beziehungen zwischen ihren Begriffen.[2] Seit Hilbert überläßt es der Mathematiker der Physik, zu entscheiden, welche der drei Raumformen für die Geometrie der Wirklichkeit die richtige sei. Das Problem der Gültigkeit geometrischer Sätze wird seitdem in der mathematischen Geometrie nicht mehr diskutiert, sondern den Naturwissenschaften, allen voran der Physik, überlassen. Daß es von Seiten einiger weniger Mathematiker Versuche gegeben hat, eine „Geometrie der Wirklichkeit“[3] zu entwickeln, mag denn auch als Ausnahme von der Regel betrachtet werden.

2.3 Der protophysikalische Ansatz zur Geometriebegründung und die Grundthesen der Protophysik

1961 veröffentlichte der Philosoph Paul Lorenzen einen Aufsatz mit dem Titel „Das Begründungsproblem der Geometrie als Wissenschaft der räumlichen Ordnung“ ([Lorenzen, 1961]). Lorenzen nimmt in dieser Arbeit das Programm der operativen Geometriebegründung Hugo Dinglers wieder auf und erklärt im Anschluß an Dingler beispielsweise die Ebene als eine Fläche, bei der alle Punkte (und alle Seiten) ununterscheidbar sind. Oder: „Für die Orthogonalität einer Geraden g zu einer Ebene E mit dem Fußpunkt P lautet das Homogenitätsprinzip, daß alle Geraden von E durch P ununterscheidbar sein sollen hinsichtlich g.“ [4]

Wir wollen zunächst das Programm der sogenannten Protophysik skizzieren, da von „Homogenitätsprinzip“ die Rede war, einem spezifisch protophysikalischem Begriff.

Die Protophysik betrachtet sich als Teil einer konstruktiven Wissenschaftstheorie, die sich neben den Grundlagen der Physik (in der Protophysik) auch mit den Grundlagen der Mathematik und der Sozialwissenschaften befaßt und als Alternative zu den gängigen modernen Wissenschaftstheorien gesehen werden will.
Anstelle von „konstruktiver“ wollen wir bewertungsneutraler von „konstruktivistischer“ Wissenschaftstheorie sprechen; dadurch erklärt sich auch der Titel der vorliegenden Arbeit.

[2] Siehe etwa H. Poincaré, La science et l'hypothése: „Was die Wissenschaft erreichen kann, sind nicht die Dinge selbst, sondern es sind einzig die Beziehungen zwischen den Dingen; ausserhalb dieser Beziehungen gibt es keine erkennbare Wirklichkeit.“ (zit. nach [Poincaré, 1928], S. XVI)

[3] Zuallererst sei hier der dänische Geometer J. Hjelmslev genannt, der sich intensiv mit dem Problem beschäftigt hat. Siehe [Hjelmslev, 1916], [Hjelmslev, 1923], [Hjelmslev, 1929].

[4] [Lorenzen, 1961], S. 422.

Die Protophysiker betonen besonders, keine affirmative Grundhaltung zu den Naturwissenschaften einnehmen zu wollen.
Ungeachtet dessen versteht sich die Protophysik als eine Hilfsbemühung zur Physik, und zwar geht es nach P. Janich, einem ihrer prominentesten Vertreter, „in der Protophysik ... darum, auf die Frage zu antworten, wie eine messende Physik möglich wird.“[5] Janichs protophysikalischer Mitstreiter P. Lorenzen formulierte als Titel eines Aufsatzes zur Protophysik einmal die Frage: Wie ist die Objektivität der Physik möglich ? [6] Janich sagt auch: Die Protophysik habe „die Voraussetzungen reproduzierbarer Messungen vollständig bereitzustellen.“[7]

Als geistiger Vater der Protophysik darf wohl Hugo Dingler (1881- 1956) bezeichnet werden. Dinglers entscheidende Einsicht bestand darin, daß „die Gegenstände, über die die Physik spricht, ... nur in Ausnahmefällen ‘natürliche’ Gegenstände ... [sind]. In der Regel sind sie durch die Herstellungsbemühungen für Experimentalvorrichtungen erzeugt (...) daß Physik die Konstitution ihrer Gegenstände ‘Operationen’, nämlich herstellenden Handlungen verdankt, wurde von Hugo Dingler gesehen und in der Protophysik wieder aufgenommen.“[8]

Dingler und mit ihm die Protophysiker behaupten nun für die exakten Wissenschaften ein Begründungsproblem. Dieses läßt sich wie folgt beschreiben: Wissenschaftliche Erkenntnis unterscheide sich von bloßem Alltagswissen dadurch, daß ihre Sätze argumentativ begründbar sein müssen. Es stelle sich daher für die Wissenschaften die Frage nach Existenz und Herkunft unstrittiger Sätze: denn offenbar bedürfe es solcher unstrittiger Sätze, um in Frage stehende Sätze oder Behauptungen belegen zu können. Dies führe auf Begründungsketten. Man könne zwar zunächst versuchen, jeden Satz wiederum auf einen anderen zurückzuführen; man komme dann aber entweder in einen regressus in infinito, oder man setze (wie am Beispiel des Hilbertschen Axiomensystems für die euklidische Geometrie) in Form einer Axiomatik willkürlich gewisse Sätze unhinterfragt an den Anfang.

Die erste Alternative sei schon rein logisch abzulehnen, da es unendliche Begründungsketten nicht geben könne. „Auf jegliche Begründung der ersten Allsätze zu verzichten und sie ‘axiomatisch’ zu behaupten, ist [nach Dingler] gleichermaßen unannehmbar, da somit jeder Anspruch auf Sicherheit aufgegeben werden muß (...) Bleiben die Axiome unbewiesen, so ist auch jeder aus ihnen abgeleitete Satz unbewiesen, die Theorie ist lediglich ein ‘hypothetischer’

[5] [Janich, 1980], S. 49.
[6] In [Lorenzen, 1974].
[7] [Janich, 1980], S.53.
[8] Ebd., S. 51 f.

Formalismus.“[9]

Dingler glaubt, im Falle der Geometrie einen Weg aus dem Begründungsdilemma aufzeigen zu können: Die Grundbegriffe der Geometrie, also Punkt, Gerade, Ebene, Orthogonalität, Parallelität usw. seien „nicht bloß irgendwelche Grundbegriffe, sie sind vielmehr als räumliche Formen durch gewisse Homogenitäten charakterisierbar. Was hier Homogenität (Dingler spricht stattdessen von Symmetrie) bedeutet, sei ... am Grundbegriff der Ebene erörtert. (...) Eine Ebene ist eine Fläche, bei der alle Punkte (und beide Seiten) ununterscheidbar sind.“[10]

Was rechtfertigt nun diese Homogenitätsprinzipien?
Die Antwort Dinglers lautet mit den Worten Janichs:[11] „Unabhängig von jeder Erkenntnistheorie ... befindet sich ein Mensch auf einer naiven Stufe des Denkens, ... solange er nicht reflektiert. Dingler nennt diese Stufe ‘Lebensstandpunkt’ oder ‘Standpunkt des täglichen Lebens’. (...) Auf diesem befindet sich, wer keinerlei Allsätze für irgendwie gesichert ansieht ... und wer somit keine anderen Tatsachen kennt, als Einzeltatsachen.“ Jedenfalls verfügt ein Mensch auf diesem Standpunkt über praktisch- handwerkliche Fähigkeiten, „insbesondere auch jene, welche zum Aufbau einer exakten Wissenschaft ... ausgeführt werden müssen, also sprachliche Handlungen und manuelle Tätigkeiten (zur Herstellung von Meßgeräten).“

Als persönliche Schlußfolgerung füge ich an, daß Dingler behauptet haben mag, daß der Handwerker/ Meßgerätehersteller bei der Anfertigung räumlicher Grundformen immer schon auf die Erfüllung gewisser Homogenitätsforderungen (unter Anstrebung wachsender Genauigkeit) hinarbeite.

Dinglers Paradebeispiel eines auf Homogenität abzielenden Herstellungsverfahrens für Ebenen ist das sogenannte Dreiplattenschleifverfahren, welches „genau die Realisierung ... ‘Ebenendefinition’ darstellt“([Dingler, 1919], S. 38).

Lorenzen hat in den sechziger Jahren das Begründungsprogramm Dinglers wieder aufgegriffen und fortgeführt. Sein Hauptinteresse galt der Geometrie, da die systematisch früheste Messung die der Länge sei (alle anderen, z.B. der Zeit, der Masse usw. bedürften ihrer bereits).

Es ist nicht unwichtig, darauf hinzuweisen, daß Lorenzen die Geometrie bereits in logisch strenger, axiomatisierter Ausarbeitung gegeben sieht; ihm geht es dann um die Begründung der Axiome. Darin steht er Dingler nahe, unterscheidet sich aber von Janich, dem es weniger auf die Rekonstruktion eines

[9] Ebd., S. 56.
[10] [Lorenzen, 1961], S. 421 f.
[11] [Janich, 1980], S.55 f.

bereits vorhandenen Axiomensystems (das von Euklid- Hilbert) sondern mehr auf die vorwissenschaftlichen Realisierungsmöglichkeiten ankommt.[12]
Eine konstruktive bzw. operative Definition (etwa einer geometrischen Grundform), sagt Janich an anderer Stelle ([Janich, 1979], Anm. 4 auf S. 343), „bedeutet, daß die in der operativen Definition angegebenen Handlungen wirklich durchgeführt werden können, und zwar ohne Kenntnisse oder Geräte, die erst nach gelungener Durchführung dieser Handlungen methodisch zur Verfügung stehen."

Es bleibt noch zu klären, wie in der Protophysik der Sprung von den handwerklich- technisch erzeugten Grundformen zu den „idealen" Elementen der Geometrie vollzogen wird. Dies geschieht mithilfe des sogenannten „Ideationsverfahrens", welches darin besteht, die vom Handwerker bzw. Meßgeräteehersteller angestrebten Homogenitäten als „ideal" erreicht zu betrachten, sowie die sich daraus ergebenden logischen Implikationen weiter zu verfolgen.[13]
Nach der Ideation wird „nicht mehr von realen Körpern, Vorgängen usw. gesprochen ..., sondern von den intendierten Eigenschaften im Sinne von Herstellungszielen."[14]

An den Arbeiten zur Protophysik wurde von einer Reihe von Wissenschaftstheoretikern, Mathematikern und Physikern Kritik geübt. Sie ist übersichtlich greifbar in den beiden Büchern: G. Böhme (Hrsg.), Protophysik, Suhrkamp-Reihe „Theorie- Diskussion", Frankfurt 1976. Konstruktionen versus Positionen. Beiträge zur Diskussion um die Konstruktive Wissenschaftstheorie (Hrsg. von K. Lorenz), Bd I (Spezielle Wissenschaftstheorie). Berlin/ New York 1979.

Der mir am wichtigsten erscheinende Einwand gegen das protophysikalische Begründungsprogramm ist die Frage nach der Realisierbarkeit der verwendeten Homogenitätsprinzipien (Normen).[15]
Wenn vielleicht auch nicht Dingler oder Lorenzen, so muß zumindest Janich ein vitales Interesse an der Durchführbarkeit der von ihm formulierten Normen haben, gesteht er doch ein, daß „die Protophysik ihren Anspruch auf rationale Rekonstruktion bzw. Begründung der Physik nicht einlösen [könnte], wenn sie sich auf unbefolgbare Normen stützte."[16]
Diesem seinem Credo widersprechend erwidert Janich noch auf derselben Seite (S. 108) der „Protophysik der Zeit" auf den „empiristische(n) Einwand, daß die Protophysik schließlich die Befolgbarkeit ihrer Handlungsanweisungen und Normen voraussetze": „Hier liegt ein Mißverständnis zu Grunde, die Protophysik sei auf den *Satz* 'Die Handlungsanweisungen (bzw. Normen) der Protophysik

[12] Siehe [Janich, 1980], S. 79.
[13] Vgl. [Janich, 1980], S. 99.
[14] Ebd.
[15] Vgl. [Kamlah, 1979], insbesondere den Abschnitt 2. Normen und Aussagen.
[16] [Janich, 1980], S. 108.

sind erfüllbar' angewiesen. Dieser Satz ist jedoch für ein Befolgen der Handlungsanweisungen entbehrlich und kommt im Aufbau der protophysikalischen Teile Geometrie, Chronometrie und Hylometrie auch nicht vor, muß also auch nicht begründet werden."

Mir ist nicht klar, ob der offensichtliche Widerspruch in den beiden Janichschen Aussagen durch Heranziehen einer neueren Äußerung Janichs restlos aufgeklärt werden kann; ich meine seinen Aufsatz „Was heißt und woher wissen wir, daß unser Erfahrungsraum dreidimensional ist? ([Janich, 1996]) Darin heißt es:[17] „Die Intentionen des Laien waren durch den Philosophen nur sprachlich zu explizieren und betrafen eine vorfindliche, erfolgreiche Praxis des technischen Umgangs mit Weltdingen." Und weiter vorher:„Dabei kommt eine Form des Wissens in den Blick, die für die geläufigen Mehrheitspositionen philosophischer und wissenschaftlicher Theorien zum Raum bisher keine Rolle gespielt haben: das Wissen über unsere eigenen Handlungen."[18]

Lassen sich diese Äußerungen Janichs so interpretieren, daß Wissenschaft — also auch Physik und die Geometrie — undenkbar wären, wenn unsere vorwissenschaftliche Kenntnis von der Welt nicht dergestalt wäre, daß dieses Wissen jedenfalls die Durchführbarkeit des protophysikalischen Begründungsprogramms sicherstellt?
Diese und noch andere Fragen an die Protophysik erlaubt die Zielsetzung der vorliegenden Arbeit jedoch nicht weiterzudiskutieren. Wir geben zunächst eine inhaltliche Vorschau auf die weiteren Kapitel.

2.4 Problemstellung dieser Arbeit

In den Kapiteln 4- 7 geht es um die Frage, auf welche Weise die Protophysiker innerhalb der absoluten Geometrie die euklidische Geometrie auszeichnen wollen.

Kapitel 4 stellt die Doppelkeilkonstruktion vor. Janich behauptet, damit ein Herstellungsverfahren für parallele Ebenen angeben zu können. Die Eindeutigkeit dieses Realisierungsverfahrens sei dann durch die sogenannte „Keil- Kerbe- Invarianz" gesichert.

Im darauffolgenden Kapitel gehen wir dem Verdacht nach, daß die Operationen, welche Janich mit den Doppelkeilen durchführt, schon voraussetzen, was sie zeigen sollen, nämlich die Euklidizität. Ferner wird überprüft, ob die Keil- Kerbe- Invarianz, die nach Janich die ganze Last der Etablierung der Euklidizität zu tragen hat, in der nichteuklidischen Geometrie tatsächlich verletzt

[17] S. 75 (Hervorhebungen von mir).
[18] Ebd., S. 74.

ist. Dazu benutzen wir die Kleinschen Modelle der hyperbolischen und elliptischen Geometrie.
Anschließend geben wir eine Kritik des Janichschen Aufsatzes.

Das 7. Kapitel beginnt mit Lorenzens Formprinzip, einem anderen Versuch, die euklidische Geometrie protophysikalisch auszuzeichnen. Wir konstruieren die Dehnsche semieuklidische Ebene und zeigen damit ein wichtiges Problem auf, das nicht erst im Zusammenhang mit dem Formprinzip Lorenzens, sondern schon in Janichs Aufsatz entsteht.
Für die semieuklidische Geometrie spielen nichtarchimedisch angeordnete pythagoräische Körper eine entscheidende Rolle. Daher werden in Abschnitt 6.4 zwei wichtige solche Körper vorgestellt. Einer davon, der Hilbertsche Körper Ω, wird im achten Kapitel nochmal gebraucht, wenn es um die Frage geht, unter welchen Bedingungen aus der Existenz der Winkelhalbierenden die des Mittelpunktes gefolgert werden kann.

Zum Abschluß der Diplomarbeit werden wir uns davon überzeugen, daß in der Protogeometrie die wichtige Eigenschaft der freien Beweglichkeit gegeben ist. Es ist zu untersuchen, welche Voraussetzungen in dieses Resultat eingehen.

Die Zusammenfassung stellt die Hauptresultate der vorliegenden Arbeit auf einen Blick dar.

3 Die Janichsche Doppelkeilkonstruktion für parallele Ebenenpaare

Es ist eine Grundforderung der protophysikalischen Geometriebegründung, wie wir gesehen haben, einer geometrischen Grundform ein realisierbares Herstellungsverfahren an die Seite zu stellen.

Diese Forderung wurde nicht als Erstes von den Protophysikern erhoben, denn sie findet sich schon in Hjelmslevs Aufsatz „Die Geometrie der Wirklichkeit“ von 1916, [19] sowie in seiner Monographie „Die natürliche Geometrie“(1923). Dort fordert Hjelmslev:„Ebene, gerade Linie, rechter Winkel usw. müssen so eingerichtet werden, daß sie eine bestimmte Herstellungstechnik der Dinge festsetzen, die eine Kontrolle für das Bestehen der Grundeigenschaften enthält.“[20]

Bei Lorenzen fehlt nun in der Tat die Angabe eines Herstellungsverfahrens für parallele Ebenen; es ist also nur recht und billig, wenn ein Vertreter der Protophysik den Versuch unternimmt, diese Lücke in der operativen Theorie der euklidischen Geometrie zu schließen. Dies zu leisten ist das Ziel des Aufsatzes „Die technische Erzwingbarkeit der Euklidizität“ von P. Janich ([Janich, 1992]). Für jeden, der mit Euklids Axiomatik vertraut ist, ist Janichs Vorschlag, dem Problem beizukommen, sehr naheliegend: Es wird eine Doppelkeilkonstruktion angegeben, die - mathematisch gesprochen- eine indirekte Anwendung von Satz 16 aus Euklids erstem Buch seiner Elemente ist. Es seien hier die Sätze 16 und 17 zitiert:

Euklid I,16: In jedem Dreieck ist ein Außenwinkel größer als ein an einer anderen Ecke gelegener Innenwinkel.

EuklidI,17: In jedem Dreieck sind zwei Winkel, beliebig zusammengenommen, kleiner als zwei Rechte.

Aus I,16 folgt zunächst die Existenz einer Nichtschneidenden (siehe Abbildung 1): Man erhält sie, indem man P mit irgendeinem Punkt Q auf g verbindet und durch P die Gerade h zieht, die bezüglich dieser Verbindungsgeraden l mit g gleiche Wechselwinkel bildet:

Würden sich g und h (etwa) in R schneiden, so hätte man ein Dreieck, in dem der Außenwinkel α gleich einem der gegenüberliegenden Innenwinkel wäre, im Widerspruch zu I,16.

[19] Siehe [Hjelmslev, 1916]. In diesem Aufsatz heißt es etwa: „Was ist eine wirkliche Ebene? Diese Frage beantwortet man, indem man zusieht, wie man in der Praxis, in den Maschinenfabriken, die Ebenen herstellt.“(S.38) „Alle Ebenen, gerade Linien und rechte Winkel sind Nachbildungen von den genannten maschinentechnischen Idealformen.“(S.39) „Die formale Euklidische Geometrie wird also nur als eine bequem abgerundete Formulierung der Resultate der praktischen Geometrie hervortreten.“(S.40)

[20] [Hjelmslev, 1923], S. 3.

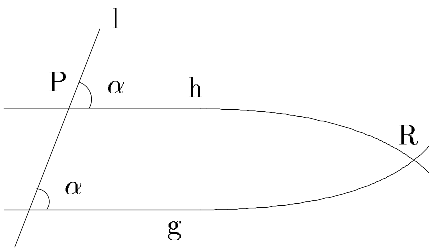


Abbildung 1: Existenz von Parallelen

Euklids **Postulat V** ist nun die Umkehrung des Satzes I,17:

> Wenn eine Gerade von zwei anderen Geraden so geschnitten wird, daß die auf einer Seite entstehenden Innenwinkel zusammen kleiner als zwei Rechte sind, dann treffen sich beiden Geraden auf derselben Seite, auf der diese beiden Winkel liegen.

Aus diesem Postulat folgt, daß es höchstens eine Parallele geben kann, und zwar so: Existierte eine zweite Parallele h' durch P zu g, so würde sie einen von α verschiedenen Schnittwinkel mit l bilden. Die Geraden g, h', l würden also die Voraussetzungen des Fünften Postulats erfüllen, die Geraden g und h' sich also schneiden.

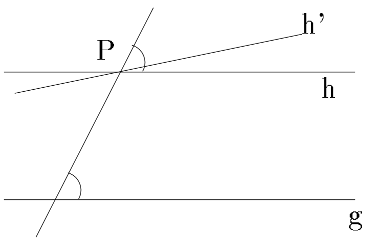


Abbildung 2: Das Euklidische Axiom

Wir werden im Folgenden das „Euklidische Axiom“ in der Formulierung aussprechen, in der es in Hilberts „Grundlagen der Geometrie“ zu finden ist, nämlich:

> „Es sei g eine beliebige Gerade und P ein Punkt außerhalb g: dann gibt es in der durch P und g bestimmten Ebene höchstens eine Gerade, die durch P läuft und g nicht schneidet.“

Man macht sich leicht klar, daß diese Aussage dem Euklidischen Parallelenaxiom äquivalent ist[21]. Natürlich kann Satz I,16 in der elliptischen Geometrie nicht gelten, denn in jener herrschen die projektiven Inzidenzaxiome,

[21] Wir haben nur noch zu zeigen: aus dem neuen Axiom folgt Euklids Postulat V. Wären

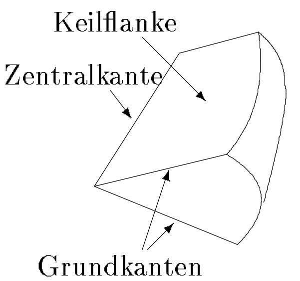
mithin haben je zwei Geraden stets einen Schnittpunkt[22]. Es sei schon an dieser Stelle darauf hingewiesen, daß wir unseren Betrachtungen im ersten Teil unserer Arbeit die elliptische Geometrie mit einbeziehen werden. Sie gehört zwar strenggenommen nicht zur absoluten Geometrie, weil in ihr die Anordnungsaxiome(bei Hilbert die Axiomengruppe II) schon nicht mehr erfüllt sind. Aber wir möchten der Vollständigkeit wegen auch in der elliptischen Geometrie nachprüfen, welche der Janichschen Konstruktionen ausführbar oder nicht ausführbar sind.

Ich möchte nun die Doppelkeilkonstruktion von Janich ausführlich darstellen.[23] Janich nimmt die absolute Geometrie als bereits operativ begründet an, indem er auf die Existenz von Herstellungsverfahren für Ebenheit und Orthogonalität verweist. Unter Zuhilfenahme der Termini „eben“ und „orthogonal“ definiert er dann spezielle Schnitte durch räumliche Körper:

1. „'Kerbschnitt': In einem beliebig geformten Körper werden zwei ebene Schnitte in beliebigem Winkel zueinander so geführt, daß sie sich treffen. Als Resultat ergibt sich ein Keil, der passend in einer Kerbe liegt.

2. 'Tortenschnitt': Aus einem beliebigen Körper wird durch einen ebenen Schnitt ein Teilkörper gewonnen, der ein ebenes Oberflächenstück aufweist. Zu diesem jeweils rechtwinklig werden zwei weitere ebene Schnitte geführt, die zueinander einen beliebigen Winkel bilden dürfen. Dadurch entstehen vier 'Tortenstücke', die zwei rechtwinklige 'Grundkanten' und eine 'Zentralkante' aufweisen.

3. 'Querschnitt': Ein beliebiger Keil wird durch seine Kante so geschnitten, daß die auf den Keilflanken neu entstehenden Kanten auf der Keilkante senkrecht stehen “(S. 73).



von den Geraden g, h', l die Voraussetzungen des 5. Postulates erfüllt, ohne daß g und h' einen Schnittpunkt hätten, so gäbe es jedenfalls nach I,16 noch die von h' verschiedene Parallele h durch P zu g. Gemäß des neuen Axioms existiert aber höchstens eine solche Parallele.

[22] I,16 benötigt zu einem strengen Beweis die bei Hilbert explizierten Anordnungsaxiome; diese sind jedoch in der projektiven Geometrie, wo es lediglich eine quaternäre Trennrelation gibt, nicht erfüllt. Euklid hat noch gar keine Anordnungsaxiome, benutzt sie aber stillschweigend beim Beweis vieler Sätze, so u.a. im Beweis von Satz I,16.

[23] Vgl. [Janich, 1992], S. 72 ff.

Dieses Vokabular versetzt Janich in die Lage, Winkelgleichheit zweier Tortenstücke wie folgt zu definieren: Zwei Tortenstücke heißen *winkelgleich*, wenn sie durch Querschnitt aus demselben Keil entstanden sind. Ferner heiße der zwischen zwei Querschnitten durch einen Keil liegende Teil des Keils „Keilstück". Nun kommt Janich zur zentralen Konstruktion seines Aufsatzes, dem sogenannten „*Doppelkeil*": Ein Doppelkeil entsteht per definitionem aus zwei Keilstücken aus demselben Keil dadurch, „daß sich (a) ihre Keilflanken berühren, und(b) je eine ihrer Grundkanten wenigstens stückweise berühren, und (c) ihre Zentralkanten in entgegengesetzte Richtung zeigen ('Wechsellage' der Keilstücke)"(S.74). Und schließlich:„Die freien Keilflanken des Doppelkeils heißen '*parallel*'."[24]

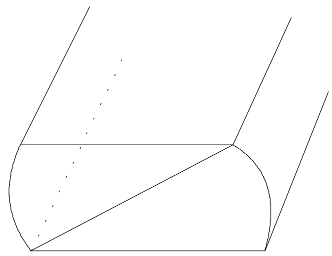


Abbildung 3: Der Doppelkeil

Anmerkung: Die beiden Keilflanken werden also von der Zentralkante und je einer der zwei Grundkanten aufgespannt.

Janichs Aufgabe besteht gemäß des protophysikalischen Programms nun darin, die *Eindeutigkeit des Realisierungsverfahrens* für parallele Ebenenpaare nachzuweisen. Genauer gesagt, es ist zu zeigen, „daß alle Doppelkeile zu Ebenenpaaren führen, die zueinander parallel sind. Im einfachsten Fall bedeutet dies, daß ein Doppelkeil, entsprechend zwischen zwei ebene Platten gelegt, auch mit jedem anderen Doppelkeil zur Passung gebracht werden kann."[25]

Weiterhin beinhalte die Eindeutigkeitsthese, „daß die Parallelendefinition für Ebenenpaare unabhängig vom Öffnungswinkel der beteiligten Keile und unabhängig von der jeweiligen Wahl der zusammengelegten Flanken bei der Bildung des Doppelkeils ist"(S.76). Janich behauptet: „Die Eindeutigkeit der Parallelität ergibt sich in zwei Schritten aus einer Keil- Kerbe- Invarianz und einer Öffnungswinkelgleichheit"(S.77). Keil- Kerbe- Invarianz (abgekürzt KKI) bedeutet, „ein Keil passe auch nach einer halben Drehung in die Kerbe, aus der er entnommen ist."[26] Janich weiß sehr wohl, daß aus Ebenheit und Orthogonalität allein als „den beiden Grundformen der absoluten Geometrie" keineswegs die KKI gefolgert werden kann: „Passung eines Keils in eine Kerbe unabhängig

[24][Janich, 1992], S.73- 74(Hervorhebung von mir).
[25]Ebd., S.76.
[26]Ebd.

von der jeweiligen relativen Orientierung ... wird hier deshalb postuliert."[27]

Der im Anschluß daran formulierte Janichsche Eindeutigkeitssatz, nach dem alle Doppelkeile auf derselben Unterlage u dieselbe parallele Ebene ergeben, unabhängig vom Öffnungswinkel, wird unter Verwendung des Satzes von der *R*echts- Links- Invarianz der Doppelkeile geführt.(Janich benutzt statt des Terminus „rechts- links- invariant" das Wort „drehinvariant".) Dieser Satz besagt, daß die beiden nachfolgenden Doppelkeilkonfigurationen ein und dieselbe Parallelebene liefern.

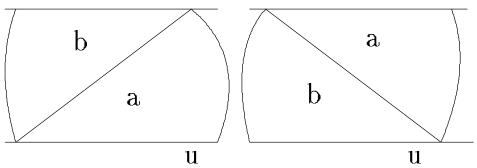


Abbildung 4: Die Rechts- Links- Invarianz

Die Rechts- Links- Invarianz führt Janich ihrerseits zurück auf den

Satz 1: „Doppelkeile können im Sinne der [folgenden] Figur formgleich 'umgebaut' werden."(S.78).

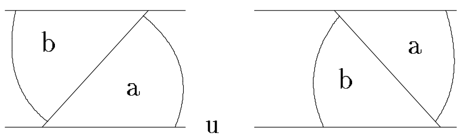


Abbildung 5: Doppelkeil- Umbau

Unter Verwendung der Rechts- Links- Invarianz glaubt Janich die Unabhängigkeit der Parallelebene vom Öffnungswinkel der zu ihrer Konstruktion benutzten beiden Keilstücke des Doppelkeils beweisen zu können (vgl. Abb. 6). Ich weise ausdrücklich darauf hin, daß Janich nur den Fall betrachtet, in dem die Punkte P und P' zusammenfallen. Offenbar beinhaltet ein vollständiger Eindeutigkeitssatz aber auch, daß der Punkt P' auf der Ebene E beliebig verschiebbar sein muß. Zu diesem Problem wird noch ausführlich Stellung genommen werden.

Janich geht nun davon aus, daß mit eben jenem Eindeutigkeitssatz die protophysikalische Etablierung der Euklidizität gegeben sei, und zwar mithilfe der (siehe Abbildung 7) „aus Keilen zu legende Konstellation, in der ein Dreieck (stellvertretend für ein dreiseitiges Prisma) mit einer zur Grundlinie parallelen Hilfslinie erzeugt wird, aus der sich wegen Gleichheit der Wechselwinkel unmittelbar ersehen läßt, daß die Winkelsumme im Dreieck gleich zwei rechten

[27] Siehe [Janich, 1992], S.77.

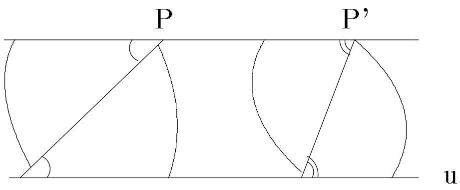


Abbildung 6: Der Janichsche Eindeutigkeitssatz

ist."[28] Das Doppelkeilverfahren spezialisiere damit die absolute auf die euklidische Geometrie.

Das nächste Kapitel dieser Arbeit soll untersuchen, ob Janichs Beweise zur Auszeichnung der euklidischen Geometrie vollständig sind. Ferner wird diskutiert, ob und wo seine Konstruktionen in der elliptischen und hyperbolischen Geometrie scheitern; dies soll geschehen, um besser nachvollziehen zu können, an welchen Stellen der Janichschen Parallelenkonstruktion Voraussetzungen eingehen, welche die euklidische Geometrie auszeichnen.

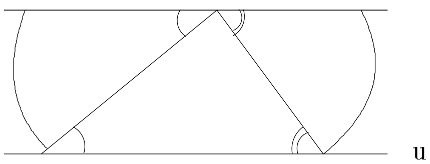


Abbildung 7: Die Erzwingbarkeit der Euklidizität

Wir wollen nicht verschweigen, daß vor Janich schon E. Bopp den Euklidischen Parallelismus mithilfe von Keiloperationen zu begründen versucht hat ([Bopp, 1969]). Bopp führt die Orthogonalität zwischen Geraden durch Operationen mit Rechtwinkelkeilen ein. Er definiert dann die Parallelität von zwei Geraden dadurch, daß sie ein gemeinsames Lot haben sollen. Um den so erklärten Parallelismus als mit dem Euklidischen Parallelismus identisch zu erweisen, betrachtet Bopp die bekannte Figur aus einem Viereck mit drei Rechten Winkeln und einem vierten Winkel, von dem gezeigt werden muss, daß er ebenfalls ein Rechter ist. Zu diesem Zweck werden in dem Aufsatz von Bopp die Postulate aufgestellt: 1.In Vierecken mit drei Rechten Winkeln sind gegenüberliegende Seiten gleich lang. 2. Es gilt der Erste Kongruenzsatz, d.h. „ein starres Dreieck ABC ist ... durch einen seiner Winkel und dessen beide Schenkel eindeutig bestimmt"(S.41/42).
Diese Vorgehensweise wirft natürlich das Problem auf: Darf sich eine protophysikalische Geometriebegründung derartiger Postulate ohne Hinterfragen bedienen ?

[28] Ebd., S. 76.

4 Die Doppelkeilkonstruktion in der nichteuklidischen Geometrie

4.1 Plan für die nachfolgenden Untersuchungen.

Nach Janichs Auffassung ist es die KKI, also die relative Lageunabhängigkeit der Passung von Keil und Kerbe, in der „die Euklidizität praktisch in der Formung der Körperwelt"eingeht ([Janich, 1992], S. 83). Es wäre demnach wünschenswert, sich einmal anzuschauen, ob Janichs Keil- Kerbe- Invarianz in den beiden nichteuklidischen, d.h. in der elliptischen und der hyperbolischen Geometrie, tatsächlich verletzt ist. Unabhängig von dieser Frage bleibt zu klären, welche von Janichs Konstruktionen auch nichteuklidisch durchführbar sind. So werden wir versuchen herauszufinden, ob denn wirklich die KKI die gesamte Last der Etablierung der Euklidizität trägt, oder ob nicht schon an anderer Stelle Voraussetzungen investiert werden, welche die euklidische Geometrie von vornherein auszeichnen, und das unabhängig von der Geltung der Keil- Kerbe- Invarianz.

Zu diesem Zweck werden wir nicht die denkbar allgemeinste nichteuklidische Geometrie benutzen, sondern die nach Felix Klein aus der projektiven Geometrie herleitbaren *Modelle* der elliptischen und hyperbolischen Geometrie. Während das hyperbolische Modell alle Axiome der absoluten Geomtrie erfüllt, ist dies für das elliptische Modell nicht mehr richtig. Wir haben uns dennoch dazu entschlossen, die Janichschen Konstruktionen auch elliptisch nachzuprüfen, da es uns darauf ankam, eine vollständige Diskussion der in Janichs Aufsatz behaupteten Sätze in beiden nichteuklidischen Geometrien zu geben.

4.2 Die Kleinschen Modelle der elliptischen und hyperbolischen Geometrie.

4.2.1 Elliptische Geometrie.

Es bezeichne $(E, <, >)$einen $(n+1)$-dimensionalen euklidischen Vektorraum, $P = P(E)$ den zugehörigen n-dimensionalen projektiven Raum über E, π: $E \setminus 0 \to P$ die kanonische Projektion, und $S = S(E)$ die Einheitssphäre in E. Wir können P mit der Menge $G_{E,1}$ von Geraden durch 0 in E identifizieren und daher auch mit der Menge $S/_\sim$, wo die Äquivalenzrelation $\sim$ gegeben ist durch $x \sim -x$ (antipodische Identifikation).

Der zu E assoziierte *n-dimensionale elliptische Raum* $Ell(E)$ ist nun definiert als das Paar (P, d), wo $P = P(E)$ wie oben und $d(D, D') = \overline{DD'}$; $\overline{DD'}$ ist der Winkel zwischen den (nicht-orientierten) Geraden D, D', also ein Wert aus dem Intervall $[0, \pi/2]$.

Mit anderen Worten, wenn $m, n \in P(E)$, und $m = \pi(x)$, $n = \pi(y)$ $(x, y \in S(E))$, so haben wir $\cos(d(m,n)) = |< x, y >|$. Dem Abstand $\pi/2$ entsprechen zwei orthogonale Geraden in $G_{E,1}$.

Um Dreiecke in *Ell* zu studieren, können wir ohne Einschränkung der Allgemeingültigkeit $n = 2$ voraussetzen: drei nicht kollineare Punkte in *Ell* spannen stets eine elliptische Ebene auf.

Die Größe eines Winkels zwischen zwei elliptischen Geraden ist per Definition gleich dem Winkel, den die zugehörigen Großkreise auf der zweidimensionalen Sphäre S^2 bilden.

Im Hinblick auf eine spätere Anwendung wollen wir noch die Abstandsdefinition der sphärischen Geometrie nachtragen: Für zwei Punkte x,y auf der Sphäre setzt man $d(x, y) = \cos^{-1}(< x, y >)$, d.h., $d(x, y) \in [0, \pi]$.

4.2.2 Hyperbolische Geometrie

Gegeben sei ein n-dimensionaler euklidischer Vektorraum $(E', (,))$; betrachte dann auf dem Produkt $E = \mathbf{R} \times E' = \{\xi = (t, z)/\, z \in E', t \in \mathbf{R}\}$ die *Lorentzform* $<,>$ mit Signatur $(1, n)$; d.h. $< (t, z), (t', z') >= -tt' + (z, z')$. Es bezeichne $q(\xi) =< \xi, \xi >$ die zugehörige quadratische Form sowie die Menge $Q = q^{-1}(0)$ den sogenannten *Lichtkegel*. Ferner sei H die Menge all derjenigen Geraden durch 0 in $\mathbf{R} \times E'$, so daß $|z| < t$ für alle $(t, z) = \xi \neq 0$ auf der in Rede stehenden Geraden.

Der *n-dimensionale hyperbolische Raum Hyp* ist erklärt als die Teilmenge $P(H)$ des projektiven Raumes $P(\mathbf{R} \times E')$.

Für *„zeitartige“* Vektoren $\xi, \xi' \in H$ gilt die Ungleichung $- < \xi, \xi' > \geq \sqrt{q(\xi)q(\xi')}$, [29] und die Funktion $\cosh^{-1}(\frac{-<\xi,\xi'>}{\sqrt{q(\xi)q(\xi')}}); \xi \in D, \xi' \in D'$ $(D, D' \in H)$, abgekürzt $d(D, D')$, macht *Hyp* zu einem metrischen Raum.

Jeder Punkt aus *Hyp*, d.h. jede Gerade in H schneidet die eine Zusammenhangskomponente des zweischaligen Hyperboloids $\mathcal{H} = \{(t, z)/ - t^2 + (z, z) = -1\}$ in genau einem Punkt. Wir erhalten auf diese Weise das *Standardmodell des hyperbolischen Raumes*; in ihm vereinfacht sich die Abstandsformel für zwei hyperbolische Punkte x,x' zu $d(x, x') = \cosh^{-1}(- < x, x' >)$. Weiter können wir den Winkel zwischen zwei Geraden in einer hyperbolischen Ebene einwandfrei definieren als den Winkel der zugehörigen Schnittkurven auf dem Hyperboloid. Hierbei ist zu beachten, daß ganz allgemein einer projektiven Geraden ein zweidimensionaler Unterraum im assoziierten Vektorraum entspricht. Wir bemerken schließlich: Die Lorentzform induziert auf dem Hyperboloidmodell eine Riemannsche Struktur, denn die quadratische Form q ist, eingeschränkt auf jeden Tangentialraum an *Hyp*, positiv definit. Insbesondere gilt dann die Cauchy-Schwarzsche Ungleichung, und der fragliche Winkel α ergibt sich zu $\cos\alpha = \frac{<u,u'>}{\sqrt{q(u)q(u')}}$, wenn u, u' Tangentialvektoren an die Schnittkurven in einem fixierten Punkt, etwa x, sind. Weil Tangentialvektoren $v \neq 0$ an *Hyp* stets *„raumartig“* sind, d.h. die Relation $q(v) > 0$ befriedigen, können wir u und u' auf $q(u) = q(u') = 1$ normieren und erhalten eine der elliptischen Geometrie

[29] Siehe z.B. [Naber, 1988], Theorem 1.5.4.(Reversed Schwartz Inequality), S.31.

analoge Winkelformel $\cos\alpha =< u, u' >$, mit dem Unterschied, daß anstelle des euklidischen Skalarprodukts die Lorentzform zu nehmen ist.

4.2.3 Nichteuklidische Trigonometrie

Der elliptische sowie der hyperbolische Fall lassen sich parallel behandeln. Wir können uns auf die Ebene beschränken.

Bezeichne im elliptischen Fall $<,>$ das Skalarprodukt eines dreidimensionalen euklidischen Raumes, im hyperbolischen Fall eine Lorentzform der Signatur $(1,2)$.

Wir treffen ein für allemal die Verabredung, daß gelten soll:

$$\epsilon = \begin{cases} -1 & : \text{ in der hyperbolischen Geometrie,} \\ +1 & : \text{ in der elliptischen Geometrie} \quad . \end{cases}$$

Seien nun x und y linear unabhängige Vektoren auf S^2 bzw. $\mathcal{H}$; dann setzen wir

$$x_y = \frac{y - \epsilon < x, y > x}{\sqrt{q(y - \epsilon < x, y > x)}} \, .$$

D.h., x_y ist der zweite Einheitsvektor bei Anwendung des Gram-Schmidtschen Orthonormalisierungsverfahrens auf die Menge $\{x, y\}$. Außerdem gilt: x_y ist derjenige Einheitvektor, welcher tangential an den „Großkreis“ mit Anfangspunkt x und Endpunkt y im Punkte x ist (im hyperbolischen Fall meinen wir mit „Großkreis“ natürlich einen ebenen Schnitt durch das Hyperboloid $\mathcal{H}$). Beachte, daß x_y auch hyperbolisch wohldefiniert ist, da Tangentialvektoren an $\mathcal{H}$ raumartig sind, d.h. $q(y+ < x, y > x) > 0$.

Definition: Sei $\triangle(x, y, z)$ ein elliptisches oder auch ein hyperbolisches Dreieck. Die Punkte x,y und z heißen Ecken von $\triangle(x, y, z)$. Unter den Seiten von $\triangle(x, y, z)$ verstehen wir die Großkreisbögen, die durch die Punktepaare (x, y), (y, z) und (z, x) bestimmt sind. Die Seitenlängen sind gegeben durch $a = d(y, z)$, $b = d(z, x)$ und $c = d(x, y)$, wo d die elliptische resp. hyperbolische Metrik ist. Schließlich verstehen wir unter den Winkeln von $\triangle(x, y, z)$ die reellen Zahlen

$$\begin{aligned} \alpha &= \angle(x_y, x_z) = \arccos(< x_y, x_z >) \, , \\ \beta &= \angle(y_z, y_x) = \arccos(< y_z, y_x >) \, , \\ \gamma &= \angle(z_x, z_y) = \arccos(< z_x, z_y >) \end{aligned}$$

aus dem Intervall $(0, \pi)$.

Es gilt der sogenannte Winkelkosinussatz, d.h.

$$\cos\gamma = \sin\alpha \sin\beta \cos c - \cos\alpha \cos\beta$$

(elliptische Version)
bzw.

$$\cos\gamma = \sin\alpha \sin\beta \cosh c - \cos\alpha \cos\beta$$

(hyperbolische Version).

4.2.4 Polarität und nichteuklidische Orthogonalität

Zwei Punkte $m, n \in P(E)$ heißen konjugiert, in Zeichen $m \perp n$, falls $< x, y >= 0$ für alle x und y mit $m = \pi(x)$, $n = \pi(y)$. Offenbar hängt „$\perp$" nur von den eindimensionalen Teilräumen ab, die von den Vektoren x resp. y aufgespannt werden, d.h. $\perp$ ist wohldefiniert.

Zu jeder Teilmenge $S \in P(E)$ ist der zu S orthogonale Teil erklärt durch

$$S^{\perp} = \{n \in P(E) / \ m \perp n \quad \forall m \in S\}$$

Wir sagen auch, $S^{\perp}$ sei der zu S polare Unterraum in $P(E)$. Es gelten die Regeln

$$\begin{aligned} dimS + dimS^{\perp} &= dimP(E) - 1\,, \\ (S \cap T)^{\perp} &= << S^{\perp} \cup T^{\perp} >>\,, \\ << S \cup T >>^{\perp} &= S^{\perp} \cap T^{\perp}\,. \end{aligned}$$

Anmerkung 1. $<<, >>$ bedeutet das Bild der linearen Hülle unter der kanonischen Projektion π.
Anmerkung 2. Da die Relation $\perp$ symmetrisch ist, gilt:

$$m \in n^{\perp} \quad \Leftrightarrow \quad n \in m^{\perp}.$$

Stellt S eine projektive Hyperebene dar, so ist $S^{\perp}$ ein Punkt, der „Pol" der Hyperebene. Sprechweise: Zwei projektive Hyperebenen s_1, s_2 stehen senkrecht aufeinander, wenn die eine den Pol der anderen enthält.

4.2.5 Die nichteuklidischen Bewegungen

Wir erinnern zunächst an die Definition einer Projektivität.
Eine Abbildung $f : P(E) \to P(E)$ heißt *Projektivität*, wenn es einen linearen Isomorphismus $F : E \to E$ gibt, so daß das Bild $f(\pi(U))$ [30] eines eindimensionalen Unterraumes U von E durch $\pi(F(U))$ gegeben ist; mit anderen Worten, f ist die wohlbestimmte Abbildung von $P(E)$ auf sich mit der Eigenschaft

$$f \circ \pi = \pi \circ F\,.$$

[30] π bezeichne wie stets die kanonische Projektion des Vektorraums E in den assoziierten projektiven Raum $P(E)$.

Auf diese Weise wird jedem Element F aus $GL(E)$ eindeutig eine Projektivität $\mathcal{P}(F)$ zugeordnet. Die Zuordnung $\mathcal{P}$ ist ein Homomorphismus der Allgemeinen Linearen Gruppe $GL(E)$ in die Permutationsgruppe $Perm(P(E))$ des projektiven Raumes. Das Bild $\mathcal{P}(GL(E))$ ist also eine Untergruppe von $Perm(P(E))$ und heißt „projektive Gruppe von $P(E)$“; Notation: $Pro(P(E))$.

Wir kommen jetzt zum eigentlichen Gegenstand dieses Abschnitts. Die Gruppe $Bew(Ell)$ der *elliptischen Bewegungen* ist als die Untergruppe $\mathcal{P}(O(E))$ der Gruppe $Pro(P(E))$ erklärt. $Bew(Ell)$ besitzt die durch $\mathcal{P}(SO(E))$ definierte Gruppe $Bew^+(Ell)$ als Untergruppe; diese heißt Gruppe der *eigentlichen* elliptischen Bewegungen. Wie üblich ist $O(E)$ die Abkürzung für die Orthogonale Gruppe des euklidischen Raumes E; $SO(E)$ steht für die Untergruppe der orthogonalen Transformationen mit Determinante $+1$.
Analog konstruieren wir die Gruppe $Bew(Hyp)$ der *hyperbolischen Bewegungen* als das Bild $\mathcal{P}(O(1,n))$ der Lorentzgruppe $O(1,n)$; unter einer *eigentlichen* hyperbolischen Bewegung versteht man eine hyperbolische Bewegung aus der Untergruppe $Bew^+(Hyp) = \mathcal{P}(SO(1,n))$. Erinnere, daß $O(1,n)$ die Gruppe derjenigen linearen Transformationen bezeichnet, welche die Lorentzform invariant lassen. Die „Spezielle Lorentzgruppe“ $SO(1,n)$ ist der Durchschnitt von $O(1,n)$ mit der Menge der linearen Automorphismen von $\mathbf{R} \times E'$, welche positive Determinante haben.
Man definiert schließlich die *orthochrone* Lorentzgruppe $SO^+(1,n)$ als Untergruppe der Speziellen Lorentzgruppe $SO(1,n)$; die Elemente aus $SO^+(1,n)$ sind dadurch charakterisiert, daß sie eine (und damit beide) der zwei Zusammenhangskomponenten des zweischaligen Hyperboloids $\mathcal{H}$ auf sich abbilden.[31]

Die nichteuklidischen Bewegungsgruppen als topologische Räume

Zwecks späterer Anwendung wollen wir noch die elliptische bzw. die hyperbolische Bewegungsgruppe kanonisch mit einer Topologie versehen.
Wir erklären: Eine Teilmenge $U \subset Bew$ heiße offen, wenn $\mathcal{P}^{-1}(U)$ offen in $O(E)$ bzw. $O(1,n)$ ist. Dadurch wird Folgendes erreicht:
Sei $c : I \subset \mathcal{R} \to Bew$ eine stetige Kurve in $Bew(Ell)$ bzw. $Bew(Hyp)$. Dann beschreibt die Bahn („Orbit“) eines Punktes $P \in Ell$ resp.Hyp unter c, d.h. die Menge $\{c(t)(P)/t \in I\}$ einen stetigen Weg in Ell resp. Hyp (dabei seien Ell und Hyp mit der durch die Projektion π induzierten Quotiententopologie versehen).
Zum Beweis bemerken wir, daß sich aufgrund der so eingeführten Topologien die Behauptung reduziert auf die Aussage: „Die Abbildung $\lambda_x : GL(E) \to E$; $A \mapsto A(x)$ ist stetig für alle $x \in E$.“

[31] Um festzustellen, ob eine spezielle Lorentztransformation F diese Eigenschaft hat, genügt es nachzuweisen, daß $F(x)$ in derselben Zusammenhangskomponente liegt wie x für einen einzigen Vektor $x \in \mathcal{H}$, also etwa für den Vektor $(1,0,\ldots,0)$. Wählt man $(1,0,\ldots,0)$ als ersten Basisvektor einer Lorentz- Orthonormalbasis, und bezeichnet a_{11} die $(1,1)$- Komponente in der Matrixdarstellung von F bezüglich dieser Basis, so gilt:
$SO^+(1,n) = \{F \in SO(1,n)/\, a_{11} > 0\}$.

4.3 Die Legendreschen Sätze am Dreieck

Die Legendreschen Sätze sind Aussagen über die Winkelsumme in Dreiecken der absoluten Geometrie. Sie sind also nur für die euklidische und für die hyperbolische Geometrie gültig.

Erster Legendrescher Satz In jedem Dreieck ist die Winkelsumme höchstens gleich zwei Rechten.

Zweiter Legendrescher Satz Wenn in einem Dreieck die Winkelsumme gleich zwei Rechten ist, dann ist sie in jedem Dreieck gleich zwei Rechten.

Während der Zweite Legendresche Satz allein mithilfe der Axiome der ebenen Inzidenz, Anordnung und Kongruenz bewiesen werden kann, beruht der Erste Legendresche Satz wesentlich auf dem Archimedischen Axiom, er ist also in nichtarchimedischen Geometrien i.A. nicht mehr richtig.[32]

Die beiden Legendreschen Sätze lehren: Die Winkelsumme des Dreiecks ist entweder in jedem Dreieck gleich zwei Rechten, oder sie ist bei keinem Dreieck gleich zwei Rechten, also bei jedem Dreieck kleiner als zwei Rechte.[33]

4.4 Die Rechts- Links- Invarianz in der elliptischen und in der hyperbolischen Geometrie

Wir wollen uns zunächst klar machen, daß die Janichsche Rechts- Links- Invarianz in der nichteuklidischen Geometrie falsch ist.

Führen wir einen ebenen Schnitt durch die beteiligten Doppelkeile derart, daß die Schnittebene senkrecht zur Unterlage u verläuft, so haben wir – bei Anwendung der Rechts- Links- Invarianz und unter Herstellung des Sonderfalles, daß sich die obenliegenden Keile längs ihrer Kanten berühren – die ebene Konfiguration der Abbildung 8.

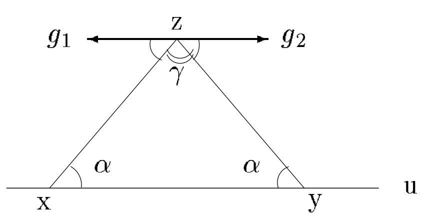


Abbildung 8: Zur Rechts- Links- Invarianz

Wir bemerken zunächst, daß unser Verfahren, mittels zur Unterlage U senkrechter Schnitte das Problem auf ein ebenes zu reduzieren, sicher im Sinne von Janich ist. Schließlich wendet er ein entsprechendes Verfahren an, und zwar

[32] Dies hat als erster M. Dehn erkannt; siehe [Dehn, 1900].

[33] Wohlgemerkt, sofern es sich um Dreiecke der absoluten Geometrie handelt!

beim Beweis seines Satzes 2, welcher genau die Rechts- Links- Invarianz beinhaltet:[34] „Man stelle auf eine ebene Unterlage U einen rechten Keil mit der aufrechten Ebene A und bringe dazu einen Doppelkeil so in Berührung, daß
– eine Keilflanke auf U aufliegt, und
– der Querschnitt des Doppelkeils auf dem rechten Keil aufliegt“(S. 78).

Daß der Querschnitt des Doppelkeils auf der aufrechten Ebene A aufliegt, bedeutet, daß man A auch als zu U senkrechte Schnittebene auffassen kann.

Gegeben seien also drei Punkte x, y, z mit $q(x) = q(y) = q(z) = \epsilon$ (zur Erinnerung: ϵ ist $+1$ in der elliptischen Geometrie, -1 in der hyperbolischen). Vom Punkt z aus werden zwei Einheitstangentialvektoren g_1 bzw. g_2 abgetragen, die mit der Dreiecksseite b bzw. mit der Dreiecksseite a denselben Winkel α bilden. Unsere Aufgabe ist es, nachzuprüfen, in welchen Fällen die Vektoren g_1 und g_2 linear abhängig sind.

Wir werden im Abschnitt „Translationsinvarianz“ nachweisen, daß die Winkelsumme in nichteuklidischen Dreiecken niemals gleich zwei Rechten ist. Die Rechts- Links- Invarianz würde aber, wie man sich anhand der Abbildung 8 sofort klar macht, eben diese Aussage implizieren, daß in dem betrachteten Dreieck die Winkelsumme gleich π ist. D.h. es ist nicht möglich, daß die Rechts- Links- Invarianz in der nichteuklidischen Geometrie besteht.
Dieses Ergebnis soll in den Kleinschen Modellen nochmals rechnerisch bestätigt werden.

Die Voraussetzungen sind:

$$\begin{aligned}
\cos\alpha &= <x_z, x_y> = <y_z, y_x> &(1)\\
<g_1, z> &= <g_2, z> = 0 &(2)\\
<g_1, g_1> &= <g_2, g_2> = 1 &(3)\\
<g_1, z_x> &= <g_2, z_y> = \cos\alpha &(4)\\
\cos\gamma &= <z_x, z_y> &(5)
\end{aligned}$$

(2) bedeutet gerade, daß g_1 und g_2 Tangentialvektoren im Punkt z sind; wir machen darum den Ansatz

$$g_1 = \lambda_1 z_x + \mu_1 z_y\,,$$
$$g_2 = \lambda_2 z_x + \mu_2 z_y\,.$$

Dann folgt aus (3) und (5)

$$\begin{aligned}
\lambda_1^2 + \mu_1^2 + 2\lambda_1\mu_1\cos\gamma &= 1\,, &(6)\\
\lambda_2^2 + \mu_2^2 + 2\lambda_2\mu_2\cos\gamma &= 1\,, &(7)
\end{aligned}$$

[34] Siehe [Janich, 1992], S.78- 79, insbesondere Figur 4 auf S. 79.

und aus (4) folgt

$$\lambda_1^2 + 2\lambda_1\mu_1 \cos\gamma + \mu_1^2 \cos^2\gamma = \cos^2\alpha\,, \tag{8}$$

$$\lambda_2^2 \cos^2\gamma + 2\lambda_2\mu_2 \cos\gamma + \mu_2^2 = \cos^2\alpha\,. \tag{9}$$

Gln. (6) und (8) implizieren

$$(1-\cos^2\gamma)\mu_1^2 = (1-\cos^2\alpha)\,,$$

d.h.

$$\sin^2\gamma\,\mu_1^2 = \sin^2\alpha\,,$$

also

$$\sin\gamma\,\mu_1 = \pm\sin\alpha\,.$$

Die Gln. (7) und (9) implizieren

$$\sin^2\gamma\,\lambda_2^2 = \sin^2\alpha\,,$$

also

$$\sin\gamma\,\lambda_2 = \pm\sin\alpha\,.$$

Wir bekommen damit

$$\mu_1 = \delta_1 \frac{\sin\alpha}{\sin\gamma}\,, \delta_1 \in \{-1,+1\}\,;$$

$$\lambda_2 = \delta_2 \frac{\sin\alpha}{\sin\gamma}\,, \delta_2 \in \{-1,+1\}\,.$$

Insgesamt hat man also in der Basis $\{z_x, z_y\}$ folgende Koordinatendarstellung der Vektoren g_1, g_2:

$$g_1 = \begin{pmatrix} \lambda_1 \\ \mu_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\alpha - \delta_1 \sin\alpha\cot\gamma \\ \delta_1 \frac{\sin\alpha}{\sin\gamma} \end{pmatrix}\,, \tag{10}$$

$$g_2 = \begin{pmatrix} \lambda_2 \\ \mu_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \delta_2 \frac{\sin\alpha}{\sin\gamma} \\ \cos\alpha - \delta_2 \sin\alpha\cot\gamma \end{pmatrix}\,. \tag{11}$$

g_1 und g_2 sind genau dann linear abhängig, wenn die Determinante $\begin{vmatrix} \lambda_1 & \lambda_2 \\ \mu_1 & \mu_2 \end{vmatrix}$ gleich Null ist. Als Wert für die Determinante ergibt sich

$$\begin{aligned} \begin{vmatrix} \lambda_1 & \lambda_2 \\ \mu_1 & \mu_2 \end{vmatrix} &= \frac{1}{\sin^2\gamma}[\sin^2\gamma(\cos^2\alpha - \delta_1\delta_2\sin^2\alpha) \\ &\quad -(\delta_1+\delta_2)\sin\alpha\cos\alpha\sin\gamma\cos\gamma)]. \end{aligned}$$

Wir könnten nun vier Fälle unterscheiden, gemäß der vier Möglichkeiten der Kombination von δ_1, δ_2. Unser Interesse gilt dem Fall, bei dem g_1 und g_2 beide nach außen abgetragen werden, was der Kombination $\delta_1 = \delta_2 = -1$ entspricht, falls der Öffnungswinkel α des Doppelkeils spitz ist. Wir wollen zunächst diesen Fall diskutieren.

Die Determinante verschwindet in diesem Fall genau dann, wenn

$$0 = \sin^2\gamma(\cos^2\alpha - \sin^2\alpha) + \sin 2\alpha\sin\gamma\cos\gamma$$

ist, also (es ist $\gamma \neq 0, \gamma \neq \pi$!)

$$0 = \sin\gamma\cos 2\alpha + \sin 2\alpha\cos\gamma = \sin(\gamma + 2\alpha),$$

was auf die beiden Lösungen

$$\gamma + 2\alpha = 0; \qquad \gamma + 2\alpha = \pi \tag{12}$$

führt. Die erste Alternative scheidet von vornherein wegen der Positivität der Winkel aus, während die zweite implizieren würde:

$$\cos\gamma = 1 - 2\cos^2\alpha.$$

Nun haben wir den Winkelkosinussatz für nichteuklidische Dreiecke, siehe Abschnitt 4.2.3 (Nichteuklidische Trigonometrie). In der elliptischen Geometrie lautete er:

$$\cos\gamma = \sin\alpha\sin\beta\cos c - \cos\alpha\cos\beta\,.$$

Mithilfe dieser Formel können wir dann schließen:

$$\begin{aligned} 1 - 2\cos^2\alpha &= \sin^2\alpha\cos c - \cos^2\alpha\,, \\ \sin^2\alpha &= \sin^2\alpha\cos c\,, \\ 1 &= \cos c\,, \\ c &= 0\,. \end{aligned}$$

Analog kommt man mit dem hyperbolischen Winkelkosinussatz auf das Ergebnis $c = 0$. Offenbar verbietet sich die Annahme einer Grundseite der Länge

0 von selbst. Mit anderen Worten, die Janichsche Rechts-Links-Invarianz ist im Falle eines spitzen Öffnungswinkels nichteuklidisch nicht gegeben.

Bleibt noch der Fall, daß es sich im einen Doppelkeil mit stumpfem Öffnungswinkel handelt! Man hat offenbar die Vorzeichenverteilung: $\delta_1 = \delta_2 = +1$. Die Determinante hat dann den Wert Null dann, und nur dann, wenn

$$\begin{aligned} \sin\gamma(\cos^2\alpha - \sin^2\alpha) - \sin 2\alpha\cos\gamma = 0 \\ \Leftrightarrow \sin\gamma\cos 2\alpha - \sin 2\alpha\cos\gamma = 0 \\ \Leftrightarrow \sin(\gamma - 2\alpha) = 0 \\ \Rightarrow \gamma - 2\alpha = 0\,, \quad \text{oder} \quad \gamma - 2\alpha = \pi\,. \end{aligned}$$

Die erste Alternative würde, da α stumpf ist, $\gamma \geq \pi$ implizieren, im Widerspruch zur Tatsache, daß Winkelwerte definitionsgemäß aus dem offenen Intervall $(0, \pi)$ zu nehmen sind. Mit derselben Begründung kann auch die Möglichkeit $\gamma = \pi + 2\alpha$ ausgeschlossen werden. Also kann auch mit „stumpfen“ Doppelkeilen keine Rechts- Links- Invarianz erreicht werden.

Wir bemerken noch Folgendes:
Die Rechts- Links- Invarianz ist ein Spezialfall der vollen Rotationsinvarianz, nämlich eine Drehung um einen gestreckten Winkel. Janich hätte im Rahmen seines Eindeutigkeitsbeweises die allgemeinenere Rotationsinvarianz zeigen müssen, nicht nur die Rechts- Links- Invarianz (welche bei ihm ungenauerweise als „Drehinvarianz“ ausgegeben wird). Für uns hat die Drehung des Doppelkeils um einen beliebigen Winkel keine Bedeutung mehr, weil wir erkannt haben, daß in den Kleinschen Modellen schon die Drehung um einen gestreckten Winkel eine andere Parallelebene liefert.

4.5 Die Translationsinvarianz

Janich thematisiert in seinem Aufsatz nicht die Frage, ob seine Doppelkeilkonstruktion dieselbe Parallelebene liefert, wenn man auf einer schon konstruierten Parallelebene einen beliebigen Punkt P wählt und die obenliegende Keilkante eines zweiten Doppelkeils von demselben Öffnungswinkel durch P gehen läßt. Definiert der zweite Doppelkeil dann die gleiche Parallelebene? Bei positivem Ausgang wollen wir diesen Sachverhalt als „*Translationsinvarianz*“ bezeichnen, da es sich um die Möglichkeit handelt, den Punkt P auf der schon vorhandenen Parallelebene frei zu verschieben.

Wir behandeln den elliptischen und den hyperbolischen Fall getrennt. Zunächst zur Situation in der elliptischen Geometrie! Als Erstes reduzieren wir das Problem wieder auf ein ebenes, indem wir einen zur Unterlage u senkrecht verlaufenden ebenen Schnitt durch die beiden Doppelkeile führen. Man sieht sofort, daß die Winkelsumme in dem so entstandenen Viereck gleich 2π wäre. Zeichnen wir eine der beiden Diagonalen in das Viereck ein (siehe Abbildung

9), so bekämen wir zwei Dreiecke, deren Winkelsummen sich also zu 2π addieren würden. Nun werden wir sogleich den Satz beweisen, daß in elliptischen Dreiecken die Winkelsumme stets größer als π ist, und wir wären damit auf einen Widerspruch gestoßen. Es folgt, daß in der elliptischen Geometrie *keine* Translationsinvarianz besteht.

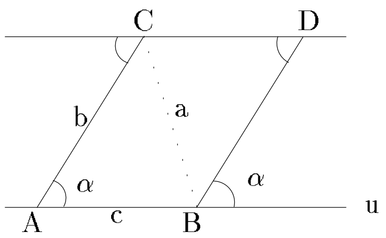


Abbildung 9: Translationsinvarianz

Gegeben sei ein elliptisches Dreieck $\triangle(A,B,C)$ mit Winkeln (α,β,γ) und Seiten $a = d(B,C), b = d(A,C), c = d(A,B)$. Im spärischen Modell gilt z.B. für den Winkel α die Beziehung

$$\begin{aligned} \cos\alpha &= < x_y, x_z > \\ &= \frac{< y,z > - < x,y >< x,z >}{\sin(d(x,y))\sin(d(x,z))} \\ &= \frac{\cos a - \cos b \cos c}{\sin b \sin c}, \end{aligned}$$

wenn (x,y,z) das $\triangle(A,B,C)$ repräsentierende Vektortripel ist. (Bemerke, daß die letzte Zeile dieser Gleichung gerade den elliptischen Seitenkosinussatz ausdrückt!)

Da der Betrag des Kosinus stets kleiner oder gleich Eins ist, folgert man daher

$$\left| \frac{\cos a - \cos b \cos c}{\sin b \sin c} \right| \leq 1 . \tag{13}$$

Die Zahlen b und c sind als Seitenlängen positiv und überdies kleiner/gleich π (nach Definition des sphärischen Abstands),[35] wir können also $|\sin b \sin c|$ durch $\sin b \sin c$ ersetzen und erhalten so

[35] Zwar sind die Seiten *elliptischer* Dreiecke sogar kleiner/gleich $\pi/2$, doch wir benötigen eine Abschätzung für die Summe der Seitenlängen sphärischer Dreiecke. Es kann nämlich sein, daß das sogleich zu definierende Polardreieck zu einem elliptischen Dreieck, gleichwohl es auf der Sphäre liegt,nicht der Bedingung genügt, daß alle Seiten in ihm kleiner/gleich $\pi/2$ sind.

$$\begin{aligned}
|\cos a - \cos b \cos c| &\leq \sin b \sin c \\
\Leftrightarrow \cos b \cos c - \sin b \sin c &\leq \cos a \leq \cos b \cos c + \sin b \sin c \\
\Leftrightarrow \cos(b+c) &\leq \cos a \leq \cos(b-c) \\
\Rightarrow b+c &\leq 2\pi - a\,.
\end{aligned}$$

Solange das Dreieck nichtentartet ist (d.h., die Punkte A, B und C sind nicht kollinear), gilt in diesen Gleichungen durchweg die strenge Ungleichheit; somit haben wir

$$a + b + c < 2\pi\,. \tag{14}$$

Wir führen den Begriff des sogenannten Polardreiecks ein. Das zu (A, B, C) polare Dreieck (A', B', C') ist folgendermaßen erklärt:
Sei (x', y', z') das (A', B', C') repräsentierende Vektortripel auf der Sphäre, dann soll gelten:
$< x', y >=< x', z >= 0$, (x', y, z) und (x, y, z) sind gleichorientiert;
$< y', x >=< y', z >= 0$, (x, y', z) und (x, y, z) sind gleichorientiert;
$< z', x >=< z', y >= 0$, (x, y, z') und (x, y, z) sind gleichorientiert.

Die Seitenlängen des Polardreiecks stehen mit den Winkeln des Ausgangsdreiecks in einer wichtigen Beziehung, und zwar

$$\alpha + a' = \beta + b' = \gamma + c' = \pi\,. \tag{15}$$

Wegen der Symmetrie genügt es offenbar, etwa $\alpha + a' = \pi$ zu beweisen!
Es ist zunächst per Definition

$$\cos a' =< y', z' > \ .$$

y' und z' lassen sich mithilfe des Vektorprodukts leicht explizit hinschreiben, und zwar

$$\begin{aligned}
y' &= \frac{z \times x}{\| z \times x \|}\,, \\
z' &= \frac{x \times y}{\| x \times y \|}\,.
\end{aligned}$$

Für die Seite $a' = d(y', z')$ gilt dann

$$\begin{aligned}
\cos a' &= < y', z' > \\
&= \frac{< z \times x, x \times y >}{\| z \times x \| \| x \times y \|}\,.
\end{aligned}$$

Erinnere, daß für das Vektorprodukt die sogenannte *Lagrange- Identität* gilt:

$$<\vec{a}\times\vec{b},\vec{c}\times\vec{d}>=<\vec{a},\vec{c}><\vec{b},\vec{d}>-<\vec{a},\vec{d}><\vec{b},\vec{c}>\ .$$

Aus dieser Identität folgt noch die Beziehung

$$\| z\times x \|=\sqrt{1-<x,z>^2}=\sin(d(x,z))=\sin b\,.$$

Mit diesen Informationen gehen wir an die Berechnung von $\cos a'$:

$$\begin{aligned}\cos a' &= \frac{<x,y><x,z>-<x,z>}{\sin b\sin c}\\ &= -\frac{<y,z-<x,z>x>}{\sin b\sin c}\\ &= -\frac{<y,x_z>}{\sin c}\\ &= -\frac{<y-<x,y>x,x_z>}{\sin c}\\ &= -<x_y,x_z>\\ &= -\cos\alpha\,.\end{aligned}$$

Das heißt, es gilt

$$\begin{aligned}\cos a' = -\cos\alpha &= \cos(\pi-\alpha)\\ \Rightarrow a' &= \pi-\alpha\,. \qquad \square\end{aligned}$$

Nun sind wir aber gleich am Ziel. Wir hatten gezeigt, daß die Summe der Seitenlängen eines nichtausgearteten sphärischen Dreiecks stets kleiner als 2π ist. Sicher ist das Polardreieck eines nichtentarteten elliptischen Dreiecks jedenfalls ein nichtentartetes sphärisches Dreieck; mit anderen Worten, es gilt

$$a'+b'+c'<2\pi$$

Ferner:

$$\begin{aligned}a' &= \pi-\alpha\\ b' &= \pi-\beta\\ c' &= \pi-\gamma\\ \Rightarrow 3\pi-(\alpha+\beta+\gamma) &< 2\pi\\ \Rightarrow \pi &< \alpha+\beta+\gamma. \qquad \square\end{aligned}$$

Nun zur Winkelsumme in hyperbolischen Dreiecken! Die elliptische Herleitung fußte auf der aus dem Seitenkosinussatz gewonnenen Ungleichung

$$\left|\frac{\cos a-\cos b\cos c}{\sin b\sin c}\right|<1\,.$$

Der hyperbolische Seitenkosinussatz läßt sich nicht analog auswerten, da sich das Vorzeichen umkehrt:

$$\begin{aligned}\cos\alpha &= < x_y, x_z > \\ &= \frac{< y,z > + < x,y >< x,z >}{\sinh b \sinh c} \\ &= \frac{\cosh a + \cosh b \cosh c}{\sinh b \sinh c}\,.\end{aligned}$$

Bemerke aber Folgendes: Die elliptische Ungleichung hätte auch aus der Bedingung, daß die *Gramsche Determinante* der drei Vektoren x, y, z größer als Null ist, gefolgert werden können. Es ist nämlich

$$\begin{aligned}Gram(x,y,z) &= \det(\begin{pmatrix} < x,x > & < x,y > & < x,z > \\ < x,y > & < y,y > & < y,z > \\ < x,z > & < y,z > & < z,z > \end{pmatrix}) \\ &= \det(\begin{pmatrix} 1 & \cos c & \cos b \\ \cos c & 1 & \cos a \\ \cos b & \cos a & 1 \end{pmatrix}) \\ &= \sin^2 b \sin^2 c - (\cos a - \cos b \cos c)^2\,.\end{aligned}$$

Daraus folgt aber sofort die gewünschte Ungleichung.

Dies zeigt nun den Weg, wie man im Falle des hyperbolischen Dreiecks vorzugehen hat: Man konstruiere ein „hyperbolisches“ Vektorprodukt „$\wedge$“ zwecks Bildung polarer Dreiecke sowie ein Analogon zur Gram- Determinante!

Sei

$$\mathsf{I} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \mathsf{J} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \mathsf{K} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Es genügt, „$\wedge$“ auf der Basis $\{\mathsf{I}, \mathsf{J}, \mathsf{K}\}$ zu erklären und vermittels Antisymmetrie und Bilinearität auf ganz $\mathbf{R}^3$ fortzusetzen.

Wir definieren :

$$\mathsf{I} \wedge \mathsf{J} = \mathsf{K}, \quad \mathsf{K} \wedge \mathsf{I} = \mathsf{J}, \quad \mathsf{J} \wedge \mathsf{K} = -\mathsf{I}.$$

Man verifiziert, daß die dem euklidischen Vektorprodukt analogen Identitäten gelten:

$$\begin{aligned}< x \wedge y, z > &= \det(x,y,z); & (16)\\ (x \wedge y) \wedge z &= < y,z > x - < x,z > y; & (17)\\ < x \wedge y, u \wedge v > &= < x,v >< y,u > - < x,u >< y,v >\,. & (18)\end{aligned}$$

Aus Gl.(18) folgt für zwei Vektoren x, $y \in \mathcal{H}$:

$$\|x \wedge y\| = \sinh(d(x,y)).$$

Gegeben sei jetzt ein hyperbolisches Dreieck $\triangle(A,B,C)$. Das dazu polare Dreieck $\triangle(A',B',C')$ ist genauso definiert wie in der elliptischen Geometrie; man hat nur „$\times$“ durch „$\wedge$“ zu ersetzen. Beachte, daß die Punkte des Polardreiecks auf dem einschaligen Hyperboloid $\{x \in \mathbf{R}^3 / < x, x >= +1\}$ liegen, d.h. es ist nicht Teil der eigentlichen hyperbolischen Ebene. Das Polardreieck hat also die Eckpunkte

$$
\begin{aligned}
A' &= \frac{B \wedge C}{\sinh a}\,, \\
B' &= \frac{C \wedge A}{\sinh b}\,, \\
C' &= \frac{A \wedge B}{\sinh c}\,.
\end{aligned}
$$

Bemerke nun, daß für raumartige Vektoren x und y die Cauchy- Schwarzsche Ungleichung gilt und es demzufolge eine wohlbestimmte Zahl $\phi = \phi(x,y) \in (0,\pi)$ gibt mit $< x, y >= \|x\|\|y\| \cos\phi$, *wenn* die zweidimensionalen Unterräume $x^\perp$ und $y^\perp$ einen Punkt aus $\mathcal{H}$ gemeinsam haben : Denn Letzteres impliziert, daß $<< x, y >>^\perp = x^\perp \cap y^\perp$ einen zeitartigen Vektor z enthält. Dann kann aber $<< x, y >>$ nur aus raumartigen Vektoren bestehen, also ist $<\,,\,>$, eingeschränkt auf $<< x, y >>$, positiv definit.
In dieser Weise seien die in dem Intervall $(0,\pi)$ liegenden, wohlbestimmten Zahlen $\Phi(A',B')$, $\Phi(B',C')$ und $\Phi(A',C')$ definiert.

Behauptung:

$$
\alpha + \Phi(B',C') = \beta + \Phi(A',C') = \gamma + \Phi(A',B') = \pi\,. \tag{19}
$$

Beweis: Aus Symmetriegründen genügt es wieder, etwa $\alpha + \Phi(B',C') = \pi$ zu zeigen. Nun ist nach Definition von $\Phi(B',C')$

$$
\cos\Phi(B',C') =< B', C' > \ .
$$

Weiter folgt aus der hyperbolischen Lagrange- Identität (Gl.(18))

$$
\begin{aligned}
< B', C' > \sinh b \sinh c &= < C \wedge A, A \wedge B > \\
&= < C, B >< A, A > - < C, A >< A, B > \\
&= - < C, B + < A, B > A > \ .
\end{aligned}
$$

Also schließt man weiter:

$$\begin{aligned}
\cos\alpha &= < A_B, A_C > \\
&= \frac{< A_B, C >}{\sinh b} \\
&= \frac{< B+ < A, B > A, C >}{\sinh b \sinh c} \\
&= - < B', C' > \\
&= - \cos\Phi(B', C') \\
\Rightarrow \cos\alpha &= - \cos\Phi(B', C') = \cos(\pi - \Phi(B', C')) \\
\Rightarrow \alpha &= \pi - \Phi(B', C') \,. \qquad \Box
\end{aligned}$$

Als nächstes Projekt steht die Konstruktion einer „hyperbolischen“ Gram-Determinante an. Zu diesem Zweck definieren wir: Sei $\mathsf{A} = (a_1, a_2, a_3)$ die Matrix, deren Spalten aus den drei Vektoren a_1, a_2 und a_3 gebildet sind; dann bezeichne

$$\mathcal{G}(a_1, a_2, a_3) = \det(\mathsf{A}^T \circ \mathsf{Q} \circ \mathsf{A}) \,,$$

mit

$$\mathsf{Q} = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} .$$

Insbesondere:

$$\mathcal{G}(a_1, a_2, a_3) = -[\det(\mathsf{A})]^2 \leq 0 \,, \tag{20}$$

und das Gleichheitszeichen steht genau dann, wenn die Vektoren a_1,a_2 und a_3 linear abhängig sind. Man zeigt nun, daß diese „hyperbolische“ Gramsche mit der Determinante

$$\det\left(\begin{pmatrix} < a_1, a_1 > & < a_1, a_2 > & < a_1, a_3 > \\ < a_1, a_2 > & < a_2, a_2 > & < a_2, a_3 > \\ < a_1, a_3 > & < a_2, a_3 > & < a_3, a_3 > \end{pmatrix}\right)$$

übereinstimmt. Speziell berechnet sich diese Determinante, wenn man die Ecken (A', B', C') des Polardreiecks einsetzt, zu

$$\begin{aligned}
\mathcal{G}(A', B', C') &= \sin^2(\Phi(A', C')) \sin^2(\Phi(A', B')) \\
&\quad -[\cos(\Phi(B', C')) - \cos(\Phi(A', C')) \cos(\Phi(A', B'))]^2
\end{aligned} \tag{21}$$

Daraus folgt mit (20):

$$\| \cos\Phi(B',C') - \cos\Phi(A',C')\cos\Phi(A',B')\| > \sin\Phi(A',C')\sin\Phi(A',B')$$

$\Leftrightarrow$

$$\begin{array}{rcl} \cos\Phi(B',C') & > & \cos(\Phi(A',C') - \Phi(A',B'))\,, \\ & \text{oder} & \\ \cos\Phi(B',C') & < & \cos(\Phi(A',C') + \Phi(A',B'))\,. \end{array}$$

Jene beiden Ungleichungen führen auf die vier möglichen Fälle

$$\Phi(B',C') > \Phi(A',C') + \Phi(A',B')\,, \tag{22}$$

oder

$$2\pi - \Phi(B',C') < \Phi(A',C') + \Phi(A',B')\,, \tag{23}$$

oder

$$\Phi(A',C') - \Phi(A',B') > \Phi(B',C')\,, \tag{24}$$

oder

$$2\pi - (\Phi(A',C') - \Phi(A',B')) < \Phi(B',C')\,. \tag{25}$$

Wir werden nun zeigen, daß die Gln. (22) und (24) nicht bestehen können und daß die Gln. (23) und (25) den behaupteten Winkelsummensatz implizieren:

Gilt Gl.(22), so folgt wegen Gl.(19), daß $\pi - \alpha > 2\pi - (\beta + \gamma)$, also $\beta + \gamma > \pi + \alpha$. Nun sind aber alle drei Winkel kleiner als π; ohne Beschränkung der Allgemeingültigkeit sei α der größte von ihnen. Man erhält damit $\pi + \alpha < \beta + \gamma < \pi + \alpha$, ein Widerspruch. Analog schließt man das Bestehen von Gl.(24) aus. Gelte jetzt Gl.(23), die sich noch zu $2\pi < \Phi(A',C') + \Phi(A',B') + \Phi(B',C')$ umstellen läßt. Wegen (19) gilt, das der Summand auf der rechten Seite der Ungleichung den Wert $3\pi - (\alpha + \beta + \gamma)$ hat. Daraus folgt sofort, daß die Beziehung $\alpha + \beta + \gamma < \pi$ gelten, also die Winkelsumme im hyperbolischen Dreieck kleiner als π sein muß. Auf entsprechende Weise ergibt sich der hyperbolische Winkelsummensatz aus Gl(25).

Wir sind nun in der Lage, die Translationsinvarianz auch für die hyperbolische Geometrie als ungültig nachzuweisen: Zerlege wiederum das Viereck durch Diagonalenziehen in zwei Dreiecke. Deren Winkelsummen sind zusammen *kleiner* als 2π, also kann die Winkelsumme im betrachteten Viereck nicht *gleich* 2π sein. Die Translationsinvarianz besteht also nicht.

4.6 Die Unabhängigkeit vom Öffnungswinkel

Wir haben zu untersuchen, ob die Doppelkeilkonstruktion dieselbe Parallelebene liefert, wenn wir den Öffnungswinkel α variieren. Siehe Abbildung 10.

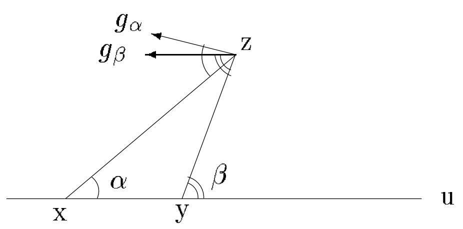


Abbildung 10: Öffnungswinkelunabhängigkeit

Sei ohne Beschränkung der Allgemeingültigkeit $\beta > \alpha$. Unsere Grundgleichungen lauten diesmal (siehe auch Abb. 10):

$$\begin{aligned} \cos\gamma &= < z_x, z_y > && (26) \\ < g_\alpha, z > &= < g_\beta, z >= 0 && (27) \\ < g_\alpha, g_\alpha > &= < g_\beta, g_\beta >= 1 && (28) \\ \cos\alpha &= < x_y, x_z >=< z_x, g_\alpha > && (29) \\ \cos\beta &= -< y_x, y_z >=< z_y, g_\beta > && (30) \end{aligned}$$

Da z_x und z_y den Tangentialraum im Punkt z aufspannen, machen wir den Ansatz:

$$\begin{aligned} g_\alpha &= \lambda_1 z_x + \mu_1 z_y \,, \\ g_\beta &= \lambda_2 z_x + \mu_2 z_y \,. \end{aligned}$$

Dann folgt aus (29) bzw. (30):

$$\begin{aligned} \lambda_1 + \mu_1 \cos\gamma &= \cos\alpha \,, && (31) \\ \lambda_2 \cos\gamma + \mu_2 &= \cos\beta \,. && (32) \end{aligned}$$

Aus der Normierungsbedingung für g_α und g_β folgt

$$\begin{aligned} \lambda_1^2 + \mu_1^2 + 2\lambda_1\mu_1 \cos\gamma &= 1 \,, && (33) \\ \lambda_2^2 + \mu_2^2 + 2\lambda_2\mu_2 \cos\gamma &= 1 \,. && (34) \end{aligned}$$

Die quadrierte Gl. (31) ziehe man von (33), die quadrierte Gl. (32) ziehe man von (34) ab und erhält somit

$$\begin{aligned} \sin^2\gamma\, \mu_1^2 &= \sin^2\alpha \,, \\ \sin^2\gamma\, \lambda_2^2 &= \sin^2\beta \,. \end{aligned}$$

Wurzelziehen ergibt

$$\begin{aligned} \sin\gamma\, \mu_1 &= \pm\sin\alpha \,, \\ \sin\gamma\, \lambda_2 &= \pm\sin\beta \,. \end{aligned}$$

Mit anderen Worten,

$$\begin{aligned}
\mu_1 &= \delta_1 \frac{\sin\alpha}{\sin\gamma}\,, \\
\lambda_2 &= \delta_2 \frac{\sin\beta}{\sin\gamma}\,, \quad \text{mit} \quad \delta_1,\delta_2 \in \{-1,1\}\,.
\end{aligned}$$

Daher gilt auch

$$\begin{aligned}
\lambda_1 &= \cos\alpha - \delta_1 \sin\alpha \cot\gamma\,, \\
\mu_2 &= \cos\beta - \delta_2 \sin\beta \cot\gamma\,.
\end{aligned}$$

In der Basis $\{z_x, z_y\}$ haben g_α und g_β damit die Koordinaten darstellung

$$g_\alpha = \begin{pmatrix} \lambda_1 \\ \mu_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\alpha - \delta_1 \sin\alpha \cot\gamma \\ \delta_1 \frac{\sin\alpha}{\sin\gamma} \end{pmatrix}\,, \tag{35}$$

$$g_\beta = \begin{pmatrix} \lambda_2 \\ \mu_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \delta_2 \frac{\sin\beta}{\sin\gamma} \\ \cos\beta - \delta_2 \sin\beta \cot\gamma \end{pmatrix}\,. \tag{36}$$

Es sind g_α, g_β linear abhängig genau dann, wenn die Determinante $\begin{vmatrix} \lambda_1 & \lambda_2 \\ \mu_1 & \mu_2 \end{vmatrix}$ verschwindet. Nun ist

$$\begin{aligned}
\begin{vmatrix} \lambda_1 & \lambda_2 \\ \mu_1 & \mu_2 \end{vmatrix} &= \frac{1}{\sin^2\gamma}[(\cos\alpha\cos\beta - \delta_1\delta_2 \sin\alpha\sin\beta)\sin^2\gamma \\
&\quad -(\delta_1 \sin\alpha\cos\beta + \delta_2\cos\alpha\sin\beta)\sin\gamma\cos\gamma].
\end{aligned}$$

Für uns ist der Fall wichtig, daß g_α und g_β nach derselben Seite abgetragen werden; dies entspricht der Vorzeichenverteilung $\delta_1 = -1, \delta_2 = +1$ (vgl. Abb. 10), wenn es sich um zwei „spitze" Doppelkeile handelt. Dann bekommt man

$$\begin{vmatrix} \lambda_1 & \lambda_2 \\ \mu_1 & \mu_2 \end{vmatrix} = \tfrac{1}{\sin^2\gamma}(\cos(\beta-\alpha)\sin^2\gamma - \sin(\beta-\alpha)\sin\gamma\cos\gamma)\,.$$

Das Verschwinden der Determinante ist daher gleichbedeutend mit

$$\begin{aligned}
\cos(\beta-\alpha)\sin\gamma &= \sin(\beta-\alpha)\cos\gamma \\
\Leftrightarrow \tan\gamma &= \tan(\beta-\alpha)\,.
\end{aligned}$$

Es gilt also $g_\alpha = g_\beta$ dann, und nur dann, wenn

$$\gamma = \beta - \alpha, \qquad \text{oder} \qquad \gamma = (\beta-\alpha) + \pi. \tag{37}$$

Wir zeigen, daß keine dieser beiden Gleichungen gelten kann. Zunächst zur ersten! Sie impliziert, daß die Winkelsumme im Dreieck $\triangle(x,y,z)$ den Wert

$$\alpha + (\pi - \beta) + \gamma = \alpha + \gamma + (\pi - \beta) = \beta + \pi - \beta = \pi$$

hat, was aber nicht möglich ist, da wir in der nichteuklidischen Geometrie sind. Nun zur zweiten Gleichung. Aus ihr würde folgen, daß die Winkelsumme des Dreiecks $\triangle(x, y, z)$ den Wert 2π hätte, was jedenfalls hyperbolisch nicht sein kann. Um den Widerspruch auch elliptisch zu Ende zu führen, ziehen wir den Winkelkosinussatz $\cos\alpha = \sin\beta \sin\gamma \cos a - \cos\beta \cos\gamma$ heran:

$$\begin{aligned}
\pi - \alpha &= \gamma - \beta \\
\Rightarrow -\cos\alpha &= \cos(\gamma - \beta) \\
&= \cos\gamma \cos\beta + \sin\gamma \sin\beta \\
&= -[\sin\beta \sin\gamma \cos a - \cos\beta \cos\gamma] \\
\Rightarrow \sin\beta \sin\gamma &= -\sin\beta \sin\gamma \cos a \\
\Rightarrow -1 &= \cos a \\
\Rightarrow a &= \pi\,.
\end{aligned}$$

Elliptische Abstände sind aber per Definition nicht grösser als $\pi/2$. $\square$

Man macht sich anhand der Abbildungen 11 und 12 klar, daß die Vorzeichenverteilung $\delta_1 = -1$, $\delta_2 = +1$ auch in denjenigen Fällen statt hat, wo entweder beide Doppelkeile stumpf oder ein Doppelkeil spitz und der andere stumpf ist.

Insgesamt haben wir damit das Resultat gewonnen: In der nichteuklidischen Geometrie gibt es keine Öffnungswinkelunabhängigkeit.

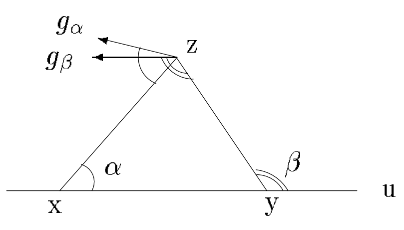


Abbildung 11: Öffnungswinkelunabhängigkeit: ein spitzer und ein stumpfer Keilwinkel

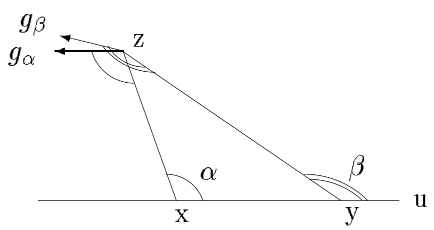


Abbildung 12: Öffnungswinkelunabhängigkeit: zwei stumpfe Keilwinkel

4.7 Die Keil- Kerbe- Invarianz

Die zentrale Aussage des Janichschen Aufsatzes ist die Zurückführbarkeit der euklidischen Struktur des Raumes auf das Bestehen der Keil- Kerbe- Invarianz. Dementsprechend ist es von entscheidender Bedeutung, zu wissen, ob die KKI in unseren Modellen für die nichteuklidischen Geometrien gültig ist oder nicht. Sollte sich ihre Gültigkeit herausstellen, so wäre damit nachgewiesen, daß Janich Unrecht hat mit seiner Behauptung, daß „die relative Lageunabhängigkeit der Passung von Keil und Kerbe" es sei, wodurch „ die Euklidizität praktisch in der Formung der Körperwelt eingeht"([Janich, 1992], S. 83). Außerdem wäre damit gezeigt, daß Janichs Beweise zur Rechts- Links- Invarianz (bei Janich ist dies der „*Satz 2*: Doppelkeile sind drehinvariant"auf S.78) und zur Öffnungswinkelunabhängigkeit fehlerhaft sein müssen: Im Beweis der beiden Sätze bemüht er nämlich die Keil- Kerbe- Invarianz. Aber die in Rede stehenden Sätze sind im Kleinschen Modell der hyperbolischen Geometrie falsch, obwohl in dem Modell alle Axiome der absoluten Geometrie sowie auch die KKI gelten (wie wir zeigen werden).

Zum Beweis der KKI geben wir uns zwei sich längs einer Geraden g schneidende Ebenen h_1 und h_2 im nichteuklidischen Raum vor. Wir konstruieren zunächst eine eigentliche elliptische bzw. hyperbolische Bewegung, welche die beiden Ebenen untereinander vertauscht. Bezeichne zu dem Zweck w die winkelhalbierende Ebene, die also auch die Gerade g enthält. Sind H_1, H_2, W resp. Normalenvektoren der Ebenen h_1, h_2, w, wobei H_1 und H_2 noch der Normierungsbedingung $< H_1, H_1 >=< H_2, H_2 >= 1$ unterworfen seien, so ist der Vektor W also charakterisiert durch das Bestehen der Gleichungen

$$W = \lambda H_1 + \mu H_2 \tag{38}$$

$$\frac{< H_1, W >}{\sqrt{< W, W >}} = \pm \frac{< W, H_2 >}{\sqrt{< W, W >}}. \tag{39}$$

Die verschiedenen Vorzeichen ergeben sich daraus, daß die normierten Normalenvektoren H_1 und H_2 nur bis auf das Vorzeichen eindeutig bestimmt sind. Man schließt weiter

$$\begin{aligned} \lambda + \mu < H_1, H_2 > &= \pm(\mu + \lambda < H_1, H_2 >) \\ \Leftrightarrow \lambda \mp \mu &= (-\mu \pm \lambda) < H_1, H_2 > \\ \Leftrightarrow (\lambda \pm \mu)(1 \pm < H_1, H_2 >) &= 0 \\ \Leftrightarrow \lambda \pm \mu &= 0 \\ \Leftrightarrow \lambda &= \pm\mu, \end{aligned}$$

denn $1- < H_1, H_2 > \neq 0$, da andernfalls h_1 und h_2 zusammenfallen würden. Die beiden Winkelhalbierenden haben also die bis auf Normierung eindeutigen Normalenvektoren $H_1 \pm H_2$.

Wir wählen für alles Nachfolgende die Winkelhalbierende mit „dem" Normalenvektor $W = H_1 + H_2$. Sei dann e eine zur Schnittgeraden senkrechte Ebene, d.h. der Pol E von e liege auf g. Insbesondere steht e auf der Winkelhalbierenden senkrecht, da w den Pol von e enthält. Außerdem ist e sowohl zu h_1 als auch zu h_2 orthogonal, wegen $<< H_1, H_2 >> \subset e$. Zu den Ebenen w und e im nichteuklidischen Raum gehören zwei Hyperebenen im Vektorraum $\mathbf{R^4}$, die wir mit denselben Buchstaben bezeichnen. Die Hyperebenenspiegelungen an w bzw. e sind erklärt durch

$$\sigma_w \quad : \quad x \mapsto x - 2\frac{< x, W >}{||W||^2} W\,, \tag{40}$$

$$\sigma_e \quad : \quad x \mapsto x - 2\frac{< x, E >}{||E||^2} E\,. \tag{41}$$

Sei schließlich $F = \sigma_w \circ \sigma_e$, sowie $f = \mathcal{P}(F)$ die dem linearen Isomorphismus F assoziierte Projektivität. Bemerke, daß f eine eigentliche elliptische bzw. hyperbolische Bewegung ist, weil Spiegelungen die Form $<,>$ invariant lassen und die Hintereinanderschaltung von zwei Hyperebenenspiegelungen orientierungserhaltend ist.

Behauptung: $f(h_1) = h_2$,und $f(h_2) = h_1$.

Beweis: Es werde ohne Beschränkung der Allgemeingültigkeit $||E|| = 1$ vorausgesetzt. Beachte als Erstes, daß $\sigma_w(E) = E$ ist. Sodann berechnen wir $F(z)$, z zunächst noch beliebig:

$$\begin{aligned}
F(z) &= \sigma_w(\sigma_e(z)) \\
&= \sigma_w(z - 2 < z, E > E) \\
&= \sigma_w(z) - 2 < z, E > E \\
&= z - 2\frac{< z, W >}{||W||^2}W - 2 < z, E > E\,.
\end{aligned}$$

Um etwa den ersten Teil der Behauptung zu beweisen, genügt es, $F(p) \in h_2$ zu zeigen für alle Vektoren („Punkte") aus der Hyperebene h_1. Nun bedeutet $p \in h_1$ dasselbe wie $< p, H_1 >= 0$, und es ist also $< F(p), H_2 >= 0$ zu zeigen.

$$F(p) = p - 2\frac{< p, H_2 >}{||W||^2}W - 2 < p, E > E$$

$\Rightarrow$

$$\begin{aligned}
< F(p), H_2 > &= < p, H_2 > -2\frac{< p, H_2 >}{||W||^2} < W, H_2 > \\
&= < p, H_2 > (1 - 2\frac{< W, H_2 >}{||W||^2})\,.
\end{aligned}$$

Wegen

$$\begin{aligned}
||W||^2 &= ||H_1 + H_2||^2 \\
&= < H_1 + H_2, H_1 + H_2 > \\
&= 2(1+ < H_1, H_2 >)
\end{aligned}$$

gilt $\frac{1}{2}||W||^2 = 1+ < H_1, H_2 >$.
Weiter ist $< W, H_2 >=< H_1 + H_2, H_2 >= 1+ < H_1, H_2 >$. Es folgt also $< F(p), H_2 >= 0$, d.h. $F(p) \in h_2$. Aus Dimensionsgründen muß daher $F(h_1) = h_2$ sein, und wegen der Symmetrie der Gleichungen kann man sofort weiterschließen, daß auch $F(h_2) = h_1$ gilt. □

Wir können mithin eine eigentliche elliptische bzw. hyperbolische Bewegung f angeben, welche die Eigenschaft hat, die beiden Ebenen h_1 und h_2 zu vertauschen. Um die Keil- Kerbe- Invarianz als gültig zu erweisen, brauchen wir noch einen stetigen Übergang von der identischen Abbildung zur besagten nichteuklidischen Bewegung f. Dies geschieht dadurch, daß die Existenz eines stetigen Weges $c : [o, 1] \mapsto Bew^+(Ell_3)$ bzw. $Bew^+(Hyp_3)$ mit $c(o) = id$, $c(1) = f$ nachgewiesen wird. Die Behauptung folgt im elliptischen Fall unmittelbar aus der Tatsache, daß $SO(4)$ wegzusammenhängend ist. Im hyperbolischen Fall läßt sich diese Schlußweise nicht unmittelbar übertragen, denn $SO(1,3)$ ist noch nicht einmal zusammenhängend.[36] Beachte aber, das sich die hyperbolische Bewegungsgruppe als Bild der *orthochronen Lorentzgruppe* $SO^+(1,3)$ unter dem

[36] Es gilt genauer: $SO(1,3)$ zerfällt in vier Zusammenhangskomponenten.

kanonischen Gruppenhomomorphismus $\mathcal{P}$ darstellen läßt: Der lineare Isomorphismus $-Id$ ist nämlich aus $SO(1,3)$ und wird unter $\mathcal{P}$ auf die Identität in Hyp_3 abgebildet. Falls ein $F \in SO(1,3)$ noch nicht orthochron sein sollte, so multipliziere man F mit $-Id$.

Nun gilt aber der Satz, daß die orthochrone Lorentzgruppe zusammenhängend ist.[37] Weil aber die Gruppen $O(1,3)$, $SO(1,3)$, $SO^+(1,3)$ alle topologische Mannigfaltigkeiten sind, stimmen die Begriffe „zusammenhängend“ und „wegzusammenhängend“ überein.
Offenbar ist $SO^+(1,3)$ die Zusammenhangskomponente der Identität. Wegen der Stetigkeit der Abbildung $\mathcal{P}$ folgt nun die Behauptung.

[37] Siehe z.B. [Sexl, 1982], S. 125 f.

5 Kritik der Janichschen Arbeit

Wir haben gesehen, daß sich entgegen der Auffassung Janichs die Euklidizität nicht durch das Bestehen der Keil- Kerbe- Invarianz auszeichnen läßt. Ferner müssen die Beweise sowohl zur Rechts- Links- Invarianz als auch zur Öffnungswinkelunabhängigkeit fehlerhaft sein, da diese Sätze in den Kleinschen Modellen verletzt sind, während doch die KKI, mit deren Hilfe Janich die Sätze meint bewiesen zu haben, in den Kleinschen Modellen gilt!
Ferner läßt sich sagen: Im Rahmen derjenigen mathematischen Theorie, welche genau die euklidische und die beiden nichteuklidischen Geometrien umfaßt,[38] ist das Parallelenaxiom äquivalent zu jeder der drei Eindeutigkeitsaussagen: „Drehinvarianz", „Translationsinvarianz" und „Öffnungswinkelunabhängigkeit".

Wir nehmen an, daß Janich, wenn er von absoluter Geometrie redet, genauer gesagt die „absolute Protogeometrie" meint, wie sie in Lorenzens Buch „Elementargeometrie. Das Fundament der analytischen Geometrie" ([Lorenzen, 1984]) gegeben ist. Schließlich beruft er sich auf eben dieses Buch, indem er auf Seite 68 f. von [Janich, 1992] schreibt:

> „Inzwischen ist das Programm einer protophysikalischen Geometriebegründung nicht nur weiterentwickelt worden, sondern es liegen in den Büchern von Rüdiger Inhetveen [39] und Paul Lorenzen [sc. das o.g. Buch „Elementargeometrie"] zwei Ausarbeitungen des Programms vor." Und: „Wie in der Literatur bisher behandelt, kann ... die absolute Geometrie operativ begründet werden."[40]

Im Unterschied zur absoluten Geometrie im Sinne von Hilbert sind Stetigkeit und Kongruenz keine Grundbegriffe der absoluten Protogeometrie:

> „Die Sätze, die wir in der Protogeometrie nach der Definition von Ebenen und Geraden in §3 begründet haben, werden in der üblichen, an Aristoteles orientierten axiomatischen Behandlung der Geometrie, Sätze der absoluten Orthogonalgeometrie genannt ... 'Absolut' heißt hier: unabhängig von der Frage, ob die Euklidischen Parallelensätze zu begründen sind (insbesondere das 'Parallelenaxiom' aus Euklid *I*). Die in Kap. *I* – ab §3 – begründeten Sätze heißen Sätze der Orthogonalgeometrie, weil als 'Grundbegriffe', mit

[38] Wir dürfen von „der" euklidischen Geometrie und von „den"nichteuklidischen Geometrien reden, denn sowohl das Hilbertsche Modell $\mathbf{R}^3$ für die euklidische als auch die Kleinschen Modelle der elliptischen bzw. hyperbolischen Geometrie sind vollständig oder kategorisch: Das heißt, jedes andere Modell, welches entweder die Hilbertschen Axiome oder eins der beiden metrisch- projektiven Axiomensysteme Felix Kleins erfüllt, ist zu dem Standardmodell der euklidischen bzw. elliptischen bzw. hyperbolischen Geometrie isomorph.

[39] R. Inhetveen, Konstruktive Geometrie ([Inhetveen, 1983]).

[40] [Janich, 1992], S. 73.

denen dort über die Grundelemente (Ebenen, Geraden und Punkte) gesprochen wird, nur Inzidenz, Anordnung und Orthogonalität gebraucht werden"([Lorenzen, 1984], S.71).

Dabei ergibt sich aber folgendes Problem: Um die Euklidizität zu etablieren, macht Janich (S. 76) den Schluß von der Aussage „Die Winkelsumme im Dreieck ist gleich zwei Rechten" zu „Es gilt das Euklidische Parallelenaxiom". Dieser Schluß ist aber nur dann gerechtfertigt, wenn erstens das Archimedische Axiom, und zweitens über die Orthogonalitätsrelation hinaus auch alle Kongruenzaxiome Hilberts gültig sind.[41]
Ein Gegenbeispiel stellt die semieuklidische Geometrie von M. Dehn dar.[42] In dieser nichtarchimedischen Geometrie gelten sämtliche Inzidenz-, Anordnungs- und Kongruenzaxiome Hilberts, mithin auch alle Sätze der absoluten Protogeometrie; ferner ist die Winkelsumme im Dreieck in der semieuklidischen Geometrie gleich zwei Rechten Winkeln, ohne daß das Euklidische Parallelenaxiom gelten würde.

Janich hat aber in seiner Arbeit weder Kongruenz noch Archimedizität zur Verfügung. Vielmehr unternimmt er in späteren Aufsätzen den Versuch, das Archimedische Axiom sowie die Streckenkongruenz gerade erst mithilfe des Euklidischen Parallelenaxiom zu rekonstruieren.[43] Als Kritik ist hier zusätzlich zu vermerken, daß aufgrund der Unabhängigkeit der Stetigkeitsaxiome (Gruppe V) von allen anderen Hilbertschen Axiomen der euklidischen Geometrie es nicht sein kann, daß man die Archimedizität aus den übrigen Axiomen beweist. Da aber die protogeometrischen Grundrelationen Inzidenz, Anordnung, Orthogonalität sowie das Parallelenaxiom durch das System der euklidischen Geometrie bei Hilbert miterfaßt werden, kann man den Schluß ziehen: In der Janichschen Protogeometrie läßt sich das Archimedische Axiom nicht beweisen.

[41] Bekanntlich folgt aus Hilbert $I1-3$, II, III alles, was auch die absolute Protogeometrie an Sätzen enthält, insbesondere die Orthogonalitätsrelation und ihre charakteristischen Eigenschaften.

[42] Siehe [Dehn, 1900].

[43] Siehe [Janich, 1997], S. 121 f., wo mithilfe der fortgesetzten „Diagonalteilung" eines Parallelogramms eine konstruktive Form des Archimedischen Axioms herzuleiten versucht wird. Vgl. P. Janich, Grenzen der Naturwissenschaft. Erkennen als Handeln. München 1992, S. 37-38; insbesondere Abb. 4 auf S. 38.

6 Das Formprinzip und die semieuklidische Geometrie

Aber auch der Weg Lorenzens/ Inhetveens, via Formprinzips zur euklidischen Geometrie zu gelangen, birgt Probleme. Das Formprinzip läßt sich in die Aussage übersetzen, daß es zu jeder Figur ähnliche nicht kongruente Figuren gibt. Im Rahmen des Axiomensystems Hilbert $I(1-3)$, II, III ist jedoch die Behauptung „Es existieren ähnliche nichtkongruente Dreiecke“ eine echte Abschwächung des Euklidischen Parallelenaxioms. Man kann zeigen, daß in einer ebenen Geometrie mit den Axiomen I bis III folgende Aussagen äquivalent sind: „Die Winkelsumme im Dreieck ist gleich zwei Rechten Winkeln“; „Es gibt ähnliche nichtkongruente Dreiecke“; „Es gibt ein Rechtseit, d.h. ein Viereck mit vier Rechten Winkeln“. [44]
Erst die Hinzunahme des Archimedischen Axioms stellt sicher, daß diese drei untereinander äquivalenten Aussagen dem Parallelenaxiom von Euklid gleichwertig werden ([Bachmann, 1964]).
Da aber die Orthogonalgeometrie jedenfalls durch das Hilbertsche System miterfaßt wird, so folgt: Das Formprinzip allein erlaubt noch keine Auszeichnung der euklidischen Geometrie.

Man erkennt dies wiederum an der Existenz der semieuklidischen Ebene Dehns. Wir wollen daher die Dehnschen Resultate mit unseren Mitteln rekonstruieren; dazu haben wir zunächst zu zeigen, daß die semieuklidische Geometrie Modell einer Hilbert- Ebene ist.

6.1 Hilbert- Ebenen

Wir erinnern zunächst an das Hilbertsche Axiomensystem für die ebene absolute Geometrie, d.h. für die geometrische Theorie, welche durch die Axiome $I1-3$, II, III in den „Grundlagen der Geometrie“ gegeben wird.

I (Axiome der Inzidenz)

I 1. Zu zwei Punkten A und B gibt es stets eine Gerade g, die mit jedem der beiden Punkte zusammengehört.

I 2. Zu zwei Punkten A, B gibt es nicht mehr als eine Gerade, die mit jedem der beiden Punkte A, B zusammengehört.

I 3. Auf einer Geraden gibt es stets wenigstens zwei Punkte. Es gibt wenigstens drei Punkte, die nicht auf einer Geraden liegen.

[44] Siehe [Bachmann, 1964], S. 173 f.

II (Axiome der Anordnung)

II 1. Wenn B zwischen A und C liegt, so sind A, B, C drei verschiedene Punkte einer Geraden, und B liegt dann auch zwischen C und A.

II 2. Zu zwei Punkten A und C gibt es stets wenigstens einen Punkt B auf der Geraden AC, so daß C zwischen A und B liegt.

II 3. Unter irgend drei Punkten einer Geraden gibt es nicht mehr als einen, der zwischen den beiden anderen liegt.

II 4 (Axiom von Pasch) Es seien A, B, C drei nicht kollineare Punkte und g eine Gerade, die keinen der Punkte A, B, C trifft: wenn dann die Gerade g durch einen Punkt der Strecke AB geht, so geht sie gewiß auch durch einen Punkt der Strecke AC oder durch einen Punkt der Strecke BC.

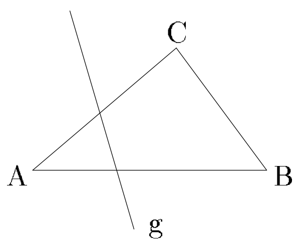


Abbildung 13: Das Axiom von Pasch

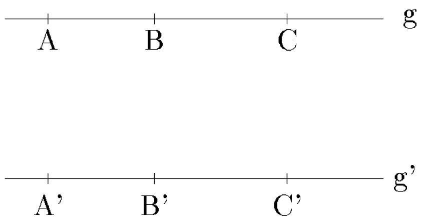
III (Axiome der Kongruenz)

III 1. Wenn A, B zwei Punkte einer Geraden g und ferner A' ein Punkt auf derselben oder einer anderen Geraden g' ist, so kann man auf einer gegebenen Seite der Geraden g' von A' stets einen Punkt B' finden, so daß die Strecke AB der Strecke A'B' kongruent ist, in Zeichen: AB $\equiv$ A'B'.

III 2. Wenn eine Strecke A'B' und eine Strecke A"B" derselben Strecke AB kongruent sind, so ist auch die Strecke A'B' der Strecke A"B" kongruent.

III 3. Es seien AB und BC zwei Strecken ohne gemeinsame Punkte auf der Geraden g und ferner A'B' und B'C' zwei Strecken auf derselben oder einer anderen Geraden g' ebenfalls ohne gemeinsame Punkte;
wenn dann AB $\equiv$ A'B' und BC $\equiv$ B'C' ist, so ist auch AC $\equiv$ A'C'.

III 4. Es sei ein Winkel $\angle$(h,k) und eine Gerade g sowie eine bestimmte Seite von g gegeben. Es bedeute h' einen Halbstrahl der Geraden g, der vom Punkt



O ausgeht: dann gibt es genau einen Halbstrahl k', so daß der Winkel $\angle$(h,k) kongruent oder gleich dem Winkel $\angle$(h',k') ist und zugleich alle inneren Punkte des Winkels $\angle$(h',k') auf der gegebenen Seite von g liegen.

Jeder Winkel ist sich selbst kongruent, d.h. es ist stets $\angle$(h,k) $\equiv$ $\angle$(h,k).

III 5. Wenn für zwei Dreiecke ABC und A'B'C' die Kongruenzen AB $\equiv$ A'B', AC $\equiv$ A'C', $\angle$BAC $\equiv$ $\angle$B'A'C' gelten, so ist auch stets die Kongruenz $\angle$ABC $\equiv$ $\angle$A'B'C' erfüllt.

Wir wollen, um einen prägnanten Ausdruck parat zu haben, die mit diesen Axiomen erfaßten ebenen Geometrien auch „Hilbert- Ebenen“ nennen.

6.1.1 Verschiedene Anmerkungen.

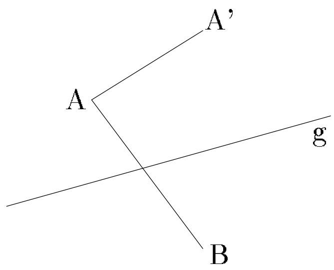
Erklärung: Seien A und B zwei Punkte einer Geraden g; wir nennen das System der beiden Punkte A und B eine *Strecke* und bezeichnen sie mit AB oder mit BA. Die Punkte zwischen A und B heißen Punkte der Strecke AB oder auch innerhalb der Strecke AB gelegen; die Punkte A, B heißen Endpunkte der Strecke AB. Alle übrigen Punkte der Geraden g heißen außerhalb der Strecke AB gelegen.

Definition der *Seite auf einer Geraden von einem Punkt* :
Es seien A, A', O, B vier Punkte einer Geraden g, so daß O zwischen A und B, aber nicht zwischen A und A' liegt; dann sagen wir:
die Punkte A, A' liegen in g auf ein und derselben Seite vom Punkt O, und die Punkte A, B liegen in g auf verschiedenen Seiten vom Punkt O.

Die sämtlichen auf ein und derselben Seite von O gelegenen Punkte der Geraden g heißen auch ein von O ausgehender *Halbstrahl*; somit teilt jeder Punkt einer Geraden diese in zwei Halbstrahlen. Dies folgt daraus, daß die Relation „A liegt auf derselben Seite auf g von O aus wie B“ eine Äquivalenzrelation auf $g \setminus \{O\}$ ist. Es gibt genau zwei Äquivalenzklassen s_A, s_B (wenn für die Punkte A und B gilt, daß O zwischen ihnen liegt). Man hat also $g = \{O\} \cup s_A \cup s_B$.

Definition der *Seite einer Geraden*:
Jede Gerade trennt die nicht auf ihr liegenden Punkte der Ebene in zwei Gebie-

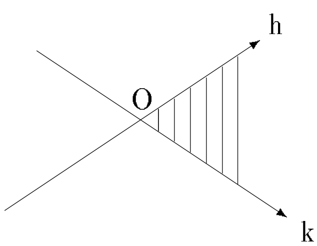
te von folgender Beschaffenheit: ein jeder Punkt A des einen Gebietes bestimmt mit jedem Punkt B des anderen Gebietes eine Strecke AB, innerhalb deren ein Punkt der Geraden g liegt; dagegen bestimmen irgend zwei Punkte A und A' ein und desselben Gebietes eine Strecke AA', welche keinen Punkt von g enthält. Erklärung: Wir sagen: die Punkte A, A' liegen auf ein und derselben Seite der Geraden g, und die Punkte A, B liegen in der Ebene auf verschiedenen Seiten der Geraden g. Wir haben also wiederum eine Äquivalenzrelation, diesmal „A liegt auf derselben Seite von g wie B", und es gibt die beiden Äquivalenzklassen S_A, S_B (wo für A und B gilt, daß die Strecke AB g trifft). Dadurch bekommt man eine Partition von K^2: $K^2 = \{g\} \cup S_A \cup S_B$.



Erklärung: h, k seien zwei von O ausgehende Halbstrahlen, die verschiedenen Geraden angehören; das System dieser beiden Halbstrahlen h, k nennen wir einen *Winkel*, Notation $\angle$(h,k) oder $\angle$(k,h). Die Halbstrahlen h, k heißen *Schenkel* des Winkels, und der Punkt O der *Scheitel*.

Bemerkung: Gestreckte und überstumpfe Winkel sind nach dieser Definition ausgeschlossen.

Definition des *Inneren eines Winkels*:
Die Halbstrahlen h und k, zusammengenommen mit dem Punkt O, teilen die übrigen Punkte der Ebene in zwei Gebiete ein: alle Punkte, die mit h auf der gleichen Seite der Trägergeraden $\bar{k}$ und mit k auf der gleichen Seite von $\bar{h}$ liegen, heißen im *Innern* des Winkels $\angle$(h,k) gelegen; alle anderen Punkte heißen im Äußeren oder außerhalb dieses Winkels gelegen.



Erklärung: Ein Winkel mit Scheitel B, auf dessen beiden Schenkeln je ein

Punkt A und C liegt, wird auch mit $\angle$ ABC bezeichnet.

6.2 Ebene analytische Geometrie

Sei K ein kommutativer angeordneter pythagoräischer Körper. Darunter versteht man Folgendes: Die Multiplikation in K ist kommutativ. Ferner gibt es auf K eine binäre Relation $<$ (lies „kleiner als“), wobei die nachstehenden Anordnungsaxiome gelten sollen:

A.1 Für jedes x $\in$ K gilt genau eine der drei Beziehungen $x > 0$, $x = 0$, $x < 0$.
A.2 $x > 0, \quad y > 0 \quad \Rightarrow \quad x + y > 0.$
A.3 $x > 0, \quad y > 0 \quad \Rightarrow \quad x \cdot y > 0.$

Gleichwertig zu dieser relationstechnischen Beschreibung der Anordnung ist folgende mengentheoretische:
Ein Körper K heißt angeordnet mit *Positivbereich* Π $(0 \notin \Pi)$, wenn
1. Π eine Unterstruktur von K ist, d.h. $a, b \in \Pi \Rightarrow a + b \in \Pi$, $a \cdot b \in \Pi$;
2. für jedes $a \in K$ gilt genau eine der Beziehungen $a = 0$, $a \in \Pi$, $-a \in \Pi$.
Man sagt, durch Π sei eine Anordnung von K gegeben. Die Elemente von Π heißen positiv bzgl. der Anordnung.
Π enthält stets die sämtlichen Quadrate $a^2 \neq 0$ $(a \in K)$; insbesondere $1 \in \Pi$.

Schließlich besagt der Ausdruck „pythagoräisch“, daß K zu a und b auch stets ein c mit $a^2+b^2 = c^2$ enthält, und daß -1 nicht Quadrat in K ist. Offenbar ist die erste Bedingung gleichbedeutend mit der Forderung: $1 + a^2$ ist Quadrat in K für alle Elemente a von K.[45]

Wir erklären nun die ebene analytische Geometrie K^2 über dem (kommutativen) angeordneten pythagoräischen Körper K wie folgt:
Die Punkte des K^2 sind die geordneten Tupel (x,y) aus Elementen x, y von K. Die Zahlen x, y heißen „Koordinaten“ des Punktes. Die Gesamtheit aller Punkte, deren Koordinaten einer linearen Gleichung

$$ax + by + c = 0$$

genügen, wo a, b nicht beide gleich 0 sind, heißt eine Gerade; natürlich sind dabei a, b, c nur bis auf einen gemeinsamen Proportionalitätsfaktor bestimmt. Man erkennt leicht, daß die Punkte der Geraden $ax + by + c = 0$ identisch sind mit der Gesamtheit der Punkte

$$(x_0 + bt, y_0 - at)\,; \quad t \in K\,,$$

wenn (x_0, y_0) ein beliebiger Punkt auf der Geraden ist. Bei dieser Darstellung heißt t der Parameter des Punktes der Geraden.

[45] Dafür, daß der Körper K pythagoräisch ist, ist also hinreichend: Für alle $a \in K$ ist $1 + a^2$ Quadrat eines Elementes $\neq 0$ aus K.

Wir können jetzt für die Punkte einer Geraden eine Anordnung festlegen, indem wir sagen, der Punkt mit dem Parameterwert t liegt zwischen den Punkten mit den Parameterwerten t_1 und t_2, wenn t zwischen t_1 und t_2 liegt. Dieser Zwischenbegriff ist dann unabhängig davon, welchen Punkt (x_0, y_0) auf der Geraden wir ausgewählt haben und mit welchem Proportionalitätsfaktor a und b behaftet sein mögen.
Von den beiden Halbstrahlen, welche durch den Punkt (x_0, y_0) definiert werden, besteht der eine aus den Punkten mit $t > 0$, der andere aus den Punkten mit $t < 0$.
Von den durch die Gerade erzeugten Halbebenen ist die eine die Menge der Punkte, für welche $ax+by+c > 0$ ist, und die andere die, für welche $ax+by+c < 0$ ist.

Wir definieren: Zwei Strecken P_0P_1, P_2P_3 sollen kongruent heißen, in Zeichen $P_0P_1 \equiv P_2P_3$, wenn

$$\sqrt{(x_0 - x_1)^2 + (y_0 - y_1)^2} = \sqrt{(x_2 - x_3)^2 + (y_2 - y_3)^2}\,.$$

Bemerke, daß die in der Definition der Streckenkongruenz vorkommenden Ausdrücke wohldefiniert sind, da K als pythagoräisch vorausgesetzt war.

Nun seien

$$\begin{aligned} g_1 &= \{(x_0 + b_1t, y_0 - a_1t)/t > 0\}\,, \\ g_2 &= \{(x_0 + b_2t, y_0 - a_2t)/t > 0\} \end{aligned}$$

zwei Halbstrahlen mit dem gemeinsamen Anfangspunkt (x_0, y_0); d.h. g_1 und g_2 sind die Schenkel, und (x_0, y_0) ist der Scheitel des Winkels $\angle(g_1, g_2)$. Die Halbstrahlen g_1 resp. g_2 mögen die Trägergeraden $\bar{g}_1$ resp. $\bar{g}_2$ besitzen ($\bar{g}_1$ hat offenbar die Gleichung $a_1\,(x - x_0) + b_1\,(y - y_0) = 0$; Entsprechendes gilt für $\bar{g}_2$). Wir greifen uns aus g_1 den Punkt $P = (x_0 + b_1, y_0 - a_1)$ heraus; dann liegt P auf einer bestimmten Seite von $\bar{g}_2$, d.h. es ist $(a_2b_1 - a_1b_2)$ größer oder kleiner Null. Unser Ziel ist es, das Innere des Winkels $\angle(g_1, g_2)$ algebraisch zu beschreiben. Ein beliebiger Punkt $R = (x, y)$ der Ebene liegt genau dann auf der „richtigen" Seite von $\bar{g}_2$, wenn der Ausdruck $a_2(x-x_0)+b_2(y-y_0)$ dasselbe Vorzeichen hat wie $a_2b_1 - a_1b_2$. Also liegt R auf der richtigen Seite von $\bar{g}_2$, wenn

$$\frac{a_2(x - x_0) + b_2(y - y_0)}{a_2b_1 - a_1b_2} > 0\,.$$

Analog liegt R auf der „richtigen" Seite von $\bar{g}_1$, wenn

$$\frac{a_1(x - x_0) + b_1(y - y_0)}{b_2a_1 - b_1a_2} > 0\,.$$

Das Innere des Winkels $\angle(g_1, g_2)$ ist damit gegeben durch die Gesamtheit der Punkte (x,y), für welche gilt:

$$\frac{a_1(x-x_0)+b_1(y-y_0)}{b_2a_1-b_1a_2} > 0\,,$$
$$\frac{a_2(x-x_0)+b_2(y-y_0)}{a_2b_1-a_1b_2} > 0\,.$$

Man weist zunächst nach, daß dies genau die Punkte mit den Koordinaten

$$\begin{aligned} x &= x_0+b_1\lambda+b_2\mu\,, \\ y &= y_0-a_1\lambda-a_2\mu\,; \quad \lambda>0\,,\ \mu>0 \end{aligned}$$

sind: Habe der Punkt R = (x,y) diese Form; setzt man dann die Koordinaten von R in die beiden Ausdrücke $a_1(x-x_0)+b_1(y-y_0)$ bzw. $a_2(x-x_0)+b_2(y-y_0)$ ein, so erhält man

$$\begin{aligned} a_1(x-x_0)+b_1(y-y_0) &= (a_1b_2-a_2b_1)\mu\,; \\ a_2(x-x_0)+b_2(y-y_0) &= (b_1a_2-a_1b_2)\lambda\,. \end{aligned}$$

Daher gilt

$$\begin{aligned} \frac{a_1(x-x_0)+b_1(y-y_0)}{b_2a_1-b_1a_2} &> 0 \Leftrightarrow \mu>0\,; \\ \frac{a_2(x-x_0)+b_2(y-y_0)}{b_1a_2-a_1b_2} &> 0 \Leftrightarrow \lambda>0. \end{aligned}$$

Wir erklären schließlich die Winkelkongruenz in unserer analytischen Geometrie über K: Sei neben $\angle(g_1, g_2)$ noch ein Winkel $\angle(h, k)$ gegeben, etwa in Form von

$$\begin{aligned} h &= \{(u_0+d_1t, v_0-c_1t)/t>0\}\,, \\ k &= \{(u_0+d_2t, v_0-c_2t)/t>0\}\,. \end{aligned}$$

Dann definieren wir:

$$\angle(g_1,g_2) \equiv \angle(h,k) \quad :\Leftrightarrow \quad \frac{a_1a_2+b_1b_2}{\sqrt{a_1^2+b_1^2}\sqrt{a_2^2+b_2^2}} = \frac{c_1c_2+d_1d_2}{\sqrt{c_1^2+d_1^2}\sqrt{c_2^2+d_2^2}}\,.$$

Wir zeigen, daß unter diesen Voraussetzungen in der analytischen Geometrie K^2 die oben angegebenen Hilbertschen Axiome erfüllt sind: [46]

[46] Wir benutzen für den Beweis die im Buch „Nichteuklidische Elementargeometrie der Ebene"([Perron, 1962] von O. Perron skizzierten Beweistechniken (ebd., §54 Die Widerspruchsfreiheit der euklidischen Geometrie). Allerdings weicht die Zielsetzung Perrons von unserer in zweifacher Hinsicht ab: Zum einen operiert er nicht mit demselben Axiomensystem wie wir, und zweitens ist bei ihm K auf den reellen Zahlkörper spezialisiert.

Wir finden zunächst, wenn zwei Punkte $P_1 = (x_1, y_1)$, $P_2 = (x_2, y_2)$ gegeben sind, eine Verbindungsgerade in Form von
$(y_1 - y_2)x + (x_2 - x_1)y + (x_1y_2 - x_2y_1) = 0$.
Bis auf einen gemeinsamen Proportionalitätsfaktor der Koeffizienten ist dies die einzige Verbindungsgerade; das heißt aber, daß die Gerade durch zwei verschiedene Punkte eindeutig bestimmt ist.

Jede Gerade $ax + by + c = 0$ enthält auch mindestens 2 Punkte: Sei ohne Einschränkung $a \neq 0$; dann liegen die Punkte $(-\frac{c}{a}, 0)$ und $(\frac{ab-c}{a}, -a)$ auf ihr. Schließlich gibt es drei nicht kollineare Punkte, etwa (0,0), (1,0) und (0,1).

Die Lineare Algebra lehrt, daß die Verbindungsgerade zweier Punkte $P_1 = (x_1, y_1)$ und $P_2 = (x_2, y_2)$ aus allen Punkten der Form

$$(\lambda x_1 + (1 - \lambda)x_2, \lambda y_1 + (1 - \lambda)y_2), \quad \lambda \in K.$$

besteht. Wir benutzen dafür auch die Kurzschreibweise $\lambda P_1 + (1 - \lambda)P_2$.
Speziell die Punkte innerhalb der Strecke P_1P_2, d.h. die Punkte zwischen P_1 und P_2, erhält man für $0 < \lambda < 1$.

Aus der Definition folgt unmittelbar, daß wenn P_2 zwischen P_0 und P_1 liegt, diese drei Punkte kollinear sind. Daß dann P_2 auch zwischen P_1 und P_0 liegt, folgt aus der Tatsache, daß $0 < \lambda < 1$ die Ungleichung $0 < 1 - \lambda < 1$ impliziert.

Zu zwei Punkten P_0, P_1 gibt es mindestens einen Punkt P_2 auf der Geraden P_0P_1 derart, daß P_1 zwischen P_0 und P_2 liegt:
Beachte dazu, daß $2 = 1 + 1$ nicht zwischen 0 und 1 liegt und auch von 0 und 1 verschieden ist (wegen der Anordnung von K); wähle $\lambda = 2$.

Wir zeigen jetzt: Von drei Punkten P_1, P_2, P_3 liegt höchstens einer zwischen den beiden anderen.

Sind die drei Punkte nicht kollinear, so hat man nichts zu zeigen; andernfalls ist $\lambda P_0 + (1 - \lambda)P_1$ eine mögliche Beschreibung der Geraden, auf welcher die Punkte liegen.
Macht man dementsprechend für P_2 den Ansatz $P_2 = \lambda P_0 + (1 - \lambda)P_1$,so hat dann die drei Fälle zu unterscheiden: Fall (1): $\lambda < 0$; Fall (2): $0 < \lambda < 1$; Fall (3): $\lambda > 1$.
Liege etwa Fall (1) vor, d.h. P_2 liegt nicht zwischen P_0 und P_1. Wir zeigen, daß auch P_0 nicht zwischen P_2 und P_1 liegt:

Wir nehmen das Gegenteil an, d.h. es gebe ein μ mit $0 < \mu < 1$, so daß $P_0 = \mu P_2 + (1 - \mu)P_1$; daraus folgte $P_2 = \frac{1}{\mu}P_0 + (1 - \frac{1}{\mu})P_1$. Setzt man hierin $\lambda := \frac{1}{\mu}$, so erhielte man also die Gleichung $P_2 = \lambda P_0 + (1 - \lambda)P_1$ mit einem positiven λ, im Widerspruch zur Voraussetzung.

Es kann also höchstens einer der drei Punkte zwischen den beiden anderen liegen. Analog zeigt man im Fall (3) (der jedenfalls beinhaltet, daß P_2 nicht zwischen P_0 und P_1 liegt), daß auch P_1 nicht zwischen P_0 und P_2 liegen kann. Schließlich weist man in Fall (2), welcher ja gerade besagt, daß P_2 zwischen P_0 und P_2 zu liegen kommt, nach, daß keine der beiden Aussagen: „P_1 liegt zwischen P_0 und P_2“, „P_0 liegt zwischen P_1 und P_2“ wahr ist.

In der analytischen Geometrie K^2 gilt das Axiom von Pasch:
Gegeben seien drei nicht kollineare Punkte $P_1 = (x_1, y_1)$, $P_2 = (x_2, y_2)$, $P_3 = (x_3, y_3)$ (m.a.W., die genannten Punkte bilden ein Dreieck, dessen Seiten durch die drei Verbindungsstrecken P_1P_2, P_2P_3 und P_3P_1 bestimmt sind); ferner eine Gerade g mit der Gleichung $ax + by + c = 0$, die jedoch keinen der drei Punkte enthalten soll. Das bedeutet,

$$\xi_k = ax_k + by_k + c \neq 0\,; \quad k = 1, 2, 3\,.$$

Ohne Einschränkung werde angenommen, daß g durch einen Punkt der Strecke P_1P_2 geht. Das heißt, für den Schnittpunkt gilt $\lambda P_1 + (1-\lambda)P_2$ mit einem λ zwischen 0 und 1. Wir müssen zeigen, daß g noch eine andere Dreiecksseite trifft.
Wenn nun etwa $\xi_3 = \xi_2$ ist, so wird die Gleichung $\nu\,\xi_3 + (1-\nu)\xi_1 = 0$ mit $\nu = 1 - \lambda$ erfüllt; daraus folgt, daß der Punkt $\nu\,P_3 + (1-\nu)P_1$ auf g liegt, d.h. g trifft die Strecke P_3P_1. Analog ist es im Falle $\xi_1 = \xi_3$: die Gleichung $\mu\,\xi_2 + (1-\mu)\xi_3$, welche dann durch $\mu = 1-\lambda$ befriedigt wird, impliziert nämlich, daß der Punkt $\mu\,P_2 + (1-\mu)P_3$ mit g inzidiert. In den übriggebliebenen Fällen gilt also $\frac{\xi_2}{\xi_3} \neq 1$ und $\frac{\xi_3}{\xi_1} \neq 1$.
Bemerke: jede von 1 verschiedene Zahl a aus K läßt sich in der Form $a = \frac{1-b}{b}$ mit einem b $\in$ K schreiben. Mit anderen Worten, wir dürfen den Ansatz

$$\xi_2 + \frac{1-\mu}{\mu}\xi_3 \quad = \quad 0 \tag{42}$$

$$\xi_3 + \frac{1-\nu}{\nu}\xi_1 \quad = \quad 0 \tag{43}$$

machen. Beachte, daß nach Voraussetzung g die Strecke P_1P_2 trifft, woraus man unmittelbar auf die Gültigkeit der Gleichung

$$\xi_1 + \frac{1-\lambda}{\lambda}\xi_2 = 0\,; \quad 0 < \lambda < 1 \tag{44}$$

schließt. Aus (42), (43) und (44) leitet man dann ab:

$$-1 = \frac{1-\lambda}{\lambda}\,\frac{1-\mu}{\mu}\,\frac{1-\nu}{\nu}\,.$$

Da nun $\frac{1-\lambda}{\lambda}$ zwischen 0 und 1 gelegen ist, folgert man daraus

$$\frac{1-\mu}{\mu}\frac{1-\nu}{\nu} < -1.$$

Gelte dann $\frac{1-\mu}{\mu} > 0$ und $\frac{1-\nu}{\nu} < 0$. Das heißt aber, daß μ zwischen 0 und 1 liegt, also auch, daß g durch einen Punkt der Srecke P_2P_3 geht. Entsprechend geht die Gerade g im Falle $\frac{1-\nu}{\nu} > 0$ und $\frac{1-\mu}{\mu} < 0$ durch einen Punkt der Strecke P_3P_1.

Zu den Kongruenzaxiomen im analytischen Modell K^2:

Zum Beweis des ersten Kongruenzaxioms (III 1.) sei eine beliebige Strecke P_0P_1 vorgegeben sowie ein Punkt $P_2 = (x_2, y_2)$ auf einer Geraden g mit der Parameterdarstellung $\{(x_2 + bt, y_2 - at)/\ t \in K\}$. Wir müssen auf g einen Punkt P_3 finden, so daß $P_0P_1 \equiv P_2P_3$ wird.
Das heißt, wir haben ein t aus K mit $x_3 = x_2 + bt$, $y_3 = y_2 - at$ zu bestimmen derart, daß

$$\begin{aligned}
\sqrt{(x_0 - x_1)^2 + (y_0 - y_1)^2} &= \sqrt{(x_2 - x_3)^2 + (y_2 - y_3)^2} \\
&= \sqrt{(b^2 + a^2)t^2} \\
&= |t|\sqrt{a^2 + b^2}\,.
\end{aligned}$$

Die beiden Lösungen für t entsprechen den zwei Seiten der Geraden g von P_2.

Die Gültigkeit von III 2. folgt sofort aus den Definitionen.

Seien nun zwei Strecken P_0P_1, P_1P_2 ohne gemeinsame Punkte auf einer Geraden g gelegen; ferner $P_0'P_1'$ und $P_1'P_2'$ Strecken einer Geraden g' ebenfalls ohne gemeinsame Punkte. Die Geraden g und g' können in den Parameterdarstellungen

$$\begin{aligned}
g &= \{(x_0 + bt, y_0 - at)/\ t \in K\}; \\
g' &= \{(x_0' + b's, y_0' - a's)/\ s \in K\}
\end{aligned}$$

vorausgesetzt werden. Dann seien $(x_1, y_1) = (x_0 + bt_1, y_0 - at_1)$, $(x_2, y_2) = (x_0 + bt_2, y_0 - at_2)$, und es gelte ohne Einschränkung $0 < t_1 < t_2$, d.h. P_1 liege zwischen P_0 und P_2. Die gleichen Verhältnisse sollen (ohne Beschränkung der Allgemeingültigkeit) für g' sowie für die gestrichenen Strecken und Koordinaten gelten.
Wir setzen voraus: $P_0P_1 \equiv P_0'P_1'$; d.h. es gilt

$$\begin{aligned}
\sqrt{b^2t_1^2 + a^2t_1^2} &= \sqrt{b'^2s_1^2 + a'^2s_1^2} \\
\Leftrightarrow t_1\sqrt{a^2 + b^2} &= s_1\sqrt{a'^2 + b'^2}\,.
\end{aligned}$$

Weiter setzen wir $P_1P_2 \equiv P_0'P_1'$ voraus, also

$$(t_2 - t_1)\sqrt{a^2 + b^2} = (s_2 - s_1)\sqrt{a'^2 + b'^2}\,.$$

Wir wollen zeigen, daß unter diesen Bedingungen auch $P_0P_2 \equiv P_0'P_2'$ gilt: Die in Rede stehende Kongruenz ist gleichbedeutend mit

$$\begin{aligned} t_2\sqrt{a^2 + b^2} &= s_2\sqrt{a'^2 + b'^2} \\ \Leftrightarrow ((t_2 - t_1) + t_1)\sqrt{a^2 + b^2} &= ((s_2 - s_1) + s_1)\sqrt{a'^2 + b'^2}\,. \end{aligned}$$

Letztere ist eine wahre Gleichung; damit haben wir III 3. bewiesen.

Wir führen die Abkürzung $e := (c_1c_2 + d_1d_2)/(\sqrt{c_1^2 + d_1^2}\sqrt{c_2^2 + d_2^2})$ ein. Ferner seien die Koeffizienten von $\bar{g}_1$ und $\bar{g}_2$ so normiert, daß $\sqrt{a_1^2 + b_1^2} = \sqrt{a_2^2 + b_2^2} = 1$ gilt. Schließlich werde ohne Einschränkung $b_1 \neq 0$ vorausgesetzt.
Wir denken uns den Winkel $\angle(h, k)$ und den von (x_0, y_0) ausgehenden Halbstrahl g_1 auf der Geraden $\bar{g}_1$ gegeben; zusätzlich eine Seite von $\bar{g}_1$ ausgezeichnet, etwa die durch $a_1(x - x_0) + b_1(y - y_0) > 0$ charakterisierte. Die Kongruenz von $\angle(g_1, g_2)$ und $\angle(h, k)$ ist damit gleichbedeutend mit der Gültigkeit der Gleichung

$$\begin{aligned} a_1a_2 + b_1b_2 &= e \\ \Rightarrow 1 &= a_2^2 + b_2^2 = \frac{b_1^2a_2^2 + (e - a_1a_2)^2}{b_1^2} \\ \Leftrightarrow b_1^2 &= b_1^2a_2^2 + e^2 - 2ea_1a_2 + a_1^2a_2^2 \\ \Leftrightarrow 0 &= (a_1^2 + b_1^2)a_2^2 - 2ea_1a_2 + (e^2 - b_1^2) \\ \Leftrightarrow 0 &= a_2^2 - 2ea_1a_2 + (e^2 - b_1^2) \\ \Leftrightarrow a_2 &= ea_1 \pm \sqrt{e^2a_1^2 - (e^2 - b_1^2)} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\Rightarrow b_2 &= \frac{e - a_1 a_2}{b_1} \\
&= \frac{e - e a_1^2 \mp a_1 b_1 \sqrt{1-e^2}}{b_1} \\
&= \frac{e(1 - a_1^2) \mp a_1 b_1 \sqrt{1-e^2}}{b_1} \\
&= \frac{e b_1^2 \mp a_1 b_1 \sqrt{1-e^2}}{b_1} \\
\Leftrightarrow & \\
b_2 &= e b_1 \mp a_1 \sqrt{1-e^2} \\
\Rightarrow & \\
g_2^{(\pm)} &= \{(x_0 + (e a_1 \pm b_1 \sqrt{1-e^2})t, y_0 - (e b_1 \mp a_1 \sqrt{1-e^2})t) /\ t > 0\}\,.
\end{aligned}$$

Wir bemerken am Ende dieser Rechnung, daß der Ausdruck $\sqrt{1-e^2}$ in K wohldefiniert ist; man erinnere sich an die Bedeutung von e und berechne den Wert für $1-e^2$. Man erhält

$$\begin{aligned}
1 - e^2 &= \frac{(c_1 d_2 - c_2 d_1)^2}{(c_1^2 + d_1^2)(c_2^2 + d_2^2)} \\
\Rightarrow \sqrt{1-e^2} &= \frac{|c_1 d_2 - c_2 d_1|}{\sqrt{c_1^2 + d_1^2}\sqrt{c_2^2 + d_2^2}}\,.
\end{aligned}$$

Die Zahl auf der rechten Seite ist aber ein Element aus dem pythagoräischen Körper K.

Wir hatten die durch $a_1(x-x_0) + b_1(y-y_0) > 0$ gegebene Seite von $\bar{g}_1$ fixiert. Aus der Definition des Inneren eines Winkels in dem Modell K^2:

$$\begin{aligned}
\frac{a_1(x-x_0) + b_1(y-y_0)}{b_2 a_1 - b_1 a_2} &> 0 \ \mathit{und} \\
\frac{a_2(x-x_0) + b_2(y-y_0)}{a_2 b_1 - a_1 b_2} &> 0
\end{aligned}$$

folgt dann, daß $b_2 a_1 - b_1 a_2 > 0$ sein muß. Daraus schließt man weiter: Für alle Punkte (x,y) aus dem Inneren des Winkels $\angle(g_1, g_2)$ ist das Bestehen der Ungleichung $a_2(x-x_0) + b_1(y-y_0) < 0$ die notwendige und hinreichende Bedingung dafür, daß g_2 nach der richtigen Seite von $\bar{g}_1$ abgetragen ist.
Daher ist (wiederum wegen der Definition des Winkelinneren) der Halbstrahl g_2 dann und nur dann richtig abgetragen, wenn $a_2 b_1 - a_1 b_2 < 0$ ist.

Nun hatten wir für g_2 zwei Lösungen bekommen. Zu jeder Lösung für g_2 gehört eine bestimmte Geradengleichung der Trägergeraden $\bar{g}_2$, je nachdem, welchen Wert für a_2 bzw. b_2 genommen wird:

$$\begin{aligned} a_2b_1 - a_1b_2 &= (ea_1 \pm b_1\sqrt{1-e^2})b_1 - a_1(eb_1 \mp a_1\sqrt{1-e^2}) \\ &= \pm(b_1^2 + a_1^2)\sqrt{1-e^2} \\ &= \pm\sqrt{1-e^2}. \end{aligned}$$

Dieser Ausdruck ist genau dann kleiner 0, wenn wir das untere Vorzeichen wählen; das heißt $g_2^{(-)}$ ist der zu nehmende Halbstrahl. Mithin ist g_2 eindeutig bestimmt, so wie es das Axiom III 4. fordert.

Aus der Definition der Winkelkongruenz folgt noch unmittelbar, daß jeder Winkel sich selbst kongruent ist. Damit haben wir das Axiom III 4. vollständig als gültig nachgewiesen.

Wir bestätigen zuletzt das Axiom III 5.: „Wenn für zwei Dreiecke ABC und A'B'C' die Kongruenzen $AB \equiv A'B'$, $AC \equiv A'C'$ und $\angle BAC \equiv \angle B'A'C'$ gelten, so ist auch stets die Kongruenz $\angle ABC \equiv \angle A'B'C'$ erfüllt."

Seien $A = (x_0, y_0)$, $B = (x_1, y_1)$, $C = (x_2, y_2)$ sowie $A' = (u_0, v_0)$, $B' = (u_1, v_1)$, $C' = (u_2, v_2)$.
Man hat

$$AB \equiv A'B' \;\Leftrightarrow\; \sqrt{(x_0-x_1)^2 + (y_0-y_1)^2} = \sqrt{(u_0-u_1)^2 + (v_0-v_1)^2} \tag{45}$$

$$AC \equiv A'C' \;\Leftrightarrow\; \sqrt{(x_0-x_2)^2 + (y_0-y_2)^2} = \sqrt{(u_0-u_2)^2 + (v_0-v_2)^2}\,. \tag{46}$$

Sei weiter $\angle BAC := \angle(\vec{AB}, \vec{AC})$ mit

$$\begin{aligned} \vec{AB} &= \{(x_0 + (x_1-x_0)t, y_0 + (y_1-y_0)t)/t > 0\}\,, \\ \vec{AC} &= \{(x_0 + (x_2-x_0)t, y_0 + (y_2-y_0)t)/t > 0\}\,. \end{aligned}$$

Entsprechend werde $\angle B'A'C' := \angle(\vec{A'B'}, \vec{A'C'})$ gebildet.

$$\angle BAC \equiv \angle B'A'C' \quad \Leftrightarrow \quad \frac{(x_1-x_0)(x_2-x_0)+(y_1-y_0)(y_2-y_0)}{\sqrt{(x_1-x_0)^2+(y_1-y_0)^2}\sqrt{(x_2-x_0)^2+(y_2-y_0)^2}} = \frac{(u_1-u_0)(u_2-u_0)+(v_1-v_0)(v_2-v_0)}{\sqrt{(u_1-u_0)^2+(v_1-v_0)^2}\sqrt{(u_2-u_0)^2+(v_2-v_0)^2}}\,. \tag{47}$$

Aus (45), (46) und (47) folgt die Beziehung

$$\begin{aligned} &(x_1-x_0)(x_2-x_0) + (y_1-y_0)(y_2-y_0) \\ &= (u_1-u_0)(u_2-u_0) + (v_1-v_0)(v_2-v_0). \end{aligned} \tag{48}$$

Sei jetzt $\angle ABC := \angle(\vec{BA}, \vec{BC})$ mit

$$\begin{aligned}\vec{BA} &= \{(x_1 + (x_0 - x_1)t, y_1 + (y_0 - y_1)t)/t > 0\}\,,\\ \vec{BC} &= \{(x_1 + (x_2 - x_1)t, y_1 + (y_2 - y_1)t)/t > 0\}\,.\end{aligned}$$

Analog werde $\angle A'B'C'$ konstruiert.

Zum Nachweis der Kongruenz von $\angle ABC$ und $\angle A'B'C'$ genügt es aufgrund von (45) zu zeigen, daß die nachstehende Gleichung gültig ist:

$$\frac{(x_0 - x_1)(x_2 - x_1) + (y_0 - y_1)(y_2 - y_1)}{\sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}} = \frac{(u_0 - u_1)(u_2 - u_1) + (v_0 - v_1)(v_2 - v_1)}{\sqrt{(u_2 - u_1)^2 + (v_2 - v_1)^2}}$$

Man darf ohne Beschränkung der Allgemeingültigkeit annehmen, daß

$$\begin{aligned}(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 &= 1 \quad und\\ (u_2 - u_1)^2 + (v_2 - v_1)^2 &= 1\,.\end{aligned}$$

Dann bleibt zu zeigen:

$$(x_0 - x_1)(x_2 - x_1) + (y_0 - y_1)(y_2 - y_1) = (u_0 - u_1)(u_2 - u_1) + (v_0 - v_1)(v_2 - v_1)\,.$$

Bemerke als Erstes, daß sich (47) folgendermaßen umschreiben läßt:

$$\begin{aligned}&(x_1 - x_0)[(x_2 - x_1) + (x_1 - x_0)] + (y_1 - y_0)[(y_2 - y_1) + (y_1 - y_0)]\\ &= (u_1 - u_0)[(u_2 - u_1) + (u_1 - u_0)] + (v_1 - v_0)[(v_2 - v_1) + (v_1 - v_0)]\,.\end{aligned}$$

Wegen der Identität (48) reduziert sich daher die Behauptung auf

$$(x_1 - x_0)^2 + (y_1 - y_0)^2 = (u_1 - u_0)^2 + (v_1 - v_0)^2\,.$$

Dies ist aber wahr wegen (45).
Damit ist auch das letzte der Hilbertschen Axiome in der analytischen Geometrie K^2 bestätigt.

6.2.1 Euklidisches Parallelenaxiom für K^2

Wir behaupten: In der analytischen Geometrie K^2 gilt das Euklidische Parallelenaxiom!

Zum Beweis sei eine Gerade g in der Gleichungsform $ax + by + c = 0$ vorgelegt; weiter sei ein Punkt $P = (p, q)$ mit $P \notin g$ gegeben.
Die Gerade h: $a(x - p) + b(y - q) = 0$ enthält den Punkt P; wir zeigen,

daß $h \cap g = \emptyset$:
Die Parameterdarstellungen der beiden Geraden seien

$$\begin{aligned} g &= \{(x_0 + bt, y_0 - at)/\ t \in K\}\,, \\ h &= \{(p + bs, q - as)/\ t \in K\}\,. \end{aligned}$$

Angenommen, $h \cap g \neq \emptyset$; dann gäbe es also Zahlen t, s aus K derart, daß

$$\begin{aligned} x_0 + bt &= p + bs\,, \\ y_0 - at &= q - as \\ &\Leftrightarrow \\ x_0 - p &= b(s - t)\,, \\ y_0 - q &= a(t - s) \\ &\Leftrightarrow \\ p &= x_0 + b\sigma\,, \\ q &= y_0 - a\sigma\,; \quad \sigma := t - s\,. \end{aligned}$$

Das heißt, es wäre $P \in g$, entgegen der Voraussetzung.
h ist auch die einzige Nichtschneidende: Sei dazu g' in der Gleichungsform $a'x + b'y + c' = 0$ gegeben; die Lineare Algebra lehrt, daß für die Parallelität von g und g' notwendig $a = \lambda a', b = \lambda b'$ mit einem λ aus K gelten muß. Daher schließt man weiter, daß g' die Parameterdarstellung $\{(p + br, q - ar)/\ r \in K\}$ haben muß (beachte $P \in g'$). Daraus folgt aber schon, daß g' mit h identisch ist.

Erinnere nun, daß in Hilbert- Ebenen der Zweite Legendresche Satz gilt. Finden wir also ein einziges Dreieck, in dem die Winkelsumme gleich zwei Rechten Winkeln ist, so ist sie in <u>jedem</u> Dreieck der Hilbert- Ebene K^2 gleich zwei Rechten Winkeln.
Nach Axiom I 3. gibt es in K^2 Dreieck(e), etwa dasjenige mit den Ecken (0,0), (0,1) und (1,0). Betrachte zu der Verbindungsgeraden zweier dieser Punkte die Parallele durch den dritten Punkt. Weil nun in Hilbert- Ebenen Wechselwinkel an Parallelen gleich sind,[47] erkennt man, daß wir ein Dreieck vor uns haben, in welchem die Winkelsumme in der Tat gleich zwei Rechten ist. Folglich ist die Winkelsumme in jedem Dreieck der analytischen Geometrie K^2 gleich zwei Rechten Winkeln.

[47] Die Umkehrung davon findet man z.B. in [Perron, 1962] bewiesen; siehe ebd., S. 23, Satz II, 12. Aus dem Satz folgt aber in Verbindung mit der Eindeutigkeitsaussage des Parallelenaxioms unsere Behauptung; vgl. [Perron, 1962], S. 28.

6.3 Konstruktion der semieuklidischen Geometrie

Von jetzt an werde der Koordinatenkörper K als *nichtarchimedisch angeordnet* vorausgesetzt. Man nennt die Anordnung eines Körpers K bekanntlich archimedisch, wenn es zu jedem a $\in$ K eine natürliche Zahl n (n ist die n- fache Summe des Einselements 1 aus K) gibt mit n > a.
Sei E die Menge der Elemente aus dem nichtarchimedischen Körper K, die *nicht unendlich groß* sind, d.h.: E besteht aus denjenigen Elementen a von K, für die es eine natürliche Zahl n mit $-n < a < n$ gibt. E ist ein Ring, d.h. mit a, b $\in$ E gilt auch $a-b \in E$ und $a \cdot b \in E$; ferner enthält E die Eins.

E enthält die *unendlich kleinen* Elemente von K, das heißt die Elemente a von K, die sich durch $-\frac{1}{n} < a < \frac{1}{n}$ einschließen lassen für jedes natürliche n. Zum Beweis merken wir zunächst an, daß von Null verschiedene unendlich kleine Elemente in K existieren:
Da nämlich K nichtarchimedisch angeordnet ist, gibt es ein Element a von K mit der Eigenschaft: Es gibt kein $n \in \mathbf{N}$, so daß $a < n$. Also ist $n \leq a \quad \forall n \in \mathbf{N}$. Wir dürfen $n < a$ voraussetzen, denn im Falle $a = n$ gilt ja $n + 1 > a$. Insbesondere ist dann a positiv, und es gilt $\frac{1}{a} < \frac{1}{n} \quad \forall n \in \mathbf{N}$. Es folgt sofort $-\frac{1}{n} < \frac{1}{a} < \frac{1}{n}$; d.h. a^{-1} ist unendlich klein.
Offenbar liegen die unendlich kleinen Elemente von K in E, wegen $\frac{1}{n} \leq n$, d.h. wegen $1 \leq n^2$.
Wir haben damit gleichzeitig nachgewiesen: Es gilt $a \in E$ *oder* $\frac{1}{a} \in E$.

Definiere nun als Punkte der Teilgeometrie E^2 die Punkte (x, y) mit x, $y \in$ E. Als Geraden der Teilgeometrie bezeichne diejenigen Teile von Geraden des K^2, die aus Punkten der Teilgeometrie bestehen. Die Definition der Strecken- und Winkelkongruenz erfolge analog zu den Definitionen in K^2. Beachte dazu, daß für ein positives $a \in E$ sicherlich auch $\sqrt{a} \in E$ gilt; dies folgt leicht aus der Gültigkeit der Relation $\sqrt{n} \leq n \, \forall n \in \mathbf{N}$.
Wir wollen diejenigen Punktmengen der Teilgeometrie, die sich als Durchschnitt resp. einer Strecke, einer Seite auf einer Geraden von einem Punkt, eines Halbstrahls, einer Seite einer Geraden sowie des Inneren eines Winkels in K^2 mit der Teilgeometrie ergeben, auch als die „natürlichen“ Definitionen dieser Begriffe in E^2 bezeichnen.
Wir haben dann nachzuweisen, daß sich die natürlichen Begriffsbildungen mit den Definitionen für „Strecke“, „Halbstrahl“ usw. decken, die sich als aus den Axiomen I- III abzuleitende ergeben, vorausgesetzt, in der Teilgeometrie E^2 lassen sich diese Axiome bestätigen.
Dazu sei bemerkt, daß sich alle Eindeutigkeitsaxiome sofort auf E^2 übertragen, weil wir diese ja schon für die umfassendere Geometrie des K^2 gezeigt haben. Außerdem vererben sich die Relationen „zwischen“ und „kongruent“ automatisch auf die Teilgeometrie, eben weil Kongruenz und

Zwischenlage in E^2 gerade so definiert sind.

6.3.1 Bestätigung der Hilbert- Axiome für die Teilgeometrie E^2

Inzidenzaxiome:

Es ist klar, daß es zu je zwei Punkten wenigstens eine verbindende Gerade gibt: verbinde nämlich die Punkte mit einer Geraden in K^2, und betrachte den zu E^2 gehörenden Teil dieser Geraden.

Auf einer Geraden gibt es stets wenigstens zwei Punkte:
Dazu genügt es zu zeigen, daß eine Gerade g in K^2, sofern sie nur mit einem Punkt (x_0, y_0) der Teilgeometrie inzidiert, noch mindestens einen weiteren Punkt aus E^2 besitzt.
Sei also $g = \{(x_0 + bt, y_0 - at)/\ t \in K\}$.

1. Fall: $b \neq 0$
Wenn dann $\frac{a}{b} \in E$, so wähle $t := \frac{1}{b}$. Der Punkt $(x_0 + bt, y_0 - at) = (x_0 + 1, y_0 - \frac{a}{b})$ ist dann sicher von (x_0, y_0) verschieden und liegt in E^2.
Andernfalls gilt $\frac{a}{b} \notin E$, insbesondere also $a \neq 0$, und $\frac{b}{a} \in E$. Wähle $t := \frac{b}{a^2}$; dann ist aufgrund der Voraussetzung $b \neq 0$ der Punkt $(x_0 + bt, y_0 - at) = (x_0 + \frac{b^2}{a^2}, y_0 - \frac{b}{a})$ von (x_0, y_0) verschieden. Außerdem sind seine Koordinaten Elemente von E.

2. Fall: $b = 0$
Insbesondere ist dann $a \neq 0$; wähle $t := \frac{1}{a}$. Der Punkt $(x_0, y_0 - 1)$ leistet das Gewünschte.

Anordnungsaxiome:

Die Kollinearität dreier Punkte, die in einer Zwischenbeziehung stehen, ist klar aufgrund der Definition des „zwischen“ in E^2. Daß wenn ein Punkt P_2 zwischen zwei anderen, etwa P_0 und P_1, liegt, auch zwischen P_1 und P_0 liegt, begründet man wieder damit, daß die entsprechende Aussage in der Obergeometrie K^2 gilt.

Zum Nachweis von Axiom II 2. bemerke, daß das Körperelement 2 in E enthalten ist.

Bevor wir uns dem Pasch- Axiom sowie den Axiomen der Kongruenz zuwenden, wollen wir beweisen, daß die natürlichen Definitionen für Strecke, Winkel usw. mit den entsprechenden abgeleiteten Begriffsbildungen übereinstimmen.

Seien A, B Punkte von E^2. Bemerke, daß die K^2- Strecke AB ganz zu E^2 gehört: dies folgt leicht aus der Tatsache, daß im Körper K alle Elemente zwischen 0 und 1 in dem Ring E liegen. Daß umgekehrt die Punkte der E^2- Strecke AB zur K^2- Strecke AB gehören, ist trivial.
Demzufolge sind die Begriffsbildungen „natürliche E^2- Strecke“ und „abgeleitete E^2- Strecke“ identisch.

Jetzt werden A und B auf einer E^2- Geraden g_E so gewählt, daß der Punkt $O \in g_E$ zwischen A und B zu liegen kommt. Dann ist also $g_E = \{O\} \cup s_A^{(E)} \cup s_B^{(E)}$.
Andererseits gehört zu g_E eine Trägergerade $g \subset K^2$, d.h. $g_E = g \cap E^2$, und man hat die K^2- Partition $g = \{O\} \cup s_A^{(K)} \cup s_B^{(K)}$. Offensichtlich folgt daraus $g_E = g \cap E^2 = \{O\} \cup (s_A^{(K)} \cap E^2) \cup (s_B^{(K)} \cap E^2)$.
Wir zeigen: $s_A^{(E)} = s_A^{(K)} \cap E^2$ (natürlich gilt dann auch $s_B^{(E)} = s_B^{(K)} \cap E^2$).

(i) $\underline{s_A^{(E)} \subset s_A^{(K)} \cap E^2}$:
$P \in s_A^{(E)} \Rightarrow P \in E^2$, und O liegt nicht E- zwischen A und P $\Rightarrow P \in E^2$, und O liegt nicht K- zwischen A und P $\Rightarrow P \in s_A^{(K)} \cap E^2$.

(ii) $\underline{s_A^{(K)} \cap E^2 \subset s_A^{(E)}}$:
$P \in s_A^{(K)} \cap E^2 \Rightarrow P \in E^2$, und O liegt nicht K- zwischen A und P $\Rightarrow$ $P \in E^2$, und O liegt nicht E- zwischen A und P $\Rightarrow P \in s_A^{(E)}$.

Damit ist die Gleichheit von natürlicher und abgeleiteter Definition des Begriffs „Seite einer Geraden von einem Punkt aus“ bestätigt.

Schließlich zeigen wir auch: Der natürliche Seiten- bzw. Halbebenenbegriff relativ zu einer Geraden deckt sich mit dem aus dem Bestehen der Axiome abgeleiteten Begriff.

In K^2 gilt jedenfalls $K^2 = \{g\} \cup S_A^{(K)} \cup S_B^{(K)}$, wo A und B Punkte mit der Eigenschaft sind: die Strecke AB trifft g.
Man hat auf E^2 die Äquivalenzrelation $A \sim B :\Leftrightarrow$ AB trifft $g_E \in E^2$ nicht; $\sim$ induziert eine Partition von E^2: $E^2 = \{g_E\} \cup S_A^{(E)} \cup S_B^{(E)}$. Sei $g_E = g \cap E^2$.
Es ist zu beweisen, daß $S_A^{(E)} = S_A^{(K)} \cap E^2$.

$\underline{\supseteq}$:
$P \in S_A^{(K)} \cap E^2 \Rightarrow P \in E^2$, und PA trifft g nicht $\Rightarrow P \in E^2$, und PA trifft g_E nicht $\Rightarrow P \in S_A^{(E)}$.

$\subseteq$:
$P \in S_A^{(E)} \Rightarrow P \in E^2$, und PA trifft $g_E = g \cap E^2$ nicht.
Angenommen, PA träfe g; dann müßte PA auch $g \cap E^2$ treffen, weil PA ja aus lauter E^2- Punkten besteht: Widerspruch. Also ist das Gegenteil richtig, und $\subset$ ist wahr.

Zuletzt halten wir fest, daß auch für „Winkel“ und „Inneres eines Winkels“ natürliche und abgeleitete Definition übereinstimmen. Beachte nämlich, daß Winkel und Winkelinneres aus den Begriffen „Halbstrahl“ und „Seite einer Geraden“ aufgebaut sind. Und für diese haben wir gerade erkannt, daß ihre natürliche und ihre abgeleitete Definition gleich sind.

Die Gültigkeit des Pasch- Axioms in der Teilgeometrie E^2 folgt nun sofort aus der Tatsache, daß mit den Ecken eines Dreiecks auch die Dreiecksseiten ganz zur Teilgeometrie gehören.

Kongruenzaxiome:
Der Nachweis von Axiom III 1. gelingt dadurch, daß man die Koeffizienten der Trägergeraden $g \subset K^2$ einer Geraden g_E der Teilgeometrie auf $a^2 + b^2 = 1$ normiert. Berücksichtige dann, daß der Lösungspunkt $P_3 = (x_3, y_3)$ dann automatisch in E^2 zu liegen kommt: denn $t \in E$, und wegen $a^2 + b^2 = 1$ gilt $a \in E$ und $b \in E$; also $x_3 = x_2 + bt \in E$ und $y_3 = y_2 - at \in E$.

III 2. folgt sofort aus der Definition der Streckenkongruenz in E^2. Auch III 3. überträgt sich unmittelbar auf die Teilgeometrie.

Ferner ist III 4. in E^2 gültig: Wir haben lediglich zu zeigen, daß der Halbstrahl $g_2^{(-)}$ wenigstens einen Punkt aus E^2 enthält. Das geschieht einfach durch Anwenden von Axiom I 3: Wegen $(x_0, y_0) \in E^2$ (nach Voraussetzung) liegt jedenfalls auf der Geraden g_2 ein weiterer Punkt P der Teilgeometrie. Wenn P noch nicht auf dem Halbstrahl $g_2^{(-)}$ liegen sollte, so ersetze man den Parameter t_P für P in der Darstellung $P = (x_0 + bt_P, y_0 - at_P)$ durch $-t_P$. Sicher liegt dann der Punkt $(x_0 + bt_p, y_0 - at_P)$ auf $g_2^{(-)}$, und er gehört wiederum zur Teilgeometrie, da E ein Ring ist.

Daß endlich das Kongruenzaxiom III 5. in der Teilgeometrie gilt, geht direkt aus der Rechnung hervor, die in K^2 zum Nachweis des Axioms durchgeführt wurde.

Ergebnis: Die Teilgeometrie E^2 ist eine Hilbert- Ebene! Dagegen gilt

in ihr das Parallelenaxiom nicht, d.h. zu einer Geraden gibt es durch einen Punkt außerhalb stets mehrere Nichtschneidende:
Betrachte zum Beispiel die Gerade g mit der Gleichung $y = 0$; fixiere den Punkt $P_0 = (0, 1)$. Offenbar $P_0 \notin g$. Wir haben die „Standardparallele“ h_0 zu g durch P_0: sie hat die Gleichung $y = 1$. Bemerke: $(1, 1) \in h_0$. Sei nun $\omega \neq 0$ ein unendlich kleines Element von K. Dann bezeichne h_1 die Verbindungsgerade P_0P_ω, mit $P_\omega := (1, 1 + \omega)$; sie hat die Gleichung $-\omega x + y - 1 = 0$. Die Geraden g und h_1 schneiden sich in einem Punkt S, der nicht zur Teilgeometrie gehört. Denn S hat die Koordinaten $(-\frac{1}{\omega}, 0)$, kann also nicht in E^2 liegen, denn $\frac{1}{\omega}$ ist ja „unendlich groß“.

Andererseits ist die Winkelsumme von E^2- Dreiecken gleich zwei Rechten: Betrachte dazu das Dreieck mit den Ecken $(0, 0)$, $(0, 1)$ und $(1, 0)$; dies ist jedenfalls ein Dreieck der Teilgeometrie. Als Dreieck in K^2 aufgefaßt hat es die Winkelsumme von zwei Rechten Winkeln. Aufgrund der Definition der Winkelkongruenz in E^2 ist sie dann auch in der Teilgeometrie gleich zwei Rechten.
Weil ferner in der Hilbert- Ebene E^2 der Zweite Legendresche Satz gilt, ist damit bewiesen, daß alle Dreiecke der Teilgeometrie zwei Rechte Winkel als Winkelsumme haben.
Aus naheliegenden Gründen nennt man die Teilgeometrie E^2 *semieuklidisch.*

6.4 Der Körper der formalen Potenzreihen. Der Hilbertsche Körper Ω.

6.4.1 Der Potenzreihenkörper $K((t))$

Wir haben bei der Konstruktion der semieuklidischen Geometrie die Frage nach der Existenz nichtarchimedisch angeordneter, pythagoräischer Körper unbeantwortet gelassen. Dies soll nun nachgeholt werden. Sei zu diesem Zweck K ein angeordneter pythagoräischer Körper, z.B. der Körper **R** der reellen Zahlen.[48] Dann bezeichne K((t)) den Bereich der formalen Potenzreihen in einer Unbestimmten t mit Koeffizienten aus K.
Eine formale Potenzreihe ist ein Symbol der Form

$$a = \sum_{i=m}^{\infty} a_i t^i \ , \quad m \in \mathbf{Z}. \tag{49}$$

Zwei Potenzreihen a und b heißen *gleich*, wenn sie, abgesehen von Gliedern mit dem Koeffizienten 0, die beliebig weggelassen oder hinzugefügt werden dürfen, genau dieselben Glieder enthalten.

[48] Bekanntlich ist **R** archimedisch geordnet, eignet sich also für unsere Zwecke nicht.

Im Bereich aller formalen Potenzreihen definiert man eine *Addition* und eine *Multiplikation* völlig analog zur Summe und zum Produkt von Polynomen:
Unter der Summe von $a = \sum_{i=m}^{\infty} a_i t^i$ und $b = \sum_{i=n}^{\infty} b_i t^i$ soll die Potenzreihe

$$a + b := \sum_{i=m_0}^{\infty} (a_i + b_i)t^i \ , \quad m_0 = min\{m, n\} \tag{50}$$

verstanden werden, und unter ihrem Produkt die Potenzreihe

$$a \cdot b := \sum_{i=m+n}^{\infty} c_i t^i \ , \quad mit \ c_i = \sum_{k+l=i} a_k b_l \,. \tag{51}$$

Man verifiziert, daß die formalen Potenzreihen einen K enthaltenden Ring mit den neutralen Elementen $0 = 0_K$ und $1 = 1_K$ bilden. Ferner kann man zu jeder Potenzreihe $a = \sum_{i=m}^{\infty} a_i t^i$ aus der schrittweisen Lösung des unendlichen Gleichungssystems

$$\begin{aligned} 1 &= a_m b_{-m} \\ 0 &= a_m b_{-m+1} + a_{m+1} b_{-m} \\ 0 &= a_m b_{-m+2} + a_{m+1} b_{-m+1} + a_{m+2} b_{-m} \\ &\vdots \end{aligned}$$

eine Potenzreihe $b = \sum_{i=-m}^{\infty}$ erhalten, für die $a \cdot b = 1$ ist, also eine zu a *inverse* Potenzreihe $b = a^{-1}$. K((t)) ist also ein Körper.[49]

Sei $a = \sum_{i=0}^{\infty} a_i t^i$ nicht die Nullreihe. Dann gibt es unter den Summanden $a_i t^i$ einen ersten von Null verschiedenen Koeffizienten a_i; wir nennen ihn das Anfangsglied von a, abgekürzt Ag(a). Den Exponenten von t im Anfangsglied von a nennen wir die Ordnung von a. Nützlich sind die beiden folgenden Regeln:
(i) $Ag(a \cdot b) = Ag(a) \cdot Ag(b)$;
(ii)$Ag(a + b) = Ag(a) + Ag(b)$, falls die Ordnungen von a und b übereinstimmen. Ist die Ordnung von a kleiner als die Ordnung von b, so ist $Ag(a + b) = Ag(a)$.

Eine Reihe a nennen wir positiv, wenn der Anfangskoeffizient Ag(a) von a ein positives Element aus K ist. Damit ist im Bereich der formalen Potenzreihen eine Anordnung erklärt: Sind a und b positive Potenzreihen, so gilt dasselbe für $a + b$ und $a \cdot b$. Dies folgt leicht aus den Regeln (i), (ii). Die Elemente von K als Potenzreihen der Ordnung 0 behalten dabei ihre

[49] Vgl. [Hessenberg, 1967], § 63 Beispiele für nicht- archimedische Körper und Schiefkörper.

alte Anordnung.
Bemerke: Die so gegebene Anordnung für K((t)) ist nichtarchimedisch: t ist unendlich klein.

Wir zeigen nun, daß der so geordnete Körper K((t)) pythagoräisch ist, d.h. [50]

$$1 + a^2 \in K((t))^2 \quad \forall a \in K((t)). \tag{52}$$

Offenbar darf bei diesem Nachweis $a \neq 0$ vorausgesetzt werden. Man bestätigt zunächst das folgende

Kriterium. Eine Reihe $a \neq 0$ liegt in $K((t))^2$ dann und nur dann, wenn das Anfangsglied von a quadratisch, d.h. von der Form $(a_n t^n)^2 = a_n^2 t^{2n}$ ist.

Beweis: Für jede Potenzreihe $b = \sum_{i=n}^{\infty} b_i t^i = b_n t^n + b_{n+1} t^{n+1} + \dots$ der Ordnung n hat jedenfalls $b^2 = b_n^2 t^{2n} + 2 b_n b_{n+1} t^{2n+1} + \dots$ die geforderte Gestalt.
Ist umgekehrt $a = \sum_{i=2n}^{\infty} a_i t^i$ eine Potenzreihe der Ordnung 2n, so ist das unendliche Gleichungssystem

$$\begin{aligned} a_{2n} &= b_n^2 \\ a_{2n+1} &= 2 b_n b_{n+1} \\ a_{2n+2} &= 2 b_n b_{n+2} + b_{n+1}^2 \\ &\vdots \end{aligned}$$

nach den b_i auflösbar, weil die erste Gleichung laut Voraussetzung eine Lösung $b_n \neq 0$ besitzt und damit die übrigen Gleichungen schrittweise in lineare Gleichungen übergehen, in denen die jeweils einzige Unbekannte b_{n+k} stets den Koeffizienten $2b_n \neq 0$ hat ([Hessenberg, 1967]).

Aus dem Kriterium für Quadrate in K((t)) folgt nun der Satz von der Pythagoräizität des Körpers der formalen Potenzreihen: Denn sei $a = \sum_{i=m}^{\infty} a_i t^i$ eine Potenzreihe der Ordnung m. Ist $m \geq 0$, so hat die Reihe

$1 + a^2 = (1 + a_0)^2 + \dots$ (mit $a_0 = 0$, falls $m > 0$)
die Ordnung 0 und quadratischen ersten Koeffizienten jedenfalls, wenn K pythagoräisch ist. Falls $m < 0$, so hat

[50] Es bezeichne $K((t))^2$ die Menge der Quadrate in K((t)), also $K((t))^2 = \{a^2 / a \in K((t))\}$.

$1 + a^2 \;=\; a_m^2 t^{2m} + \ldots$
die gerade Ordnung $2m < 0$ und den Anfangskoeffizienten a_m^2, so daß beide Reihen nach dem Kriterium Quadrate sind.
Schließlich zeigt das Kriterium, daß -1 kein Element von $K((t))^2$ ist. Damit ist der Satz bewiesen.

6.4.2 Der Hilbertsche Körper Ω

Zwecks Anwendung im nächsten Kapitel wollen wir noch den minimalen pythagoräischen Erweiterungskörper Ω der rationalen Zahlen angeben. Die Konstruktion dieses Körpers stammt von Hilbert.

Sei zunächst K ein beliebiger Körper, $d \in K$. Die Menge $K(\sqrt{d})$ bestehe aus allen Ausdrücken der Form $a + b\sqrt{d}$ $(a, b \in K)$. Man zeigt: $K(\sqrt{d})$ ist wieder ein Körper.
Es bezeichne jetzt $\mathbf{Q}$ den Körper der rationalen Zahlen; betrachte dann die nach oben aufsteigende Kette von Erweiterungskörpern

$$\begin{aligned} K_0 &= \mathbf{Q}\,, \\ K_1 &= K_0(\{\sqrt{1 + k_0^2}/\, k_0 \in K_0\})\,, \\ &\vdots \\ K_{n+1} &= K_n(\{\sqrt{1 + k_n^2}/\, k_n \in K_n\})\,. \end{aligned}$$

Schließlich definiere

$$\Omega = \cup_{n \geq 0} K_n \tag{53}$$

Die Vereinigungsmenge Ω ist ein pythagoräischer Körper. Insbesondere ist Ω also formal- reell, d.h. -1 ist nicht als Summe von Quadraten darstellbar.[51]

Beweis:
Ist $a \in \Omega$, so ist $a \in K_n$ für ein n und daher

$$\sqrt{1 + a^2} \in K_{n+1}\,.$$

Also sind in Ω Summen von Quadraten stets Quadrate.
Ω ist auch formal- reell: Dazu überlegen wir uns, daß jedenfalls aus „K_n ist formal- reell“ folgt „K_{n+1} ist formal- reell“. Daraus schließt man sofort, daß Ω formal- reell sein muß.

[51] Gleichbedeutend dazu ist die Aussage: Aus $\sum_{i=1}^{m} a_i^2 = 0$, $a_i \in \Omega$, folgt stets $a_i = 0$.

Sei K_n als formal- reell erkannt; Annahme: K_{n+1} nicht formal- reell. Dann bestünde in K_{n+1} eine Gleichung[52]

$$-1 = (a + b\sqrt{1+c^2})^2 , \qquad a, b, c \in K_n .$$

D.h. man hätte

$$-1 = a^2 + b^2 + (bc)^2 + 2ab\sqrt{1+c^2}$$

Hierin muß nun der letzte Term verschwinden, denn andernfalls hätte man für $b\sqrt{1+c^2}$ eine Darstellung als Summe von Elementen aus K_n, was nach Voraussetzung ausgeschlossen ist.
Daher müßte sich -1 in K_n doch als Summe von Quadraten darstellen lassen: Widerspruch. Daher muß auch K_{n+1} formal- reell sein.
Der Hilbertsche Krper Ω ist also als pythagoräisch erwiesen.

Wir zeigen nun, daß Ω anordenbar ist. Diese Feststellung ist freilich trivial, wenn man den Hilbertschen Körper als Unterkörper des reellen Zahlkörpers auffaßt, da alle Unterkörper von $\mathbf{R}$ von Haus aus angeordnet sind. Man kann die Adjunktion von Quadratwurzeln zu einem gegebenen Körper (z.B. zu $\mathbf{Q}$) aber auch als rein formale Operation betrachten und von einer Interpretation etwa von $\sqrt{2}$ als die reelle Zahl $1,414\ldots$ absehen. Dann hat man in der Tat etwas zu zeigen.
Es gilt der Satz, daß ein formal- reeller Körper auf wenigstens eine Weise angeordnet werden kann. Da Ω abzählbar ist, genügt es, den Beweis für einen abzählbaren formal- reellen Körper K zu führen. Der Beweis sei nur skizziert; für die Details sei verwiesen auf [Pickert, 1951], S. 245.
1. Die Elemente $\neq 0$ von K seien mit $a^{(n)}$ $(n = 1, 2, \ldots)$ bezeichnet. Bilde eine Folge von Mengen $M^{(n)}$ $(n = 0, 1, \ldots)$ nach folgendem Verfahren:
$M^{(0)}$ = Menge aller Quadratsummen $\sum_{i=1}^{m} a_i^2$ $(a_i \neq 0,\ a_i \in K;\ m = 1, 2, \ldots)$;
falls $-a^{(n+1)}$ nicht in $M^{(n)}$ liegt, wird $M^{(n+1)}$ gebildet aus allen Elementen $a + a^{(n+1)}b$ $(a, b \in M^{(n)} \cup \{0\}$, ausgenommen $a = b = 0)$, und im anderen Fall sei $M^{(n+1)} = M^{(n)}$.
2. Man beweist nun durch vollständige Induktion nach n, daß $M^{(n)}$ eine Unterstruktur $\supseteq M^{(i)}$ $(i = 0, 1, \ldots, n-1)$ von K ist, welche das Nullelement nicht enthält.
3. Die Vereinigungsmenge $P := \cup_{n \geq 0} M^{(n)}$ ist wieder Unterstruktur von K, denn zu zwei Elementen $a, b \in P$ gibt es immer eine natürliche Zahl n mit $a, b \in M^{(n)}$.

[52]Beachte, daß wir nur ein einziges Quadrat hingeschrieben haben. Dies reicht aber tatsächlich aus, weil in dem Körper Ω beliebige Summen von Quadraten bereits Quadrate sind.

4. Jedes $a^{(n)}$ genügt einer der Beziehungen $a^{(n)} \in P$, $-a^{(n)} \in P$; denn wenn $-a^{(n)}$ nicht in $M^{(n-1)}$ liegt, so gilt $a^{(n)} \in M^{(n)}$. Da P nicht 0 enthält, besteht für jedes Element $a \in K$ auch höchstens eine der Beziehungen $a = 0$, $a \in P$, $-a \in P$. P erfüllt also die an einen Positivbereich gestellten Anforderungen. Definiere jetzt eine Anordnung „>" durch die Festsetzung: $a > 0$ genau dann, wenn $a \in P$.

Ein Element $a \in \Omega$ wird *total- positiv* genannt, wenn a in keiner Anordnung von Ω negativ ist. Offenbar sind Quadrate total- positiv.

6.4.3 Eine Anwendung.

Wir zeigen: $\gamma := -6 + 4\sqrt{3}$ ist kein total- positives Element von Ω.

Beweis. Wir geben eine Anordnung $\prec$ von Ω an, in der das Element γ negativ ausfällt.
Betrachte den Körper $\mathbf{Q}(\sqrt{3})$; es gilt die Kette von Inklusionen $\mathbf{Q}(\sqrt{3}) \subset K_2 \subset \Omega$, da $\sqrt{3} = \sqrt{1 + (\sqrt{1+1})^2}$ gilt. Sei $<$ die von $\mathbf{R}$ auf Ω vererbte Anordnung; in dieser Anordnung ist $\sqrt{3} > 0$. Insbesondere ist auch in dem Körper $\mathbf{Q}(\sqrt{3})$ das Element $\sqrt{3}$ positiv.
Definiere auf $\mathbf{Q}(\sqrt{3})$ die „Konjugation" $\sigma(a + b\sqrt{3}) := a - b\sqrt{3}$. Die Abbildung σ ist ein Körperautomorphismus, d.h. $\sigma(c_1 + c_2) = \sigma(c_1) + \sigma(c_2)$ und $\sigma(c_1 \cdot c_2) = \sigma(c_1) \cdot \sigma(c_2)$. Wenn Π den zu $<$ gehörenden Positivbereich bezeichnet, so gilt offenbar: $\sigma(\Pi)$ ist wiederum Positivbereich, d.h. durch die Festsetzung: $c \prec 0 :\Leftrightarrow c \in \sigma(\Pi) \Leftrightarrow \sigma^{-1}(c) < 0$ wird eine neue Anordnung von $\mathbf{Q}(\sqrt{3})$ festgelegt. Man erkennt: In der neuen Anordnung fällt $\sqrt{3}$ negativ aus, $\sqrt{3} \prec 0$. Weiter gilt unverändert $0 \prec \frac{3}{2}$; folglich hat man $\sqrt{3} \prec \frac{3}{2}$, also auch $4\sqrt{3} \prec 6$. Mithin ist das Element $\gamma = -6 + 4\sqrt{3}$ in der neuen Anordnung negativ. Beachte nun, daß sich die Anordnung $\prec$ auf ganz Ω fortsetzen läßt; es gilt nämlich der

Satz. Sei K ein formal- reeller Körper, $L \supseteq K$ eine Körpererweiterung, Δ_L = Menge derjenigen Anordnungen von K, die sich auf L fortsetzen lassen. Dann ist Δ_L genau dann leer, wenn L nicht formal- reell ist ([Diller, 1963], S. 3).

Daher ist γ nicht total- positiv und kann somit auch kein Quadrat sein.

7 Protogeometrie und freie Beweglichkeit

7.1 Einführung

In Hilbert- Ebenen gilt die *freie Beweglichkeit*: zu je zwei inzidenten Paaren Punkt und Gerade P, g und P', g' gibt es eine (per definitionem kongruenzerhaltende) Bewegung, die P in P' und zugleich g in g' überführt. Eine Bewegung ist dabei definiert als Kollineation, welche die Anordnung und die Kongruenz der Hilbert- Ebene erhält.
Es läßt sich nun für Hilbert- Ebenen der Satz beweisen, daß je zwei Punkte einen *Mittelpunkt* und je zwei sich schneidende Geraden eine *Winkelhalbierende* haben.[53]Mittelpunkt und Winkelhalbierende sind abgeleitete Begriffe, die mithilfe der Kongruenz oder gleichbedeutend bewegungstheoretisch zu erklären sind: Der Mittelpunkt etwa teilt eine Strecke in zwei kongruente Teilstrecken, und es gibt eine Bewegung, welche die beiden Teilstrecken ineinander überführt. Analoges gilt für die Winkelhalbierende.

Wir stellen uns die Frage, ob sich diese Feststellung in gewisser Weise umkehren läßt: Angenommen, wir hätten eine ebene Geometrie konstruiert, in welcher die Hilbertschen Inzidenz- und Anordnungsaxiome erfüllt sind; ferner gebe es eine Orthogonalitätsrelation auf der Menge der Geraden dieser Geometrie. Und schließlich sei zu je zwei sich schneidenden Geraden die Winkelhalbierende (in dem oben erklärten abgeleiteten Sinn [54]) definiert. Gilt dann in dieser Geometrie die freie Beweglichkeit ?

Diese Frage ist für die Protogeometrie nicht unwichtig: Nach Lorenzen nämlich besteht die ebene absolute Protogeometrie genau aus einem solchen System von Punkten und Geraden, das durch die Inzidenz- und Anordnungsaxiome Hilberts, einer symmetrischen Orthogonalitätsrelation sowie durch die Konstruierbarkeit der Winkelhalbierenden charakterisiert ist.
Auch Lorenzens Winkelhalbierende ist ein abgeleiteter Begriff: sie ist erklärt als Fixgerade derjenigen involutorischen ebenen Bewegung („Klappung"), welche die Schenkel des Winkels miteinander vertauscht.[55]

Die praktisch hinreichend genaue Realisierbarkeit der Winkelhalbierenden leitet sich bei Lorenzen ab aus der Möglichkeit, zu gegebenen Gera-

[53]Vgl. [Hilbert, 1962], Kap.I,§6. (Folgerungen aus den Axiomen der Kongruenz), Satz 26 und Folgerungen.

[54]Da die Hilbertsche Kongruenz nicht notwendigerweise in unserer Geometrie gegeben ist, schwäche man die die Winkelhalbierende definierende Bewegung dahingehend ab, daß sie statt kongruenzerhaltend lediglich orthogonalitätserhaltend sein soll.

[55][Lorenzen, 1984], S. 42- 43. Bemerkung: Eine Abbildung einer Menge auf sich heißt involutorisch, wenn sie von der Identität verschieden, ihr Quadrat aber die Identität ist. Die protogeometrischen Klappungen sind involutorisch: siehe [Lorenzen, 1984], S. 48.

den h, h' ein sogenanntes „Thalesviereck" konstruieren zu können, in dem h und h' die Diagonalen bilden: „Die Winkelhalbierenden sind ... durch das Thalesviereck mithilfe der Orthogonalität definierbar"([Lorenzen, 1984], S. 71). „Das Thalesviereck ist dadurch definierbar, daß es durch seinen Mittelpunkt (d.h. den Schnittpunkt der Diagonalen) zwei zueinander orthogonale Geraden gibt, die jeweils orthogonal zu gegenüberliegenden Vierecksseiten sind. In Fig. 23 sind diese 5 definierenden Orthogonalitäten eingezeichnet" (ebd., S. 48). Vgl. [Lorenzen, 1977], S.97: „Für jeden schon konstruierten Winkel läßt sich in der Tat die Winkelhalbierende allein durch Orthogonalität definieren (...) Als Konstruktionspostulat –man spricht auch von Existenzpostulaten– sei die Konstruierbarkeit der Winkelhalbierenden für jeden schon konstruierten Winkel gefordert. Dieses Postulat rechtfertigt sich –wie die Definition der Ebene und der Orthogonalität– aus der technisch hinreichenden Realisierbarkeit."

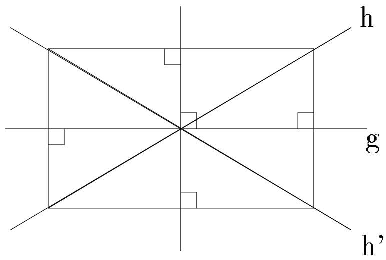


Abbildung 14: Das Thalesviereck

Durch Hinzunahme des Formprinzips, welches die Existenz ähnlicher, nicht kongruenter Figuren postuliert, entsteht die spezifisch euklidische Protogeometrie, die sich allerdings von der euklidischen Schulgeometrie noch unterscheidet, wie wir oben festgestellt haben. Aus dem Formprinzip behauptet Lorenzen seinen sogenannten „Speziellen Parallelensatz" bewiesen zu haben: „Zwei Geraden, die eine dritte einmal orthogonal, einmal nicht- orthogonal schneiden, schneiden sich."[56]

Sodann gibt Lorenzen eine Konstruktionsmöglichkeit für den Mittelpunkt M einer beliebigen Strecke AB an. Diese Konstruktion verknüpft die Halbierbarkeit des Rechten Winkels und den speziellen Parallelensatz, um ein rechtwinklig- symmetrisches Dreieck über der gegebenen Strecke zu errichten.[57]

Zunächst führt Lorenzen folgende „Prä- Mittelpunktskonstruktion" aus: Geht man von der Strecke AM aus, so hat man zunächst die Orthohalbierende in A zu konstruieren. Aus dem speziellen Parallelensatz

[56] [Lorenzen, 1984], S. 106.

[57] [Lorenzen, 1984], S. 75 (zweiter Absatz) und S. 110 unten.

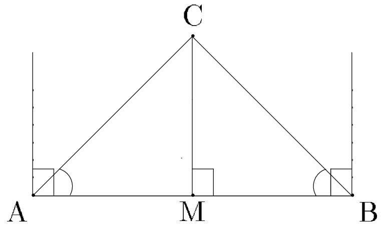


Abbildung 15: Die Mittelpunktskonstruktion

folgt, daß diese das Lot auf AM durch M in einem Punkt C schneidet. Entsprechend schneidet dann die Orthohalbierende in C die Verbindungsgerade AM in einem Punkt B. Dann heiße M der Mittelpunkt der Strecke AB.
Hierauf folgt die eigentliche Erklärung des protogeometrischen Mittelpunktes: „Um M von AB ausgehend zu konstruieren, braucht man nur die Orthohalbierenden von A und B aus zum Schnitt zu bringen –die Existenz des Schnittpunktes C ist allerdings wieder spezifisch euklidisch und daher erst in §4 beweisbar. Die Orthogonale ... [auf AB durch C] schneidet im gesuchten Mittelpunkt M“ ([Lorenzen, 1984], S. 75).

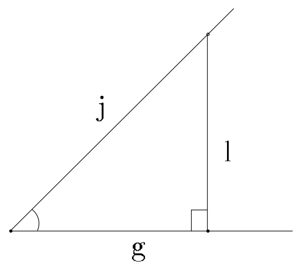
Die Ausführbarkeit der Mittelpunktskonstruktion läßt sich spiegelungsgeometrisch bestätigen: Wie wir wissen, folgt aus dem Formprinzip das Rechtseitaxiom, also die Existenz eines Vierecks mit vier Rechten Winkeln. Dieses zieht in der Hjelmslevschen Spiegelungsgeometrie den Satz nach sich, daß in einem Vierseit mit drei Rechten Winkeln auch der vierte stets ein Rechter Winkel ist.[58] Da sich in der absoluten Geometrie zwei zueinander senkrechte Geraden schneiden müssen, folgt insbesondere: Jedes Vierseit mit drei Rechten Winkeln schließt sich.

Dann läßt sich der entscheidende Satz beweisen: Schneiden sich zwei Geraden halbrechtwinklig, so schneidet jedes Lot der einen die andere.

Beweis (Bachmann).[59] Seien g, j Geraden, welche sich halbrechtwinklig schneiden, und sei l ein Lot auf g. Man spiegele g, l an j. Dann bilden l, g, $\sigma_j(g)$, $\sigma_j(l)$ ein Vierseit mit drei Rechten Winkeln. Nach der obigen Folgerung aus dem Rechtseitaxiom haben l und $\sigma_j(l)$ einen Punkt gemein; dieser geht bei der Spiegelung an j in sich über und liegt daher auf j.

Damit ist Lorenzens Prä- Mittelpunktskonstruktion noch einmal abgesichert worden, freilich unter der Annahme, daß die ebene Protogeometrie ein Modell der Spiegelungsgeometrie sei. Dem wollen wir cum grano sa-

[58] Siehe [Bachmann, 1973], S. 111 f.
[59] [Bachmann, 1964], S. 175 f.



lis zustimmen, da die Hjelmslev- Bachmannsche Spiegelungsgeometrie mit Inzidenz, Orthogonalität, dem Spiegelungsaxiom („An jeder Geraden gibt es wenigstens eine Spiegelung") und dem sogenannten Satz von den drei Spiegelungen („Die Aufeinanderfolge von Spiegelungen an drei Geraden a, b, c, welche einen Punkt oder ein Lot gemein haben, stimmt mit einer Spiegelung an einer Geraden d überein") auskommt. Der Satz von den drei Spiegelungen ist für den Aufbau weiter Teile der Theorie entbehrlich und schließt nur einige wenige „pathologische" Geometrien aus. Das Spiegelungsaxiom ist für die Protogeometrie Lorenzens völlig unproblematisch, denn die Existenz einer Klappung oder Spiegelung an beliebigen Geraden ist durch die Elementargeometrie, S. 42- 43, verbürgt.

Wir wollen jetzt als Erstes der Frage nachgehen, inwieweit Winkelhalbierende und Mittelpunkt voneinander abhängig sind. Dazu werde von wie auch immer gearteten Parallelensätzen zunächst gänzlich abgesehen. Es wird sich dann herausstellen, daß man zumindest nach Fallenlassen der Hilbertschen Anordnungsaxiome eine ebene Geometrie konstruieren kann, welche zwar über die Winkelhalbierenden verfügt, in der die Mittelpunktsexistenz aber nicht allgemein besteht. Diese Geometrie ist wesentlich hyperbolischen Charakters.
Wir hatten in Kapitel 5 festgestellt, daß das Formprinzip gleichbedeutend ist mit der Existenz eines Rechtseites. Für die von Lorenzen vorgeschlagene Mittelpunktskonstruktion genügt dann offensichtlich sogar die Halbierbarkeit des Rechten Winkels aus; Anordnungsfragen spielen dabei keine Rolle. Die Anordnungsaxiome, allen voran das Pasch- Axiom, werden wichtig, wenn man das Rechtseitaxiom nicht in die Voraussetzungen mitaufnehmen möchte: Man kann nämlich zeigen, daß schon in metrisch-nichteuklidischen Spiegelungsebenen[60] *mit* Anordnung die Mittelpunktsexistenz aus dem Vorhandensein der Winkelhalbierenden gefolgert werden kann.[61] Dann herrscht in der metrischen Ebene freie Beweglichkeit. Es gilt nämlich: Eine metrische Ebene besitzt freie Beweglichkeit, wenn

[60] in denen die Negation des Rechtseitaxioms gilt!

[61] Siehe [Diller, 1970], S. 200, Satz 7.2. Die in dem Satz geforderte Konvexität der metrischen Ebene wird durch das Pasch- Axiom sichergestellt.

jedes Punktepaar einen Mittelpunkt und jedes sich schneidende Geradenpaar eine Winkelhalbierende besitzt ([Bachmann, 1973], S. 124 ff.).

Insofern soll das Beispiel für die Bedeutung der Anordnungsaxiome sensibel machen, gerade auch für den Fall, daß einem das Formprinzip nicht ausreichend gesichert erscheint. Und dies trifft in der Tat selbst für Protophysikvertreter zu; Janich z.B. gehört dazu.
Auf der anderen Seite gibt Lorenzen eine unseres Erachtens nicht befriedigende Begründung der Anordnungsaxiome, speziell des Axioms von Pasch. Das Pasch- Axiom wird in der „Elementargeometrie“ (S. 66 f.) mit folgender Aussage gleichgesetzt: Wenn zwei Punkte A und B auf verschiedenen Seiten einer gegebenen Geraden g liegen und C ein nicht mit g inzidierender Punkt ist, so liegt C entweder auf derselben Seite von g wie A oder auf derselben Seite von g wie B. Dies ist gewiß aber keine äquivalente Formulierung des Pasch- Axioms, wie es bei Hilbert steht und seitdem im Aufbau der Geometrie benutzt wird.

7.2 Konstruktion der pseudo- hyperbolischen Ebene $\mathcal{T}$

Wir erinnern zunächst daran, daß hyperbolische Ebenen Hilbert- Ebenen sind. Insbesondere gilt im ebenen Kleinschen Modell der hyperbolischen Geometrie also der Satz, daß alle Winkel halbierbar sind und zwei Punkte stets einen Mittelpunkt haben. Der Koordinatenkörper muß notwendigerweise euklidisch sein, d.h. jedes positive Element von K ist Quadrat.[62] Dies folgt daraus, daß die Bedingung für die Existenz von Schnittpunkten einer hyperbolischen Geraden mit dem Lichtkegel auf das Lösen einer quadratichen Gleichung führt.

Wir konstruieren nun eine „pseudo- hyperbolische“ Geometrie über dem minimalen pythagoräischen Erweiterungskörper Ω der rationalen Zahlen. Die Idee dazu stammt von F. Bachmann ([Bachmann, 1973], S. 281).

Sei $P_2(\Omega)$ der zweidimensionale projektive Raum über dem Körper Ω, $\mathcal{H} \subset P_2(\Omega)$ die Menge der Punkte $p = \pi(x)$ mit $q(x) = -x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 < 0$. Ein Punkt $P \in \mathcal{H}$ gehöre dann und nur dann zur pseudo- hyperbolischen Geometrie $\mathcal{T}$, wenn alle Geraden durch P den Lichtkegel $\mathcal{L} = \{\pi(x) \in P_2(\Omega) /\ q(x) = 0\}$ treffen. Als Geraden unserer Geometrie $\mathcal{T}$ verstehen wir diejenigen Teilmengen von Punkten aus $\mathcal{T}$, die auf $\mathcal{H}$- Treffgeraden liegen, also auf Geraden, die den Lichtkegel in zwei Punkten schneiden.
Diese Geradendefinition stellt, wie wir bald sehen werden, sicher, daß zu zwei beliebig vorgegebenen Geraden stets auch eine Winkelhalbierende

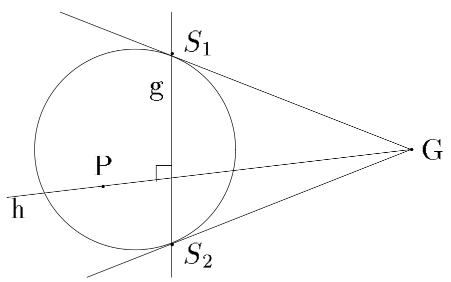
[62] Man nennt euklidische Körper daher auch Quadratwurzel- Körper.

existiert. Obige Definition der Punkte von $\mathcal{T}$ wird in der Spiegelungsgeometrie als „Zugehörigkeitsbedingung“ bezeichnet.[63]

Als Inzidenz übernehmen wir die von $\mathcal{H}$ auf $\mathcal{T}$ vererbte Inzidenz.

Weiter sollen zwei Geraden der Teilgeometrie $\mathcal{T}$ zueinander orthogonal heißen, wenn dies von ihren Trägergeraden bezüglich der hyperbolischen Orthogonalität in $\mathcal{H}$ gilt: Die Geraden g: $f(u,x) = 0$ und h: $f(v,x) = 0$ (wobei f die symmetrische, nichtentartete Bilinearform $f(x,y) = -x_1y_1 + x_2y_2 + x_3y_3$ bezeichnet) sind also zueinander orthogonal, wenn $f(u,v) = 0$ ist.
Schließlich heiße h die Winkelhalbierende zu dem Paar (g_1, g_2) (mit $S = g_1 \cap g_2$, $S \in h$), wenn es eine involutorische Abbildung σ aus $\mathcal{P}(O(1,2))$ gibt derart, daß $\sigma(h) = h$, $\sigma(g_1) = g_2$ gilt.

Wir können uns die pseudo- hyperbolische Geometrie veranschaulichen, indem wir die Geraden und Ebenen des Ω^3 mit der (affinen) Ebene $H_1 = \{(x_1, x_2, x_3) / \, x_1 = 1\}$ schneiden. Man erkennt: Die pseudo- hyperbolische Geometrie $\mathcal{T}$ ist Teilmenge des offenen Einheitskreises $x^2+y^2 < 1$ der euklidischen Ebene H_1. Inzidenz und Anordnung stimmen mit derjenigen der affin- euklidischen Ebene H_1 überein. Die Polarität in $P_2(\Omega)$ drückt sich in H_1 einfach als euklidische Polarität bezüglich des Kreises $\mathcal{K} : x^2 + y^2 = 1$ aus. D.h., um zu einer Geraden g das Lot h etwa durch den Punkt P zu finden, hat man die beiden Tangenten an $\mathcal{K}$ durch die Punkte S_1,S_2 (mit $S_1 = g \cap \mathcal{K}$, $S_2 = g \cap \mathcal{K}$) zum Schnitt bringen (der Schnittpunkt der Tangenten sei G; dies ist der Pol der Geraden g). Das Lot h ergibt sich dann als Verbindungsgerade PG.



Ist g Durchmesser von $\mathcal{K}$, so liegt der Pol G von g auf der unendlich fernen Geraden von H_1. Die Geraden g,h sind insbesondere genau dann im euklidischen Sinne zueinander orthogonal, wenn h durch den Mittelpunkt $O = (1, 0, 0)$ von $\mathcal{K}$ geht.

[63] Siehe [Pejas, 1961], S. 214. Die Zugehörigkeitsbedingung spielt eine Rolle bei der Algebraisierung synthetisch gegebener Spiegelungsgeometrien.

Bevor wir die Axiome der Reihe nach überprüfen, wollen wir uns zunächst klarmachen, daß jedenfalls die Winkelhalbierende in unserem Modell $\mathcal{T}$ stets existiert.
Dazu überlegen wir uns vorab, wie sich die Forderung, daß jede Gerade aus $\mathcal{H}$ den Lichtkegel $\mathcal{L}$ in zwei Punkten treffen soll, algebraisch ausdrückt.

Seien eine Gerade g und der Lichtkegel gegeben durch

$$\begin{aligned} g &: \quad f(u,x) = 0\,, \\ \mathcal{L} &: \quad q(x) = f(x,x) = 0\,. \end{aligned}$$

Es gilt $l \in g \cap \mathcal{L}$ genau dann, wenn $f(u,l) = 0$ und $q(l) = 0$. Seien $u = (u_1, u_2, u_3)$, $l = (l_1, l_2, l_3)$. Aus $l \in \mathcal{L}$ folgt $l_1 \neq 0$, und wir können den „Punkt" l ohne Einschränkung zu $l = (1, l_2, l_3)$ ansetzen. Der Vektor u ist raumartig; es ist daher nicht notwendig $u_1 \neq 0$. Jedenfalls $u \neq (0,0,0)$; etwa $u_3 \neq 0$.
Wir haben die beiden Gleichungen

$$\begin{aligned} 0 &= f(u,l) = -u_1 + u_2 l_2 + u_3 l_3\,, \\ 0 &= q(l) = -1 + l_2^2 + l_3^2\,. \end{aligned}$$

Man löse nach l_3 auf, d.h. $l_3 = \frac{u_1 - u_2 l_2}{u_3}$. Dies setze man in die zweite Gleichung ein und rechne die verbleibende Unbekannte l_2 mithilfe quadratischer Ergänzung aus:

$$\begin{aligned} 1 &= l_2^2 + l_3^2 = l_2^2 + \frac{(u_1 - u_2 l_2)^2}{u_3^2} \\ \Leftrightarrow u_3^2 &= u_3^2 l_2^2 + u_1^2 - 2u_1 u_2 l_2 + u_2^2 l_2^2 \\ \Leftrightarrow 0 &= l_2^2 - 2\frac{u_1 u_2}{(u_2^2 + u_3^2)} l_2 + \frac{(u_1^2 - u_3^2)}{(u_2^2 + u_3^2)} \\ \Rightarrow & \\ l_2 &= \frac{u_1 u_2 \pm \sqrt{u_1^2 u_2^2 - (u_1^2 - u_3^2)(u_2^2 + u_3^2)}}{(u_2^2 + u_3^2)} \\ &= \frac{u_1 u_2 \pm \sqrt{-u_1^2 u_3^2 + u_2^2 u_3^2 + u_3^4}}{(u_2^2 + u_3^2)} \\ &= \frac{u_1 u_2 \pm u_3 \sqrt{q(u)}}{(u_2^2 + u_3^2)}\,. \end{aligned}$$

Man sieht, daß die Gerade den Lichtkegel genau dann in zwei verschiedenen Punkten trifft, wenn $q(u)$ Quadrat ist.
Falls $u_1 = 0$, hat man $q(u) = u_2^2 + u_3^2$, also ist $q(u)$ Quadrat, denn Ω

ist pythagoräisch. Bemerke, daß $u = (0, u_2, u_3)$ dann und nur dann Pol einer Geraden $f(u,x) = 0$ ist, wenn die Gerade durch den Nullpunkt $O = (1,0,0)$ von H_1 geht. Mit anderen Worten, alle mit O inzidenten Geraden sind Treffgeraden, und O ist ein Punkt der Teilgeometrie $\mathcal{T}$.

Seien jetzt zwei Geraden $h_1, h_2 \subset \mathcal{T}$ mit Schnittpunkt $S \in \mathcal{T}$ gegeben. h_1 werde durch $f(v_1, x) = 0$ beschrieben, und h_2 durch $f(v_2, x) = 0$. Es sei $u = v_1 + v_2$. Nach Voraussetzung dürfen wir, da $\sqrt{q(v_1)}$ und $\sqrt{q(v_2)}$ existieren, annehmen, daß v_1 und v_2 auf $q(v_1) = q(v_2) = 1$ normiert sind. Da sich h_1 und h_2 in S schneiden sollen, gilt $f(v_1, v_2) \geq 0$, d.h. $q(u) = 2(1 + f(v_1, v_2))$ kann nicht Null sein.
Betrachte dann die Spiegelung $\sigma_g(x) = x - 2\frac{f(u,x)}{q(u)}u$ an der Geraden $f(u,x) = 0$. Weil g mit dem Punkt $S \in \mathcal{T}$ inzidiert, gehört diese Gerade zur Teilgeometrie. σ_g induziert offenbar eine involutorische Projektivität $\Sigma_g = \mathcal{P}(\sigma_g)$ aus $\mathcal{P}(O(1,2))$.

Wir zeigen schließlich, daß $\Sigma_g(h_1) = h_2$; da Σ_g involutorisch ist, folgt daraus unmittelbar $\Sigma_g(h_2) = h_1$. Da aber Σ_g die Menge $\mathcal{T}$ auf sich abbildet (denn es gilt $\Sigma_g(\mathcal{L}) = \mathcal{L}$), haben wir dann das Resultat: Die Gerade g ist die gesuchte Winkelhalbierende.

Sei $z \in h_1$, also $f(v_1, z) = 0$. Es läßt sich leicht einsehen, daß $f(v_2, \sigma_g(z)) = 0$ ist:

$$\begin{aligned}
f(v_2, \sigma_g(z)) &= f(v_2, z) - 2\frac{f(u,z)}{q(u)}f(v_2, u) \\
&= f(v_2, z) - 2\frac{f(v_2,z)}{q(u)}f(v_2, u) \\
&= f(v_2, z)[1 - 2\frac{f(v_2,u)}{q(u)}] \\
&= f(v_2, z)[1 - 2\frac{f(v_1,v_2) + q(v_2)}{q(u)}] \\
&= f(v_2, z)[1 - 2\frac{f(v_1,v_2) + 1}{q(u)}] \\
&= 2\frac{f(v_2,z)}{q(u)}[\frac{1}{2}q(v_1 + v_2) - f(v_1, v_2) - 1] \\
&= 0.
\end{aligned}$$

<u>Fazit</u>: Die Existenz der Winkelhalbierenden ist jedenfalls gewährleistet, wenn $q(v_1)$,$q(v_2)$ Quadrate, d.h. wenn h_1 und h_2 Treffgeraden sind. Dies ist der Grund, weshalb wir zur Teilgeometrie nur Geraden mit dieser Eigenschaft zählen wollen.

Wir geben noch eine algebraische Charakterisierung der Punkte der Teilgeometrie. Sei $x = (1, x_2, x_3)$ ein Punkt mit $x_2^2 + x_3^2 < 1$, und $g : f(u,y) = 0$ eine mit x inzidierende Gerade, d.h. $-u_1 + u_2x_2 + u_3x_3 = 0$. Dann und nur dann ist g Treffgerade, wenn $q(u)$ Quadrat ist. Wir fragen: Unter welcher Voraussetzung ist *jede* mit x inzidente Gerade Treffgerade? D.h. wann ist $q(u)$ ein Quadrat in Ω, sofern u die eine Zusatzbedingung $u_1 = u_2x_2 + u_3x_3$ befriedigt?

Man erkennt, daß sich diese Bedingung im Falle $x = (1,0,0)$ $u_1 = 0$ liest, woraus sofort folgt, daß $\sqrt{q(u)}$ stets existiert.
Der Fall $u_2 = u_3 = 0$ kann nicht eintreten, weil dann u der Nullvektor sein müßte. Also gilt $u_2^2 + u_3^2 \neq 0$, und wir können $q(u)$ folgendermaßen schreiben:

$$q(u) = (u_2^2 + u_3^2)[1 - \frac{(u_2x_2 + u_3x_3)^2}{(u_2^2 + u_3^2)}]$$

Der Punkt x wird demnach genau dann zu $\mathcal{T}$ gehören, wenn der Ausdruck

$$1 - \frac{(u_2x_2 + u_3x_3)^2}{(u_2^2 + u_3^2)}$$

Quadrat ist. Aufgrund der Pythagoräizität von Ω ist dies natürlich gleichbedeutend mit der Forderung,

$$(u_2^2 + u_3^2) - (u_2x_2 + u_3x_3)^2 \tag{54}$$

möge Quadrat sein für beliebige u_2, u_3 aus Ω.

Es sei noch auf eine zweite Charakterisierung der Punkte unserer pseudo- hyperbolischen Geometrie hingewiesen: Ein Punkt aus $\mathcal{H}$ gehört genau dann zu $\mathcal{T}$, wenn es ein Paar orthogonaler Treffgeraden gibt, die mit dem Punkt inzidieren. Zum Beweis bemerken wir, daß der Pol w einer beliebigen mit dem in Rede stehenden Punkt inzidente Gerade eine Linearkombination der Pole u,v der zueinander senkrechten Treffgeraden ist; nach Voraussetzung sind $q(u)$ und $q(v)$ Quadrate. Es ist $w = \lambda u + \mu v$, und daher berechnet sich $q(w)$ zu $q(w) = \lambda^2 q(u) + \mu^2 q(v)$. Daraus entnimmt man, daß $q(w)$ Quadrat ist. Das ist die Behauptung.

7.3 Die Hilbertschen Inzidenzaxiome in der pseudo- hyperbolischen Geometrie

Wir wollen nun zusehen, ob die pseudo- hyperbolische Geometrie $\mathcal{T}$, abgesehen von irgendwelchen Anordnungstatsachen, ein Modell der ebenen absoluten Protogeometrie darstellt.

Schauen wir uns also zuerst die Hilbertschen Inzidenzaxiome an. Es ist klar, daß bei Eindeutigkeitsaussagen wie dem Axiom I 2. nichts zu beweisen ist, da die entsprechende Aussage ja schon in der die Teilgeometrie enthaltenden euklidischen Ebene Ω^2 erfüllt ist. Axiom I 1. verlangt, daß zu je zwei Punkten stets eine Verbindungsgerade existiert. Sind A und B Punkte von $\mathcal{T}$, so sei g die Ω^2- Gerade, die beide Punkte enthält. Weil nun jede mit A (oder B) inzidente Gerade nach Voraussetzung den Einheitskreis trifft, gilt dies insbesondere für g. Daher ist g die gesuchte Gerade.

Es gibt wenigstens drei Punkte, die nicht auf einer Geraden liegen:
Die Punkte $O = (1, 0, 0)$, $P_1 = (1, \frac{1}{2}, 0)$, $P_2 = (1, 0, \frac{1}{2})$ sind nicht kollinear, und sie gehören zu $\mathcal{T}$.
Den Nachweis des ersten Teils des Axioms I 2. erbringen wir im Anschluß an die Verifikation der Orthogonalitätsaxiome in Kapitel 7.2.

7.4 Die Orthogonalitätsaxiome

7.4.1 Die Orthogonalitätsaxiome der ebenen absoluten Geometrie

Die Axiome der Orthogonalität, wie sie standardmäßig in der ebenen absoluten Geometrie ohne Kongruenz formuliert werden ([Sperner, 1959], S. 6), sind:
O 1: Ist die Gerade g senkrecht zu der Geraden h, so ist auch h senkrecht zu g.
O 2: Senkrechte Geraden haben einen Punkt gemein.
O 3: Durch jeden Punkt gibt es zu jeder Geraden genau eine Senkrechte.

Von der ebenen absoluten Protogeometrie, in der die Orthogonalität anstelle der Kongruenz als Grungrelation eingeführt worden war, wird man verlangen, daß O 1 bis O 3 erfüllt sind.

7.4.2 Gültigkeit der Orthogonalitätsaxiome in der pseudo- hyperbolischen Geometrie

Bekanntlich gelten die genannten Orthogonalitätsaxiome in der ebenen reellen euklidischen und hyperbolischen Geometrie; dort sind die Axiome Folgerungen aus den Axiomengruppen I - III Hilberts.
Wir machen uns zunächst klar, daß O 1, O 2, O 3 in der Geometrie $\mathcal{H}$ über dem Körper K((t)) erfüllt sind.

O 1 folgt unmittelbar aus der Symmetrie der Bilinearform f.

Zum Beweis von O 2 nehmen wir uns zwei zueinander senkrechte Geraden g, h her; sie seien beschrieben durch

$$\begin{aligned} g &: \quad f(u,x) = 0\,, \\ h &: \quad f(v,x) = 0\,; \quad f(u,v) = 0\,. \end{aligned}$$

Die Vektoren u und v sind raumartig; span(u,v) besteht bis auf den Nullvektor nur aus raumartigen Vektoren: Sei nämlich $z = \lambda u + \mu v$, dann ist $q(z) = \lambda^2 q(u) + \mu^2 q(v)$, also in der Tat $q(z) > 0$.
Bevor O 2 verifiziert wird, soll das folgende Lemma bewiesen werden, das wir übrigens in umgekehrter Richtung und im Falle $K = \mathbf{R}$ schon einmal, nämlich in Kap. 4.5 (S. 30) benutzt haben.

Lemma : Wenn span(u,v) nur aus raumartigen Vektoren besteht, so ist der (eindimensionale) Unterraum $u^\perp \cap v^\perp$ zeitartig.

Beweis. Sei $u^\perp \cap v^\perp = \Omega.\xi$; wir haben zu zeigen, daß $q(\xi) < 0$ gilt.
Annahme (i): ξ ist raumartig. Dann muß $\xi^\perp = span(u,v)$ einen zeitartigen Vektor enthalten (das liefert dann den Widerspruch): denn jedenfalls gilt $\Omega^3 = (\Omega.\xi) + \xi^\perp$. In Ω^3 gibt es ζ mit $q(\zeta) < 0$; andererseits existieren $\lambda \in K$ und $\chi \in \xi^\perp$, so daß $\zeta = \lambda\xi + \chi$. Es folgt $q(\zeta) = \lambda^2 q(\xi) + q(\chi)$, d.h. es muß notwendig $q(\chi) < 0$ gelten. Also enthält $\xi^\perp$ einen zeitartigen Vektor.
Annahme (ii): ξ ist lichtartig. Dann gilt $\xi \in \xi^\perp = span(u,v)$: Widerspruch.

Aus dem Lemma folgt nun die Gültigkeit von Axiom O 2: Beachte $u^\perp = g$, $v^\perp = h$, d.h. $g \cap h \subset \mathcal{H}$.

Schließlich bestätigt man auch O 3 für die Geometrie $\mathcal{H}$. Seien eine beliebige Gerade $g \subset \mathcal{H}$ sowie ein Punkt $z \in \mathcal{H}$ gegeben; g sei dargestellt durch $f(u,x) = 0$. Bezeichne h die die Punkte u und z verbindende Gerade. Da f nichtentartet, gibt es einen (raumartigen) Vektor v derart, daß h in Form der Gleichung $f(v,x) = 0$ gegeben wird. Offenbar gilt $g \perp h$. Außerdem ist h durch die beiden Bedingungen $z \in H$, $h \perp g$ eindeutig bestimmt. Man hat für $v = (v_1, v_2, v_3)$ das homogene lineare Gleichungssystem

$$\begin{aligned} f(u,v) &= 0, \\ f(z,v) &= 0. \end{aligned}$$

Da u,z linear unabhängig sind, ist der Rang dieses Gleichungssystems gleich 2, also ist v bis auf einen Proportionalitätsfaktor eindeutig festgelegt. Es folgt die Behauptung.

Wir sind jetzt in der Lage, die sämtlichen Orthogonalitätsaxiome auch für die pseudo- hyperbolische Geometrie $\mathcal{T}$ zu bestätigen.
Axiom O 1 ist auf jeden Fall klar.
Zu O 2 bemerke, daß nur noch zu zeigen ist, daß der (in $\mathcal{H}$ existierende) Schnittpunkt zueinander senkrechter Geraden sogar in $\mathcal{T}$ liegt. Dies folgt sofort aus der Tatsache, daß der Schnittpunkt mit einem Paar orthogonaler Treffgeraden inzidiert.
Um Axiom O 3 zu verifizieren, genügt es, die in dem Axiom enthaltene Existenzaussage nachzuweisen, d.h. es gibt durch jeden Punkt zu jeder Geraden wenigstens eine Senkrechte. Seien zu diesem Zweck $z \in \mathcal{T}$, $g \subset \mathcal{T}$, $g : f(u, x) = 0$ vorgelegt. Die Verbindungsgerade h der Punkte u und z ist zu g senkrecht; da $z \in h$, ist also h Treffgerade, die mit wenigstens einem Punkt aus $\mathcal{T}$ inzidiert. Das ist die Behauptung.

Wir sind jetzt in der Lage, die Teilaussage des Inzidenzaxioms I 2.: „Auf jeder $\mathcal{T}$- Geraden liegen wenigstens zwei Punkte“ zu bestätigen.
Es ist zu zeigen: Jede $\mathcal{H}$- Gerade, die wenigstens einen Punkt P aus $\mathcal{T}$ enthält, inzidiert noch mit einem weiteren Punkt aus $\mathcal{T}$.
<u>1. Fall</u>: Die Gerade enthält den „Nullpunkt“ $O = (1, 0, 0)$ nicht.
Fälle das Lot l durch O auf die betrachtete Gerade g. Der Lotfußpunkt F gehört nach der zweiten Charakterisierung der $\mathcal{T}$- Punkte ebenfalls zu $\mathcal{T}$. Wenn F von P verschieden ist, sind wir fertig. Gelte also $F = P$. Dann bezeichne Σ_l die Spiegelung an l. Es muß einen Punkt $R \in \mathcal{T}$ geben, der kein Fixpunkt der Spiegelung Σ_l ist.[64] Folglich ist $R \notin l$. Fälle jetzt das Lot k durch R auf g; dann ist der Lotfußpunkt $S = k \cap g$ von O verschieden, weil R nicht auf l liegt.
<u>2. Fall</u>: Die Gerade inzidiert mit dem Nullpunkt.
Wir sind fertig, wenn P von O verschieden ist. Gelte also $P = O$. Es gibt sicher einen Punkt Q mit $Q \in \mathcal{T}$, $Q \notin g$; fälle das Lot l auf g durch Q. Der Lotfußpunkt F gehört dann zu $\mathcal{T}$. Falls $F \neq O$, sind wir fertig. Gelte $F = O$; sei Σ_l die Spiegelung am Lot l. Es existiert ein Punkt $R \in \mathcal{T}$, welcher kein Fixpunkt von Σ_l ist. Wir wenden nun das Argument von vorhin an.

7.5 Der Mittelpunkt

7.5.1 Spiegelungsgeometrische Vorüberlegung zum Mittelpunkt

In der Spiegelungsgeometrie ist der Mittelpunkt einer Strecke AB definiert als der Fixpunkt derjenigen involutorischen Bewegung der Geraden

[64] Dies folgt aus der Tatsache, daß es an jeder $\mathcal{T}$- Geraden wenigstens eine Spiegelung gibt. Spiegelungen sind aber per Definition von der Identität verschieden!

AB auf sich, welche die Punkte A und B miteinander vertauscht.[65]

Seien A, B zwei Punkte von $\mathcal{T}$. Es gibt eine notwendige Bedingung für die Existenz des Mittelpunktes M der Strecke AB ($M^\perp$ bezeichne den auf der Geraden $g = AB$ liegenden zu M polaren Punkt; DV ist das Doppelverhältnis):

$$DV(A, B, M, M^\perp) = -1\,, \tag{55}$$

d.h. die Punktepaare A, B und M, $M^\perp$ müssen sich harmonisch trennen.

Beweis. Nach Definition des Mittelpunktes ist Folgendes zu zeigen: Für die involutorische Projektivität Σ_M der Geraden $g = AB$ mit Fixpunkt M und $\Sigma_M(\mathcal{L}) = \mathcal{L}$ gilt

$$DV(A, \Sigma_M(A), M, M^\perp) = -1\,. \tag{56}$$

Dies ist eine wohlbekannte Beziehung zwischen Urbild und Bildpunkt involutorischer Projektivitäten einer projektiven Geraden, welche zwei Fixpunkte haben.[66] Berücksichtige, daß Σ_M den Lichtkegel invariant lassen soll, d.h. der zugehörige Vektorraumisomorphismus $\sigma_m : \Omega^2 \mapsto \Omega^2$ mit Fixgerade $\Omega.\,m$, $M = \pi(m)$, liegt in $O^+(1,1)$. Daraus folgt unmittelbar, daß Σ_M nicht nur M, sondern auch $M^\perp$ zum Fixpunkt hat, denn $\sigma_m(\Omega.\,m) = \Omega.\,m$ impliziert $\sigma_m(\{\Omega.\,m\}^\perp) = \{\Omega.\,m\}^\perp$.

Die Doppelverhältnisbedingung soll nun mit den Körperelementen $q(a)$ und $q(b)$ ($A = \pi(a)$, $B = \pi(b)$) in Beziehung gebracht werden.
Da M und $M^\perp$ auf der Verbindungsgeraden $g = AB$ liegen sollen, muß es $\lambda, \mu \in \Omega$ mit $\lambda, \mu \neq 0$ geben derart, daß

$$\begin{aligned} M &= \pi(\lambda.a + b)\,, \\ M^\perp &= \pi(\mu.a + b)\,. \end{aligned}$$

Aus der Bedingung der polaren Lage der Punkte M und $M^\perp$ folgt damit

$$0 = \lambda\mu q(a) + (\lambda + \mu) f(a, b) + q(b)\,. \tag{57}$$

Eine zweite Gleichung ergibt sich aus der Formel für das Doppelverhältnis. Wir bemerken dazu, daß die folgende Gleichung eine explizite Berechnung des Doppelverhältnisses erlaubt:

$$DV(x, y, \alpha_1 x + \alpha_2 y, \beta_1 x + \beta_2 y) = \frac{\beta_1}{\beta_2} : \frac{\alpha_1}{\alpha_2}\,.$$

[65] Eine ausführliche Darstellung der Spiegelungsgeometrie auf dem Stand zu Beginn der Siebziger Jahre gibt [Bachmann, 1973].

[66] Siehe z.B. [Samuel, 1988], S. 62 (Theorem 30).

Damit erhalten wir aus der Beziehung $-1 = DV(A, B, M, M^{\perp})$:

$$-1 = \frac{\mu}{\lambda}. \tag{58}$$

Die Gleichungen und zusammen implizieren daher

$$0 = -\lambda^2 q(a) + q(b),$$

das heißt,

$$\lambda^2 = \frac{q(b)}{q(a)}. \tag{59}$$

Betrachte jetzt in der pseudo- hyperbolischen Ebene die beiden Punkte $A = (1, 0, 0)$, $B = (1, \frac{1}{2}, 0)$. Gesucht sind zwei Punkte M, $M^{\perp}$ auf der Geraden AB, die zueinander polar sind und die Eigenschaft haben, daß sich A, B einerseits und M, $M^{\perp}$ andererseits harmonisch trennen. Diese Forderungen werden in den Gleichungen ausgedrückt

$$m = \lambda a + b \tag{60}$$

$$m^{\perp} = \mu a + b \tag{61}$$

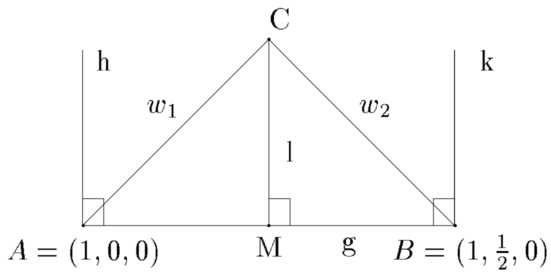
$$f(m, m^{\perp}) = 0 \tag{62}$$

$$DV(A, B, M, M^{\perp}) = -1 \tag{63}$$

Man findet: $M = (1, 2 - \sqrt{3}, 0)$ und $M^{\perp} = (1, 2 + \sqrt{3}, 0)$. Aber M gehört nicht der Teilgeometrie an. Um dies einzusehen, fälle man das Lot $l : f(v, x) = 0$ durch M auf die Verbindungsgerade $g = AB$; letztere hat den Pol $e_3 = \mathsf{K} = (0, 0, 1)$. Damit ist l gegeben als Verbindungsgerade der Punkte M und K, d.h. $v = \mathsf{K} \wedge m = \mathsf{K} \wedge (\mathsf{I} + (2 - \sqrt{3})\mathsf{J})$. Man erinnere sich an die Multiplikationsliste des hyperbolischen Vektorproduktes. Es ergibt sich

$$\begin{aligned} v &= \mathsf{J} + (2 - \sqrt{3})\mathsf{I} \\ &= (2 - \sqrt{3}, 1, 0). \end{aligned}$$

Damit l Treffgerade sein kann, ist notwendig, daß q(v) Quadrat ist. Nun errechnet man $q(v) = -6 + 4\sqrt{3}$. In Kapitel 6, Abschnitt 4.3, war aber gezeigt worden, daß $\gamma = -6 + 4\sqrt{3}$ in Ω kein Quadrat ist. Folglich ist das Lot keine Treffgerade, und M gehört nicht zu $\mathcal{T}$. Die Strecke AB hat demnach in $\mathcal{T}$ keinen spiegelungsgeometrischen Mittelpunkt.



7.5.2 Der Mittelpunkt in der Protogeometrie

Wir zeigen: Die Lorenzensche Konstruktion des Mittelpunktes liefert für M dieselben Koordinaten wie die spiegelungsgeometrisch berechneten. Also existiert in dem Beispiel der Mittelpunkt auch protogeometrisch nicht.

$$\begin{aligned} h &= span(a, \mathsf{K})\,; & h: f(u,x) = 0\,, \quad u = a \wedge \mathsf{K}\,. \\ k &= span(b, \mathsf{K})\,; & k: f(v,x) = 0\,, \quad v = b \wedge \mathsf{K}\,. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} u &= \mathsf{I} \wedge \mathsf{K} \\ &= -\mathsf{J} = (0,-1,0)\,; \\ v &= (\mathsf{I} + \frac{1}{2}\mathsf{J}) \wedge \mathsf{K} \\ &= -\mathsf{J} - \frac{1}{2}\mathsf{I} = (-\frac{1}{2}, -1, 0)\,. \end{aligned}$$

Wir normieren die beiden Vektoren u und v auf $q(u) = q(v) = 1$; das ergibt

$$\begin{aligned} u &= (0,-1,0)\,; \\ v &= (-\frac{1}{\sqrt{3}}, -\frac{2}{\sqrt{3}}, 0)\,. \end{aligned}$$

Es gibt je zwei Winkelhalbierende durch A und B; w_1 kann den Pol $e_3+u = (0,-1,1)$ oder $e_3-u = (0,1,1)$ haben; entsprechend gibt es für w_2 die beiden Möglichkeiten $e_3+v = (-\frac{1}{\sqrt{3}}, -\frac{2}{\sqrt{3}}, 1)$ und $e_3-v = (\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{2}{\sqrt{3}}, 1)$. Im folgenden sollen mit w_1, w_2 auch die Pole der gleichbezeichneten Winkelhalbierenden abgekürzt werden. Dann gilt also $w_1 = (0, \pm 1, 1)$; $w_2 = (\pm 1, \pm 2, \sqrt{3})$. Dies ergibt vier verschiedene Vorzeichenkombinationen. Anschaulich ist es klar, daß sich die Winkelhalbierenden in genau zwei Fällen innerhalb von $\mathcal{H}$ schneiden werden, und zwar in einem Punkt, der spiegelungssymmetrisch bezüglich der Geraden g liegt. In den beiden anderen

Fällen sollten sich die Winkelhalbierenden außerhalb des Fundamentalkreises $\mathcal{H}$ treffen. Die Rechnung bestätigt dies. Sei C der Schnittpunkt der Geraden w_1, w_2; d.h. $C = (c_1, c_2, c_3)$ löst das homogene lineare Gleichungssystem

$$\begin{aligned} f(w_1, x) &= 0\,, \\ f(w_2, x) &= 0\,. \end{aligned}$$

Wählt man die Vorzeichen in den definierenden Gleichungen von w_1 und w_2 gleichartig, so erhält man für C die Koordinaten $C = (2-\sqrt{3}, 1, 1)$ bzw. $C = (-2+\sqrt{3}, -1, 1)$. In diesen beiden Fällen ist der Schnittpunkt ersichtlich raumartig. Eine gleichartige Vorzeichenverteilung bleibe daher unberücksichtigt.
Dagegen ist in den Fällen $w_1 = e_3+u$ und $w_2 = e_3-V$ bzw. $w_1 = e_3-u$ und $w_2 = e_3+V$ der Punkt C innerhalb von $\mathcal{H}$ gelegen; die erste Kombination ergibt $C = (2+\sqrt{3}, 1, 1)$, die zweite $C = (-2-\sqrt{3}, -1, 1)$.
Wir haben dann das Lot durch C auf g zu errichten. Dazu hat man den Punkt C mit dem Pol e_3 von g zu verbinden. Der Pol z von l ist daher gegeben durch $z = e_3 \wedge c$. Schließlich sind die Geraden l und g zum Schnitt zu bringen; der Schnittpunkt M löst also das homogene lineare Gleichungssystem

$$\begin{aligned} f(e_3, x) &= 0\,, \\ f(z, x) &= 0\,. \end{aligned}$$

Für $C = (2+\sqrt{3}, 1, 1)$ erhält man $z = (1, 2+\sqrt{3}, 0)$, und die Koordinaten von M werden $M = (2+\sqrt{3}, 1, 0)$. Dasselbe Ergebnis findet man bei $C = (-2-\sqrt{3}, -1, 1)$. Offenbar stimmt der so gefundene Mittelpunkt mit seinem spiegelungsgeometrischen Pendant überein![67]
Daraus folgt: es gibt weder den spiegelungsgeometrischen, noch den protogeometrischen Mittelpunkt der Strecke AB der pseudo- hyperbolischen Ebene $\mathcal{T}$.

[67] Multipliziere den Vektor $m = (2+\sqrt{3}, 1, 0)$ mit der Zahl $(2-\sqrt{3})$.

8 Zusammenfassung

Janich gelingt es nicht, die euklidische Geometrie auf befriedigende Weise vor ihren beiden nichteuklidischen Schwestern auszuzeichnen.

Die These, wonach die Keil- Kerbe- Invarianz diese Auszeichnung herbeiführen würde, ist falsch, weil diese Invarianz auch im hyperbolischen und sogar im elliptischen Raum gegeben ist.

Lorenzens Formprinzip ist zwar wesentlich stärker als die Keil- Kerbe- Invarianz Janichs, denn weder in der hyperbolischen noch in der elliptischen Geometrie gibt es ähnliche nicht kongruente Dreiecke.
Trotzdem reicht das Formprinzip ohne gleichzeitiges Voraussetzen des Archimedischen Axioms nicht aus, um auf das Parallelenaxiom Euklids schließen zu können: Dehns semieuklidische Ebene ist hierfür ein Beispiel.

Die Frage nach dem Bestehen der freien Beweglichkeit in der Protogeometrie konnte unter Voraussetzung des Formprinzips positiv beantwortet werden.
Will man das Formprinzip nicht gelten lassen, so rücken Anordnungsfragen ins Zentrum der Überlegungen. Das Pasch- Axiom garantiert zunächst die Konvexität der Ebene, und die Konvexität zieht zusammen mit dem Axiom der Halbierbarkeit aller Winkel die Halbierbarkeit aller Strecken und damit also die freie Beweglichkeit nach sich.

Es wäre daher wünschenswert, wenn sich die Protophysiker um eine ihrer Bedeutung angemessenen Begründung der Anordnung, insbesondere des Axioms von Pasch, Gedanken machen würden. Wir sind der Meinung, daß dies bisher noch nicht in zufriedenstellender Form geschehen ist.

Literatur

[Bachmann, 1964] F. Bachmann. Zur Parallelenfrage. *Abh. aus dem Math. Sem. der Uni. Hamburg*, 27:173 – 192, 1964.

[Bachmann, 1973] F. Bachmann. *Aufbau der Geometrie aus dem Spiegelungsbegriff*. Berlin [usw.], 2. Auflage, 1973.

[Böhme, 1976] G. Böhme (Hrsg.), *Protophysik. Suhrkamp- Reihe „Theorie- Diskussion“*. Frankfurt, 1976.

[Bopp, 1969] E. Bopp. Die Entwicklung geometrischer Begriffe aus dem Urbegriff des starren Körpers. *Der Mathematikunterricht*, 15(2):29 – 43, 1969. Der Raum und die Geometrie. Hrsg. von K. Fladt.

[Dehn, 1900] M. Dehn. Die Legendreschen Sätze über die Winkelsumme im Dreieck. *Math. Annalen*, 53:404 – 439, 1900.

[Diller, 1963] J. Diller. *Metrische Ebenen mit freier Beweglichkeit*. Dissertation, Kiel, 1963.

[Diller, 1970] J. Diller. Eine algebraische Beschreibung der metrischen Ebenen mit ineinander beweglichen Geraden. *Abh. aus dem Math. Sem. der Uni. Hamburg*, 34:184 – 202, 1970.

[Dingler, 1919] H. Dingler. *Grundlagen der Physik. Synthetische Prinzipien der mathematischen Naturphilosophie*. Berlin und Leipzig, 1919.

[Hessenberg, 1967] G. Hessenberg, J. Diller. *Grundlagen der Geometrie*. Berlin, 1967.

[Hilbert, 1962] D. Hilbert. *Grundlagen der Geometrie*. Stuttgart, 9. Auflage, 1962.

[Hjelmslev, 1916] J. Hjelmslev. Die Geometrie der Wirklichkeit. *Acta Mathematica*, 40:35 – 66, 1916.

[Hjelmslev, 1923] J. Hjelmslev. *Die natürliche Geometrie*. Hamburg, 1923.

[Hjelmslev, 1929] J. Hjelmslev. Einleitung in die Allgemeine Kongruenzlehre. *Det Kgl. Danske Vidensk. Selskap, Matem.- Fys. Meddelelser (Kopenhagen)*, 8 (1929); ibd. 10 (1929); ibd. 19 (1942); ibd. 22 (1945); ibd. 25 (1949).

[Inhetveen, 1983] R. Inhetveen. *Konstruktive Geometrie. Eine formentheoretische Begründung der euklidischen Geometrie.* Mannheim [usw.], 1983.

[Janich, 1979] P. Janich. Das Maß der Masse. In K. Lorenz (Hrsg.), *Konstruktionen versus Positionen*, Bd. I, Seite 340– 350. Berlin/ New York, 1979.

[Janich, 1980] P. Janich. *Die Protophysik der Zeit.* Frankfurt, 1980.

[Janich, 1992] P. Janich. Die technische Erzwingbarkeit der Euklidizität. In P. Janich (Hrsg.), *Entwicklungen der methodischen Philosophie*, Seite 68 – 84, Frankfurt, 1992.

[Janich, 1992b] P. Janich. *Grenzen der Naturwissenschaft. Erkennen als Handeln.* München, 1992.

[Janich, 1996] P. Janich. Was heißt und woher wissen wir, daß unser Erfahrungsraum dreidimensional ist? *Sitzungsberichte der Wissenschaftl. Gesellsch. a. d. Johann Wolfgang Goethe- Universität Frankfurt a. M.*, 34(2), 1996.

[Janich, 1997] P. Janich. *Kleine Philosophie der Naturwissenschaften.* München, 1997.

[Kamlah, 1979] A. Kamlah. Zur Diskussion um die Protophysik. In K. Lorenz (Hrsg.), *Konstruktionen versus Positionen, Bd. I*, Seite 311–339. Berlin/ New York, 1979.

[Klingenberg, 1971] W. Klingenberg. *Grundlagen der Geometrie.* Mannheim [usw.], 1971.

[Lorenzen, 1961] P. Lorenzen. Das Begründungsproblem der Geometrie als Wissenschaft der räumlichen Ordnung. *Philosophia naturalis*, 6:415– 431, 1961.

[Lorenzen, 1974] P. Lorenzen. *Methodisches Denken.* Frankfurt, 1974.

[Lorenzen, 1977] P. Lorenzen. Eine konstruktive Theorie der Formen räumlicher Figuren. *Zentralblatt der Mathematik*, 9:95– 99, 1977.

[Lorenzen, 1984] P. Lorenzen. *Elementargeometrie. Das Fundament der analytischen Geometrie.* Mannheim [usw.], 1984.

[Naber, 1988] G. L. Naber. *Spacetime and singularities. An introduction.* London Mathematical Society, Cambridge, 1988. Student texts 11.

[Pejas, 1961] W. Pejas. Die Modelle des Hilbertschen Axiomensystems der absoluten Geometrie. *Math. Annalen*, 143:212– 235, 1961.

[Perron, 1962] O. Perron. *Nichteuklidische Elementargeometrie der Ebene.* Stuttgart, 1962.

[Pickert, 1951] G. Pickert. *Einführung in die Höhere Algebra.* Göttingen, 1951.

[Poincaré, 1928] H. Poincaré. *La science et l' hypothése.* Deutsch von F. und L. Lindemann, Leipzig, 1928. Nachdruck der 3. Aufl.

[Samuel, 1988] P. Samuel. *Projective Geometry.* New York, 1988.

[Sexl, 1982] R. Sexl, H. Urbantke. *Relativität, Gruppen, Teilchen.* Wien, New York, 2. Auflage, 1982.

[Sperner, 1959] E. Sperner. Kongruenz und Bewegung. *Mitteilungen der Math. Gesellsch. Hamburg*, 9:5– 11, 1959.

Erklärung

Hiermit versichere ich, daß ich die vorliegende Diplomarbeit selbständig verfaßt und keine anderen als die angegebenen Quellen und Hilfsmittel benutzt habe.

Marburg, den 30. September 1998.