

# Untersuchungen zur Weyl-Berry-Lapidus-Vermutung

Jürgen Gerling, Universität Osnabrück

März 1992

# Inhaltsverzeichnis

<b>Einleitung</b>	<b>3</b>
<b>Schreibweisen und Definitionen</b>	<b>11</b>
<b>1 Grundlagen</b>	<b>12</b>
1.1 Eigenwertprobleme und Variationsformulierung . . . . .	13
1.1.1 SOBOLEV-Räume . . . . .	13
1.1.2 Gleichmäßig elliptische Differentialoperatoren . . . . .	15
1.1.3 Sesquilinearformen und Koerzivität . . . . .	16
1.1.4 Gleichungen mit homogenen DIRICHLET-Randbedingungen . . . . .	18
1.1.5 NEUMANN-Randbedingungen . . . . .	20
1.1.6 Formulierung von Eigenwertproblemen . . . . .	21
1.2 Variationseigenwertprobleme und Maximum-Minimumprinzip . . . . .	22
1.2.1 Eigenwerttheorie symmetrischer kompakter Operatoren . . . . .	22
1.2.2 COURANTSches Maximum-Minimumprinzip . . . . .	25
1.2.3 $i$ -Weite und Approximationstheorie . . . . .	26
1.3 Zustandszahlfunktion . . . . .	30
1.4 MINKOWSKI- und HAUSDORFF-Dimension . . . . .	32
<b>2 Der Satz von Lapidus</b>	<b>38</b>
2.1 Formulierung des Satzes . . . . .	38
2.2 Hilfssätze für den Beweis . . . . .	41
2.3 Beweis des Satzes . . . . .	46
2.3.1 DIRICHLET-Problem ( $V = H_0^m(\Omega)$ ) . . . . .	46
2.3.2 NEUMANN-Problem ( $V = H^m(\Omega)$ ) . . . . .	54

<b>3</b>	<b>Laplace-Operator und Dirichlet-Problem</b>	<b>57</b>
3.1	Abschätzung der Zustandszahlfunktion . . . . .	58
3.1.1	Ergebnisse von LAPIDUS . . . . .	58
3.1.2	Verbesserung der Abschätzung . . . . .	59
3.2	Selbstähnliche Fraktale . . . . .	67
3.2.1	Vorbetrachtungen . . . . .	67
3.2.2	Der generische Fall . . . . .	69
3.2.3	Diskussion der Funktion $f_{n,\omega}$ . . . . .	76
3.2.4	Dimension des Graphen von $f_{n,\omega}$ . . . . .	79
3.2.5	Schwingungen CANTOR-ähnlicher Saiten . . . . .	88
3.2.6	Diskussion der Funktion $f$ . . . . .	90
<b>A</b>	<b>Behandlung einiger Grundgebiete</b>	<b>98</b>
A.1	$n$ -dimensionaler Würfel . . . . .	98
A.2	Gleichseitiges Dreieck . . . . .	99
A.3	Simpliziale Gebiete . . . . .	100
<b>B</b>	<b>Modellsysteme</b>	<b>105</b>
B.1	Triadische CANTOR-Saite . . . . .	105
B.2	BROSSARD-CARMONA-Gebiet . . . . .	106
B.3	Würfelschwamm . . . . .	106
B.4	Sierpinski-Pfeilspitzenmembran . . . . .	107
B.5	Simplizialer Dreiecksteppich . . . . .	108
B.6	Simplizialer Tetraederschwamm . . . . .	108
B.7	Kartoffelteppich . . . . .	108
B.8	Abbildungen der Zustandszahlfunktionen . . . . .	110
B.9	Abbildungen der Funktionen $f_{n,\omega}$ , $F_{n,\omega}$ und $g_{n,\omega}$ . . . . .	116
	<b>Literaturhinweise</b>	<b>127</b>

# Einleitung

In vielen Bereichen der Physik spielen Eigenwertprobleme mit Randbedingungen eine große Rolle. Häufig ist eine Eigenwertgleichung auf einem beschränkten (offenen)  $n$ -dimensionalen Gebiet  $\Omega$  mit DIRICHLET-Randbedingungen am Rand  $\Gamma := \partial\Omega$  zu erfüllen, die auf das folgende Problem führt:

$$\begin{aligned} \Leftrightarrow \Delta u &= \lambda u && \text{in } \Omega \\ u &= 0 && \text{auf } \Gamma. \end{aligned} \quad (1)$$

Hierbei bezeichnet  $\Delta = \sum_{k=1}^n \partial^2 / \partial x_k^2$  den  $n$ -dimensionalen LAPLACE-Operator. Um dieses Problem für Gebiete mit beliebigem Rand formulieren zu können—wir sind nämlich an Gebieten mit besonders irregulärem Rand interessiert—, benutzt man die sogenannte FRIEDRICHS-Erweiterung. (Bei den folgenden Ausführungen fallen zwangsläufig einige Begriffe, die wir erst in Kapitel 1 definieren und ausführlich erläutern werden.)

Für alle  $u, v \in C_0^\infty(\Omega)$ , wobei  $C_0^\infty(\Omega)$  den Raum der glatten Funktionen mit kompakten Träger enthalten in  $\Omega$  bezeichnet, gilt  $\int_\Omega \Leftrightarrow \Delta u \cdot v \, dx = \int_\Omega \nabla u \cdot \nabla v \, dx$ , da die Funktionen  $u, v$  am Rand von  $\Omega$  verschwinden und man partiell integrieren kann, ohne daß ein Randterm auftritt. Hierbei bezeichnet  $dx = dx_1, \dots, dx_n$  das übliche LEBESGUESCHE Maß. Man führt nun eine Norm durch  $\|\cdot\|_1^2 = \|\nabla \cdot\|^2 + \|\cdot\|^2$  ein, wobei  $\|\cdot\|$  die aus der Quantenmechanik bekannte Norm bezeichnet,  $\|u\|^2 = \int_\Omega |u|^2 \, dx$ .

Der Satz über die FRIEDRICHS-Erweiterung erlaubt es nun, den LAPLACE-Operator auf den sogenannten SOBOLEV-Raum  $H_0^1(\Omega)$  fortzusetzen. Hierbei ist  $H_0^1(\Omega)$  die Vervollständigung von  $C_0^\infty(\Omega)$  bezüglich der soeben eingeführten (SOBOLEV-)Norm  $\|\cdot\|_1$ .

Ein Skalar  $\lambda$  heißt Eigenwert von (1), falls ein nichttriviales  $u \in H_0^1(\Omega)$  existiert, so daß  $\int_\Omega \nabla u \cdot \nabla v \, dx = \lambda \int_\Omega u \cdot v \, dx$  für alle  $v \in H_0^1(\Omega)$  erfüllt ist. Dabei sind nun alle Ableitungen im Distributionssinne zu verstehen. Man sagt daher in der Regel kurz: Wir verstehen das Problem (1) im Distributionssinne.

Wir wollen im folgenden das Spektrum des so fortgesetzten Operators bei DIRICHLET-Randbedingungen untersuchen. Dieses ist diskret und besteht aus einer abzählbar unendlichen Folge von (positiven) Eigenwerten mit jeweils endlicher Multiplizität,  $\{\lambda_i\}_{i=1}^\infty$ , wobei  $0 < \lambda_k \leq \lambda_l$  für alle  $k \leq l$  und  $\lambda_i \rightarrow +\infty$  für  $i \rightarrow +\infty$ .

Wir interessieren uns für das asymptotische Verhalten der Eigenwerte bezüglich (1) für  $i \rightarrow +\infty$ . Auskunft darüber gibt die sogenannte Zustandszahlfunktion  $\mathcal{N}(\lambda)$ , also die Zahl der (positiven) Eigenwerte kleiner oder gleich  $\lambda$  in Abhängigkeit von  $\lambda$ . Aufgrund von Überlegungen der Statistischen Mechanik vermutete H. A. LORENTZ im Jahre 1910, daß die asymptotische Entwicklung

$$\mathcal{N}(\lambda) \sim \frac{\mathcal{B}_n}{(2\pi)^n} |\Omega|_n \lambda^{\frac{n}{2}}, \quad \text{für } \lambda \rightarrow +\infty \quad (2)$$

gilt, mit  $\mathcal{B}_n = \pi^{\frac{n}{2}} / (\frac{n}{2})!$  als dem Volumen einer  $n$ -dimensionalen Einheitskugel und  $|\Omega|_n$  als  $n$ -dimensionales LEBESGUESCHE Maß von  $\Omega$ , welche im darauffolgenden Jahr von H. WEYL bewiesen wurde [64]. Er äußerte zudem die Vermutung, daß die asymptotische Entwicklung von  $\mathcal{N}(\lambda)$  einen zweiten Term proportional  $\lambda^{\frac{n-1}{2}}$  besitzt, wenn der Rand genügend glatt

ist. Tatsächlich konnte R. SEELEY [52, 53] 1978 bzw. 1980 für den Fall  $n = 3$  zeigen, daß

$$\mathcal{N}(\lambda) = \frac{\mathcal{B}_n}{(2\pi)^n} |\Omega|_n \lambda^{\frac{n}{2}} + O(\lambda^{\frac{n-1}{2}}), \quad \text{für } \lambda \rightarrow +\infty, \quad (3)$$

falls der Rand von  $\Omega$  einen  $C^\infty$ -Rand besitzt, welches für beliebige  $n \geq 1$  von PHAM THE LAI 1981 bewiesen wurde [47]. (Die Notation  $O(\lambda^x)$  bedeutet: Terme, die nicht stärker als  $\lambda^x$  anwachsen.) Unter einer Zusatzvoraussetzung—die Mannigfaltigkeit  $\bar{\Omega}$  besitze nicht zu viele vielfach reflektierende geschlossene Geodäten—kam V. JA. IVRII für beschränkte Gebiete  $\Omega$  mit  $C^\infty$ -Rand 1980 zu folgendem Ergebnis [19]:

$$\mathcal{N}(\lambda) = \frac{\mathcal{B}_n}{(2\pi)^n} |\Omega|_n \lambda^{\frac{n}{2}} \Leftrightarrow \frac{1}{4} \frac{\mathcal{B}_{n-1}}{(2\pi)^{n-1}} |_{n-1} \lambda^{\frac{n-1}{2}} + o(\lambda^{\frac{n-1}{2}}), \quad \text{für } \lambda \rightarrow +\infty, \quad (4)$$

wobei  $o(\lambda^x)$  bedeutet: Terme die schwächer als  $\lambda^x$  anwachsen. Im besonderen gilt für  $n = 2$ , also ebene Membranen mit fest eingespanntem Rand, die Entwicklung, welche schon 1966 vor (4) bekannt war [21]:

$$\mathcal{N}(\lambda) = \frac{\mathcal{A}}{4\pi} \lambda \Leftrightarrow \frac{\mathcal{U}}{4\pi} \sqrt{\lambda} + o(\sqrt{\lambda}), \quad \text{für } \lambda \rightarrow +\infty, \quad (5)$$

wobei  $\mathcal{A}$  die Fläche und  $\mathcal{U}$  den Umfang des zweidimensionalen Gebietes bezeichnen. Für zahlreiche Gebiete (u.a.  $n$ -dimensionaler Würfel, gleichseitiges Dreieck, Kreis, ...) läßt sich die Entwicklung (4) noch weiter verbessern:

$$\mathcal{N}(\lambda) = \frac{\mathcal{B}_n}{(2\pi)^n} |\Omega|_n \lambda^{\frac{n}{2}} \Leftrightarrow \frac{1}{4} \frac{\mathcal{B}_{n-1}}{(2\pi)^{n-1}} |_{n-1} \lambda^{\frac{n-1}{2}} + O(\lambda^\kappa), \quad \text{für } \lambda \rightarrow +\infty, \quad (6)$$

wobei  $0 < \kappa < \frac{n-1}{2}$  eine Konstante darstellt. Eine Reihe von Gebieten, für die eine obere Schranke von  $\kappa$  bekannt ist, sind in Tabelle 3.1 auf Seite 84 aufgeführt.

Wir sieht nun aber die Zustandzahlfunktion aus, wenn das Gebiet  $\Omega$  einen besonders irregulären, genauer: fraktalen Rand besitzt?

Diese Frage wurde zum ersten Mal von M. V. BERRY im Jahre 1979 im Zusammenhang mit der Reflexion von Wellen an einer fraktalen Oberfläche gestellt [3]. Er stellte dabei aufgrund heuristischer Überlegungen die Vermutung auf, daß die Zustandzahlfunktion bei einem Gebiet, dessen Rand die fraktale HAUSDORFF-Dimension  $H \in (n \Leftrightarrow 1, n]$  besitzt, gegeben ist durch

$$\mathcal{N}(\lambda) = \frac{\mathcal{B}_n}{(2\pi)^n} |\Omega|_n \lambda^{\frac{n}{2}} \Leftrightarrow c_{n,H} \mathcal{H}(H; , ) \lambda^{\frac{H}{2}} + o(\lambda^{\frac{H}{2}}), \quad \text{für } \lambda \rightarrow +\infty. \quad (7)$$

Hierbei ist  $\mathcal{H}(H; , )$  das  $H$ -dimensionale HAUSDORFF-Maß von  $, ,$  das hier an die Stelle des  $n$ -dimensionalen LEBESGUESchen Maßes tritt, da es für Fraktale charakteristisch ist, daß diese nicht LEBESGUE-meßbar sind.

Die HAUSDORFF-Dimension  $H$  kann anschaulich folgendermaßen verstanden werden: Sei  $k(\epsilon)$  die Zahl der  $n$ -dimensionalen Kugeln mit Radius  $\leq \epsilon$ , die notwendig sind, um  $, ,$  zu überdecken. Wenn  $k(\epsilon)$  für  $\epsilon \rightarrow 0^+$  anwächst wie  $k(\epsilon) \propto \epsilon^{-H}$ , besitzt  $, ,$  die HAUSDORFF-Dimension  $H$ .

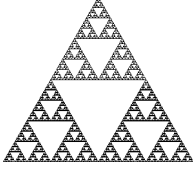


Abbildung 1: SIERPINSKI-Pfeilspitzenmembran. Diese besteht aus der disjunkten Vereinigung von  $3^{i-1}$  gleichseitigen Dreiecken mit der Seitenlänge  $2^{-i}$  ( $i = 1, 2, \dots$ ). Der Rand besitzt die fraktale Dimension  $H = D = \ln 3 / \ln 2$ .

Wir wollen uns dies anhand von (streng) selbstähnlichen Fraktalen überlegen; für diese gilt

$$\Omega = \bigsqcup_{i=1}^N r\Omega \quad (8)$$

mit  $r \in (0, 1)$  und  $N = 2, 3, \dots$ , wobei  $Nr^n < 1$  erfüllt sein muß, damit das Gebiet  $\Omega$  beschränkt bleibt. Ein bekanntes Beispiel für ein solches Fraktal ist der Rand der SIERPINSKI-Pfeilspitzenmembran (Abbildung 1).

Um sich die HAUSDORFF-Dimension derartiger Fraktaler heuristisch zu erschließen, sei zu genügend kleinem  $\epsilon_0 > 0$   $k(\epsilon_0)$  die Zahl der  $\epsilon_0$ -Kugeln, die notwendig sind, um  $\partial\Omega$  zu überdecken. Wegen (8) gilt dann für festes  $\epsilon_0$ :

$$k(r^i \epsilon_0) \propto N^i k(\epsilon_0), \quad \text{für } i \rightarrow +\infty. \quad (9)$$

Wenn wir nun  $r^i \epsilon_0 = \epsilon$  setzen und  $i = \ln(\frac{\epsilon}{\epsilon_0}) / \ln r$  anwenden, folgt:

$$k(\epsilon) \propto \left(\frac{\epsilon}{\epsilon_0}\right)^{\frac{\ln N}{\ln r}} k(\epsilon_0) \propto \epsilon^{-\ln N / \ln r}, \quad \text{für } \epsilon \rightarrow 0^+. \quad (10)$$

Der Rand von Gebieten mit selbstähnlichem Rand im Sinne von (8) besitzt daher die HAUSDORFF-Dimension  $H = \ln N / \ln \frac{1}{r}$ . Für die SIERPINSKI-Pfeilspitzenmembran hat man mit  $N = 3$  und  $r = 1/2$  dann  $H = \ln 3 / \ln 2$ .

Die heuristische Überlegung, die M. V. BERRY angestellt hat, wollen wir hier ebenfalls kurz skizzieren. Die Grundidee besteht darin, das Gebiet  $\Omega$  mit fraktalem Rand, durch eine  $\lambda^{-1/2}$ -geglättete Mannigfaltigkeit  $\tilde{\Omega}$  mit nun glattem Rand,  $\tilde{\cdot}$  zu ersetzen, da Feinheiten des Randes, die unterhalb der Größenordnung von  $\lambda^{-1/2}$  liegen, keinen Einfluß auf das asymptotische Verhalten der Zustandszahlfunktion  $\mathcal{N}$  haben. Dies kann als eine Art Unbestimmtheitsprinzip gedeutet werden. Beachte, daß  $\lambda$  hier *nicht* die Wellenlänge bezeichnet; diese ist proportional zu  $\lambda^{-1/2}$ .

Auf das Gebiet  $\tilde{\Omega}$  kann nun die Entwicklung (4) angewendet werden:

$$\mathcal{N}(\lambda) = \frac{\mathcal{B}_n}{(2\pi)^n} |\tilde{\Omega}(\lambda)|_n \lambda^{\frac{n}{2}} \Leftrightarrow \frac{1}{4} \frac{\mathcal{B}_{n-1}}{(2\pi)^{n-1}} |\tilde{\cdot}(\lambda)|_{n-1} \lambda^{\frac{n-1}{2}} + \dots \quad (11)$$

Um das Wachstumsverhalten von  $|\tilde{\cdot}(\lambda)|_{n-1}$  zu erhalten, betrachten wir wieder Gebiete  $\Omega$  mit selbstähnlichem fraktalen Rand  $\cdot$ . Für  $|\tilde{\cdot}(\lambda)|_{n-1}$  gilt dann

$$|\tilde{\cdot}(\lambda)|_{n-1} \propto \sum_{i=1}^{i_{\max}(\lambda)} (Nr^{n-1})^i \propto (Nr^{n-1})^{i_{\max}(\lambda)}. \quad (12)$$

Hierbei ist  $i_{\max}(\lambda)$  durch  $r^{i_{\max}(\lambda)} \propto \lambda^{-1/2}$  gegeben, d.h. man hat  $i_{\max}(\lambda) \propto \ln \lambda / (2 \ln \frac{1}{r})$ . Wir setzen ein und erhalten

$$|\tilde{\cdot}(\lambda)|_{n-1} \propto \lambda^{(\ln N + (n-1) \ln r) / (2 \ln \frac{1}{r})} = \lambda^{\frac{H - (n-1)}{2}}, \quad \text{für } \lambda \rightarrow +\infty. \quad (13)$$

Genauer gilt mit dem  $H$ -dimensionalen HAUSDORFF-Maß  $\mathcal{H}(H; \cdot, \cdot)$ :

$$|\tilde{\cdot}(\lambda)|_{n-1} = c'_{n,H} \mathcal{H}(H; \cdot, \cdot) \lambda^{\frac{H}{2} - \frac{n-1}{2}} + \dots \quad (14)$$

mit einer Konstanten  $c'_{n,H}$ , die nur von  $n$  und  $H$  abhängt. Dies liefert zusammen mit dem asymptotischen Verhalten  $|\tilde{\Omega}(\lambda)|_n \sim |\Omega|_n$  schließlich die Entwicklung (7).

Aber schon einfache Beispiele zeigen, daß (7) nicht stimmen kann. J. BROSSARD und R. CARMONA schlugen daher 1986 aufgrund Rechnungen anhand eines Beispiels vor, die HAUSDORFF-Dimension durch die MINKOWSKI-Dimension  $D$  zu ersetzen [5]. Wir werden dieses Beispiel im Anhang behandeln; es ist übrigens nicht von der Form (8).

Die MINKOWSKI-Dimension hat eine ähnlich einfache anschauliche Deutung wie die HAUSDORFF-Dimension. Hierzu sei  $|\cdot, \epsilon \cap \Omega = \{x \in \Omega : d(x, \cdot) < \epsilon\}$  die innere  $\epsilon$ -Umgebung von  $\cdot$ . Falls nun  $|\cdot, \epsilon \cap \Omega|_n$  für  $\epsilon \rightarrow 0^+$  abfällt wie  $|\cdot, \epsilon \cap \Omega|_n \propto \epsilon^{n-D}$ , besitzt  $\cdot$  die MINKOWSKI-Dimension  $D$ . Für (streng) selbstähnliche Fraktale bedeutet dies

$$|\cdot, r^i \epsilon_0 \cap \Omega|_n \propto (Nr^n)^i |\cdot, \epsilon_0 \cap \Omega|_n, \quad \text{für } i \rightarrow +\infty, \quad (15)$$

wieder mit genügend kleinem, aber festem  $\epsilon_0 > 0$ . Setzen wir auch hier  $r^i \epsilon_0 = \epsilon$ , so erhalten wir das Verhalten

$$|\cdot, \epsilon \cap \Omega|_n \propto \left(\frac{\epsilon}{\epsilon_0}\right)^{n + \frac{\ln N}{\ln r}} |\cdot, \epsilon_0 \cap \Omega|_n \propto \epsilon^{n - \ln N / \ln \frac{1}{r}}, \quad \text{für } \epsilon \rightarrow 0^+. \quad (16)$$

Die MINKOWSKI-Dimension stimmt daher für (streng) selbstähnliche Fraktale mit der HAUSDORFF-Dimension überein.

Anzumerken ist, daß M. V. BERRY sich in [3] hauptsächlich auf selbstähnliche Fraktale bezieht, und in diesem Fall stimmen, wie wir soeben gesehen haben, HAUSDORFF- und MINKOWSKI-Dimension überein. Gravierender ist vielmehr die Feststellung, daß insbesondere für Gebiete mit selbstähnlichem fraktalem Rand eine Konstante im zweiten Term der asymptotischen Entwicklung von  $\mathcal{N}$  nicht ausreicht, um das Verhalten der Eigenwerte zu beschreiben. Wir werden dies im dritten Kapitel zeigen.

Eine allgemeine Abschätzung der Zustandszahlfunktion soll im zweiten Kapitel vorgestellt werden. Dort beweisen wir den Satz von LAPIDUS, den M. L. LAPIDUS im Jahre 1988 gezeigt hat [28]:

$$\mathcal{N}(\lambda) = \frac{\mathcal{B}_n}{(2\pi)^n} |\Omega|_n \lambda^{\frac{n}{2}} + O(\lambda^{\frac{D}{2}}), \quad \text{für } \lambda \rightarrow +\infty, \quad (17)$$

wenn der Rand von  $\Omega$  die MINKOWSKI-Dimension  $D \in (n \Leftrightarrow 1, n]$  besitzt und der obere MINKOWSKI-Inhalt  $\mathcal{M}^*(D; , )$  endlich ist. M. L. LAPIDUS hat seinen Satz allgemein für positive gleichmäßig elliptische Differentialoperatoren der Ordnung  $2m$  ( $m \in \mathbb{N}$ ), die von der Form  $\mathcal{A} = \sum_{|\alpha| \leq m} \sum_{|\beta| \leq m} (\Leftrightarrow 1)^{|\alpha|} D^\alpha (a_{\alpha\beta}(x) D^\beta)$  mit lokal konstanten Koeffizienten des Hauptteils sind, für DIRICHLET- und gemischte DIRICHLET-NEUMANN-Randbedingungen formuliert und bewiesen. Für den negativen LAPLACE-Operator schlägt er zudem eine modifizierte WEYL-BERRY-Vermutung vor, wenn der Rand des betrachteten Gebietes MINKOWSKI-meßbar ist:

$$\mathcal{N}(\lambda) = \frac{\mathcal{B}_n}{(2\pi)^n} |\Omega|_n \lambda^{\frac{n}{2}} \Leftrightarrow c_{n,D} \mathcal{M}(D; , ) \lambda^{\frac{D}{2}} + o(\lambda^{\frac{D}{2}}), \quad \text{für } \lambda \rightarrow +\infty, \quad (18)$$

mit  $\mathcal{M}(D; , )$  als MINKOWSKI-Inhalt des Randes und der MINKOWSKI-Dimension  $D \in (n \Leftrightarrow 1, n)$  von  $, .$  Dabei soll  $c_{n,D}$  wiederum eine universelle Konstante darstellen, die nur von der Dimension  $n$  des Gebietes und der fraktalen Dimension  $D$  des Randes abhängig ist. Für  $n = 1$  konnte diese Vermutung 1990 von M. L. LAPIDUS und C. POMERANCE gezeigt werden [36].

Dagegen widerlegen Beispiele in höheren Dimensionen, daß die Vermutung von LAPIDUS für  $n \geq 2$  nicht richtig ist [30]. Es stellt sich vielmehr heraus, daß bei Gebieten mit MINKOWSKI-meßbaren Rändern die Konstante im zweiten Term der symptomatischen Entwicklung in komplizierter Weise vom gesamten Spektrum des LAPLACE-Operators abhängig ist, d.h. die Konstante ist vom gewählten Gebiet  $\Omega$  abhängig. Gebiete mit MINKOWSKI-meßbaren Rändern sollen allerdings nicht das Thema dieser Arbeit sein.

Diese gliedert sich wie folgt: Im ersten Kapitel werden wir alle Grundlagen, die zum Verständnis notwendig sind, bereitstellen. Wir werden uns dort mit der Theorie, die für die Behandlung von elliptischen Eigenwertaufgaben mit Randbedingungen, sowie für die Behandlung von Fraktalen notwendig sind, auseinandersetzen. Kapitel 2 ist dem Satz von LAPIDUS gewidmet. Wir werden dort den Beweis in seinem vollen Umfang zitieren.

Das Spektrum des negativen LAPLACE-Operators, das Diskussionsgrundlage dieser Einleitung ist, ist Gegenstand des dritten Kapitels. Dort werden wir uns intensiv mit sogenannten selbstähnlichen Fraktalen beschäftigen, die jeweils aus einer disjunkten Vereinigung eines glatten Grundgebietes unterschiedlicher Skalierung zusammengesetzt sind. Als konkretes Beispiel möge an dieser Stelle wiederum die SIERPINSKI-Pfeilspitzenmembran dienen; das Grundgebiet ist hier ein gleichseitiges Dreieck. Wir werden dort zeigen, daß für derartige Gebiete die Zustandszahlfunktion gegeben ist durch

$$\mathcal{N}(\lambda) = \frac{\mathcal{B}_n}{(2\pi)^n} |\Omega|_n \lambda^{\frac{n}{2}} \Leftrightarrow \mathcal{F}(\ln \lambda) \lambda^{\frac{D}{2}} + O(\lambda^{\frac{n-1}{2}}), \quad \text{für } \lambda \rightarrow +\infty, \quad (19)$$

wobei  $\mathcal{F}$  eine beschränkte periodische Funktion ist, deren Graph selbst wieder ein Fraktal ist. Für die in Kapitel 3 betrachteten Klasse von Gebieten existiert kein zweiter Term in der Form Konstante  $\times \lambda^{D/2}$ , wie dies M. V. BERRY vermutet hat. Jedoch lassen sich sehr viele Aussagen über den zweiten Term der Entwicklung von  $N$  gewinnen, insbesondere über die MINKOWSKI-Dimension des Graphen der Funktion  $\mathcal{F}$ , bzw. mit  $\mathcal{F}$  assoziierte Funktionen.

Abschließend geben wir einige physikalische Anwendungen für das Eigenwertproblem (1) an, die sehr vielfältig sind. Es spielt u.a. eine Rolle für die Bestimmung der stationären



Schwingungszustände einer ebenen dünnen Membran mit fest eingespannten Rand ( $n = 2$ ) und die Normalmoden eines Hohlraumresonators ( $n = 3$ ), beispielsweise einer Konzerthalle. Man hat in diesen Fällen die Wellengleichung

$$\frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 u(x, t)}{\partial t^2} = \Delta u(x, t), \quad (20)$$

wobei  $c$  die Ausbreitungsgeschwindigkeit im Medium bezeichnet, zu lösen. Als Randbedingung ist dabei  $u(x, t) = 0$  für alle  $x \in \Omega$ , und alle Zeiten  $t$  zu erfüllen. Stationäre Lösungen werden durch den Separationsansatz  $u(x, t) = u(x)e^{\pm i\omega t}$  beschrieben. Dieser Ansatz führt mit der Wellenzahl  $k = \omega/c$  auf die bekannte HELMHOLTZ-Gleichung

$$\Delta u + k^2 u = 0 \quad (21)$$

für  $x \in \Omega$  mit DIRICHLET-Randbedingungen.

Das natürlichste Anwendungsgebiet in Zusammenhang mit der Zustandszahlfunktion ist wohl die Bestimmung der inneren Energie eines einatomigen idealen Gases innerhalb der Thermodynamik. Den sich ergebenden Korrekturterm zur inneren Energie wollen wir im folgenden abschätzen. Aus der Thermodynamik bekannt ist der Volumenbeitrag zur inneren Energie  $U_V = \frac{3}{2}kT$  mit der BOLTZMANN-Konstante  $k$  und der Temperatur  $T$ .

Um die innere Energie eines einatomigen idealen Gases, das aus  $N$  Atomen besteht und sich in einem dreidimensionalen Gebiet  $\Omega$  mit Volumen  $V = |\Omega|_3$  bei der Temperatur  $T$  befindet, müssen wir die freie Energie  $F$ ,

$$F = \langle \! \langle kT \ln \text{Spur} \exp \left( \langle \! \langle \frac{\mathcal{H}}{kT} \right) \rangle \! \rangle = \langle \! \langle kT \ln \frac{1}{N!} \left( \sum_{i=1}^{\infty} \exp \left( \frac{\epsilon_i}{kT} \right) \right)^N \rangle \! \rangle \quad (22)$$

kennen. Hierbei bezeichnet  $\mathcal{H}$  den HAMILTON-Operator der  $N$  untereinander wechselwirkungsfreien Teilchen,  $\mathcal{H} = \sum_{k=1}^N \langle \! \langle \frac{\hbar^2}{2m} \Delta_k \rangle \! \rangle$ . Die Eigenwerte  $\epsilon_i$  sind gegeben durch die stationäre SCHRÖDINGER-Gleichung

$$\langle \! \langle \frac{\hbar^2}{2m} \Delta u = \epsilon u, \quad (23)$$

die im Gebiet  $\Omega$  mit  $u = 0$  am (fraktalen) Rand (natürlich im Distributionssinne) zu erfüllen ist. Um diese Gleichung in die Form (1) zu bringen, setzen wir  $\epsilon = \frac{\hbar^2}{2m} \lambda$  und erhalten

$$F = \langle \! \langle kT \ln \frac{1}{N!} \left( \sum_{i=1}^{\infty} \exp \left( \langle \! \langle \frac{\hbar^2}{2mkT} \lambda_i \right) \right)^N \rangle \! \rangle = \langle \! \langle kT \ln \frac{(Z(t))^N}{N!} \rangle \! \rangle \quad (24)$$

mit  $t = \frac{\hbar^2}{2mkT}$  und der Zustandssumme

$$Z(t) = \text{Spur} e^{-\Delta t} = \sum_{i=1}^{\infty} e^{-\lambda_i t} = \int_0^{\infty} e^{-\lambda t} d\mathcal{N}(\lambda). \quad (25)$$

Um aus (19) eine differenzierbare Funktion zu erhalten—die Funktion  $\mathcal{F}$  ist nämlich, wie sich in Kapitel 3 herausstellen wird, nicht differenzierbar, desweiteren proportional

zu  $V^{D/3}$ —, ersetzen wir  $\mathcal{F}$  durch ihren „Mittelwert“  $\bar{\mathcal{F}}V^{D/3}$ , d.h. wir verwenden für die Zustandszahlfunktion den Ausdruck

$$\mathcal{N}(\lambda) = \frac{\lambda^{\frac{3}{2}}}{6\pi^2} V \Leftrightarrow \bar{\mathcal{F}}V^{\frac{D}{3}}\lambda^{\frac{D}{2}}. \quad (26)$$

Die Proportionalität zu  $V^{D/3}$  im zweiten Summanden ist schon aus Dimensionsgründen plausibel, wenn  $\bar{\mathcal{F}}$  eine dimensionslose Zahl darstellt; die Zustandszahlfunktion  $\mathcal{N}$  ist nämlich dimensionslos, und  $\lambda$  besitzt die Dimension  $\text{m}^{-2}$ . Für die in Kapitel 3 behandelte Klasse von System ist  $\bar{\mathcal{F}} \simeq 10^{-2}$  eine typische Größenordnung. (Wir haben hier die Parameter für den Würfelschwamm aus dem Anhang verwendet.)

Wir differenzieren (26) nach  $\lambda$  und setzen ein:

$$Z(t) = \int_0^\infty e^{-\lambda t} \mathcal{N}'(\lambda) d\lambda = Z_V(t) + Z_O(t) \quad (27)$$

mit dem aus der Thermodynamik bekannten Volumenbeitrag zur Zustandssumme

$$Z_V(t) = \frac{3}{2} \frac{V}{6\pi^2} \int_0^\infty e^{-\lambda t} \lambda^{\frac{1}{2}} d\lambda = \frac{V}{4\pi^2} t^{-\frac{3}{2}} \int_0^\infty e^{-y} y^{\frac{1}{2}} dy = \left(\frac{1}{2}\right)! \frac{V}{4\pi^2} t^{-\frac{3}{2}} = (4\pi)^{-\frac{3}{2}} V t^{\frac{3}{2}}, \quad (28)$$

wegen  $(\frac{1}{2})! = \sqrt{\pi}/2$ , und dem durch die fraktale Oberfläche „verursachten“ Oberflächenbeitrag

$$Z_O(t) = \frac{D}{2} \bar{\mathcal{F}} \int_0^\infty e^{-\lambda t} \lambda^{\frac{D}{2}-1} d\lambda = \left(\frac{D}{2}\right)! \bar{\mathcal{F}} V^{\frac{D}{3}} t^{-\frac{D}{2}}. \quad (29)$$

Es wird sich herausstellen, daß  $Z_O(t) \ll Z_V(t)$  für  $t \ll 1$ , d.h.  $T \gg 1$ . Daher können wir die freie Energie für kleine  $t$  entwickeln:

$$\begin{aligned} F &= \Leftrightarrow kT \ln \frac{1}{N!} (Z_V(t) + Z_O(t))^N = \Leftrightarrow kT \ln \frac{1}{N!} (Z_V(t))^N \left(1 + \frac{Z_O(t)}{Z_V(t)}\right)^N \\ &= \Leftrightarrow kT \ln \frac{1}{N!} (Z_V(t))^N \Leftrightarrow kT \ln \left(1 + \frac{Z_O(t)}{Z_V(t)}\right)^N \\ &= \Leftrightarrow kT \ln \frac{1}{N!} (Z_V(t))^N \Leftrightarrow NkT \frac{Z_O(t)}{Z_V(t)} + \dots \\ &= \Leftrightarrow kT \ln \frac{1}{N!} (Z_V(t))^N \Leftrightarrow NkT \left(\frac{D}{2}\right)! (4\pi)^{\frac{3}{2}} \bar{\mathcal{F}} V^{\frac{D-3}{3}} t^{\frac{D-3}{2}} + \dots \\ &= F_V + F_O + \dots \quad , \end{aligned} \quad (30)$$

mit dem Volumenbeitrag zur freien Energie

$$F_V = \Leftrightarrow NkT \ln \frac{1}{N!} \left(\frac{mkT}{2\pi\hbar^2}\right)^{\frac{3}{2}}, \quad (31)$$

der aus der Thermodynamik bekannt ist, sowie dem neu hinzugekommenen Oberflächenbeitrag

$$F_O = \Leftrightarrow NkT \left(\frac{D}{2}\right)! (4\pi)^{\frac{3}{2}} \bar{\mathcal{F}} V^{\frac{D-3}{3}} \left(\frac{\hbar^2}{2mkT}\right)^{\frac{3-D}{2}} = \Leftrightarrow NkT \left(\frac{D}{2}\right)! (4\pi)^{\frac{D}{2}} \bar{\mathcal{F}} V^{\frac{D-3}{3}} \left(\frac{mkT}{2\pi\hbar^2}\right)^{\frac{D-3}{2}} \quad (32)$$

Um den Oberflächenbeitrag  $U_O$  zur inneren Energie zu erhalten, müssen wir  $U_O = F_O + TS_O$  mit der Entropie  $S_O = \left(\frac{\partial F_O}{\partial T}\right)_V$  bestimmen:

$$S_O = \left(\frac{\partial F_O}{\partial T}\right)_V = \Leftrightarrow \frac{F_O}{T} \Leftrightarrow \frac{D \Leftrightarrow 3}{2} \frac{F_O}{T}, \quad (33)$$

so daß mit  $U_V = \frac{3}{2}NkT$  folgt:

$$U = \frac{3}{2}NkT \Leftrightarrow \frac{3 \Leftrightarrow D}{2} \left(\frac{D}{2}\right)! (4\pi)^{\frac{D}{2}} \mathcal{F} V^{\frac{D-3}{3}} \left(\frac{mkT}{2\pi\hbar^2}\right)^{\frac{D-3}{2}} NkT. \quad (34)$$

Hieraus ist ersichtlich, daß mit wachsendem  $D$  ( $D \rightarrow 3^-$ ), d.h. je fraktaler die Oberfläche ist, der zweite Term an Bedeutung gewinnt.

Wir vergleichen dazu Größenordnungen der beiden Terme für Helium ( $m = 6.65 \cdot 10^{-27}$  kg) bei Zimmertemperatur ( $T = 293$  K) für ein Mol eines idealen Gases bei Normaldruck, d.h.  $V = 22.4$  l in Abhängigkeit von  $D$  bei sonst festgehaltenen Parametern; dann gilt  $\frac{mkT}{2\pi\hbar^2} \simeq 3.88 \cdot 10^{20} \text{ m}^{-2}$ . Für  $D = 2.73$  (Würfelschwamm im Anhang) erhält man mit  $\left(\frac{D}{2}\right)! \simeq 1.21$  das Verhältnis  $U_O/U_V \simeq 10^{-3}$ . Für  $D = 2.25$  folgt mit  $\left(\frac{D}{2}\right)! \simeq 1.01$  dagegen das Verhältnis  $U_O/U_V \simeq 10^{-8}$ . Dazu ist anzumerken, daß für in der Natur vorkommende Gebiete  $D \simeq 2.25$  der realistischere Wert ist, so daß man von  $U_O/U_V \simeq 10^{-8}$  ausgehen kann.

## Schreibweisen und Definitionen

Sei  $\Omega \subset \mathbb{R}^n$  ( $n \in \mathbb{N}$ ) stets ein beliebiges (nichtleeres) beschränktes Gebiet. Die Oberfläche von  $\Omega$ , der Rand, wird mit  $\partial\Omega$  bezeichnet. Für den Abschluß einer beliebigen Menge  $A \subset \mathbb{R}^n$  schreiben wir  $\bar{A}$ , für den Rand  $\partial A$ . Falls  $A$  LEBESGUE-meßbar ist, bezeichnen wir mit  $|A|_n$ —kurz  $|A|$ —das  $n$ -dimensionale LEBESGUESche Maß von  $A$ ,  $|A|_n = \int_A dx$  mit dem LEBESGUESchen Maß  $dx = dx_1 \dots dx_n$ . Zu  $x = (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$  sei  $|x| = (\sum_{i=1}^n x_i^2)^{1/2}$  die euklidische Norm.  $d(x, y) := |x \Leftrightarrow y|$  bzw.  $d(x, A) := \inf\{|x \Leftrightarrow y| : y \in A\}$  seien die euklidischen Abstände zwischen beliebigen  $x, y \in \mathbb{R}^n$  bzw.  $x \in \mathbb{R}^n$  und  $A \subset \mathbb{R}^n$ . Mit  $\#I$  bezeichnen wir schließlich die Mächtigkeit (Kardinalität) einer endlichen Menge  $I$ .

Zur Vereinfachung der Schreibweise verwenden wir die LANDAUSchen Symbole „groß  $O$ “ und „klein  $o$ “. Sie drücken Wachstumseigenschaften einer Funktion  $f$  durch entsprechende Eigenschaften einer (einfacheren) Vergleichsfunktion  $g$  aus:

**Definition.** Seien  $f$  und  $g$  reellwertige Funktionen auf dem Intervall  $(0, +\infty)$  mit  $g \geq 0$ . Dann schreiben wir kurz

$$f(\lambda) = O(g(\lambda)), \quad \text{für } \lambda \rightarrow +\infty, \quad (35)$$

wenn es die positiven Konstanten  $C$  und  $\lambda_0$  gibt, so daß  $|f(\lambda)| \leq Cg(\lambda)$ ,  $\forall \lambda \geq \lambda_0$ . Desweiteren schreiben wir

$$f(\lambda) = o(g(\lambda)), \quad \text{für } \lambda \rightarrow +\infty, \quad (36)$$

falls  $\lim_{\lambda \rightarrow +\infty} |f(\lambda)|/g(\lambda) = 0$ . Schließlich definieren wir noch  $f(\lambda) = g(\lambda) + O(h(\lambda))$  durch  $f(\lambda) \Leftrightarrow g(\lambda) = O(h(\lambda))$  und entsprechend für klein  $o$ .

*Bemerkung.* Die Buchstaben  $O, o$  sollen dabei an „Ordnung“, nicht an „Null“ erinnern. Analog definiert man die LANDAUSchen Symbole für  $\lambda \rightarrow 0^+$ .

**Definition (Asymptotisches Verhalten).** Für asymptotisches Verhalten verwenden wir die Schreibweise

$$f(\lambda) \sim g(\lambda), \quad \text{für } \lambda \rightarrow +\infty, \quad (37)$$

falls  $f(\lambda) = (1 + o(1))g(\lambda)$ , für  $\lambda \rightarrow +\infty$ , bzw.  $\lim_{\lambda \rightarrow +\infty} f(\lambda)/g(\lambda) = 1$ . Desweiteren schreiben wir für schwach asymptotisches Verhalten

$$f(\lambda) \approx g(\lambda), \quad \text{für } \lambda \rightarrow +\infty, \quad (38)$$

wenn es die Konstanten  $0 < c_1 \leq c_2 < +\infty$  und ein  $\lambda_0 > 0$  gibt, so daß

$$c_1 g(\lambda) \leq f(\lambda) \leq c_2 g(\lambda), \quad \forall \lambda \geq \lambda_0. \quad (39)$$

*Bemerkung.* Analog definiert man wieder für  $\lambda \rightarrow 0^+$ .

# Kapitel 1

## Grundlagen

Aufgabe des ersten Kapitel ist es, die notwendige Theorie für die Behandlung von elliptischen Eigenwertproblemen der Form

$$\mathcal{A}u(x) = \lambda u(x), \quad \text{für } x \in \Omega \quad (1.1)$$

mit DIRICHLET- oder gemischten DIRICHLET-NEUMANN-Randbedingungen auf  $\partial\Omega$  bereitzustellen. Dabei ist  $\Omega \subset \mathbb{R}^n$  ( $n \in \mathbb{N}$ ) ein offenes beschränktes Gebiet und  $\mathcal{A}$  ein gleichmäßig elliptischer Operator der Ordnung  $2m$  ( $m \in \mathbb{N}$ ) von der Form (1.14).

Zunächst sollte man sich mit dem Randwertraum von  $\mathcal{A}$ , also dem Definitionsbereich des Operators unter Berücksichtigung der Randbedingungen, beschäftigen. Wir werden sehen, daß dies die SOBOLEVschen Räume sind. Sie sind Thema von Abschnitt 1.1.1.

Für eine abstrakte Behandlung ist es zweckmäßig, die ins Auge gefaßte Randwertaufgabe in eine dazu äquivalente Variationsformulierung umzuwandeln. Dies geschieht in den Abschnitten 1.1.2 bis 1.1.6.

In Abschnitt 1.2 werden wir zeigen, daß man für die Eigenwerte von  $\mathcal{A}$  ein Maximum-Minimumprinzip herleiten kann. Dazu werden wir die Eigenwerttheorie der symmetrischen und kompakten Operatoren entwickeln, da man zeigen kann, daß sich die Variationsformulierung des unbeschränkten Operators  $\mathcal{A}$  in eine äquivalente Eigenwertgleichung eines kompakten symmetrischen Operators umwandeln läßt.

Mit Hilfe der  $i$ -Weite aus der Approximationstheorie von metrischen Räumen, bei denen diese durch  $i$ -dimensionale Teilräume approximiert werden, ist es schließlich möglich, in Abschnitt 1.3 eine vollkommen abstrakte Definition der Zustandzahlfunktion, sowie wichtige Eigenschaften anzugeben, deren asymptotische Entwicklung für Eigenwertprobleme mit Randbedingungen auf fraktalen Rändern ja das eigentliche Thema dieser Arbeit ist. Daher ist auch Abschnitt 1.4 einer Einführung in die Theorie der fraktalen Dimension gewidmet. Wir werden uns dort mit zwei verschiedenen Dimensionsbegriffen auseinandersetzen, die in der Theorie der fraktalen Trommeln—dies sind Gebiete mit fraktalem Rand—eine Rolle spielen.

# 1.1 Eigenwertprobleme und Variationsformulierung

## 1.1.1 Sobolev-Räume

**Definition 1.1.1** Es sei  $\Omega$  eine (nichtleere) beschränkte offene Teilmenge des  $\mathbb{R}^n$  ( $n \in \mathbb{R}$ ). Mit  $L^2(\Omega)$  bezeichnen wir dann wie üblich den Raum der (komplexwertigen) meßbaren Funktionen, deren Quadrate bezüglich des LEBESGUESchen Maßes  $dx$  integrierbar sind,

$$L^2(\Omega) := \{u : \Omega \rightarrow \mathbb{C} : u \text{ meßbar und } \int_{\Omega} |u(x)|^2 dx < +\infty\}. \quad (1.2)$$

Zwei Funktionen  $u, v \in L^2(\Omega)$  werden als gleich angesehen,  $u = v$ , wenn diese fast überall gleich sind, d.h. die Ausnahmemenge  $A = \{x \in \Omega : u(x) \neq v(x)\}$  das  $n$ -dimensionale LEBESGUESche Maß Null besitzt,  $|A|_n = 0$ .

Für den Raum  $L^2(\Omega)$  gilt der folgende Satz [43, S. 161f]:

**Satz 1.1.2**  $L^2(\Omega)$  bildet einen HILBERT-Raum mit dem Skalarprodukt

$$(u, v) := (u, v)_{L^2(\Omega)} := \int_{\Omega} u(x) \overline{v(x)} dx, \quad u, v \in L^2(\Omega) \quad (1.3)$$

und der Norm

$$\|u\| := \|u\|_{L^2(\Omega)} := \left( \int_{\Omega} |u(x)|^2 dx \right)^{1/2}, \quad u \in L^2(\Omega). \quad (1.4)$$

**Definition 1.1.3** Sei  $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_n) \in \mathbb{N}^n$  ( $n \in \mathbb{N}$ ) ein Multiindex und  $D^\alpha$  der partielle Ableitungsoperator der Ordnung  $|\alpha|$ :

$$D^\alpha := \frac{\partial^{|\alpha|}}{\partial x_1^{\alpha_1} \dots \partial x_n^{\alpha_n}} \quad \text{mit} \quad |\alpha| := \alpha_1 + \dots + \alpha_n. \quad (1.5)$$

Um SOBOLEV-Räume definieren zu können, brauchen wir einen verallgemeinerten Ableitungsbegriff [15, S. 109]:

**Definition 1.1.4**  $u \in L^2(\Omega)$  besitzt eine schwache Ableitung (Ableitung im Distributions-sinne)  $v := D^\alpha u \in L^2(\Omega)$ , falls für dieses  $v$  gilt:

$$(w, v) = (\Leftrightarrow)^{|\alpha|} (D^\alpha w, u), \quad \forall w \in C_0^\infty(\Omega), \quad (1.6)$$

wobei  $C_0^\infty(\Omega)$  den Raum der auf  $\Omega$  unendlich oft differenzierbaren Funktionen mit kompakten Träger enthalten in  $\Omega$  bezeichnet.

Wir können nun den SOBOLEV-Raum  $H^m(\Omega)$  der Ordnung  $m$  definieren (Zur Definition von SOBOLEVschen Räumen siehe z.B. [15, S. 110],[65, S. 68].) <sup>1</sup>:

---

<sup>1</sup>Der hier mit  $H^m(\Omega)$  bezeichnete SOBOLEV-Raum wird andernorts auch mit  $W_2^m(\Omega)$  bezeichnet.

**Definition 1.1.5** Sei  $m \in \mathbb{N}_0$ .  $H^m(\Omega) \subset L^2(\Omega)$  sei die Menge aller Funktionen  $u \in L^2(\Omega)$ , die schwache Ableitungen  $D^\alpha u \in L^2(\Omega)$  für  $|\alpha| \leq m$  besitzen:

$$H^m(\Omega) := \{u \in L^2(\Omega) : D^\alpha u \in L^2(\Omega), |\alpha| \leq m\}. \quad (1.7)$$

Mit dieser Definition gilt der folgende Satz [65, S. 68f]:

**Satz 1.1.6**  $H^m(\Omega)$  bildet einen HILBERT-Raum mit dem Skalarprodukt

$$(u, v)_m := (u, v)_{H^m(\Omega)} := \sum_{|\alpha| \leq m} (D^\alpha u, D^\alpha v)_{L^2(\Omega)}, \quad u, v \in H^m(\Omega) \quad (1.8)$$

und der SOBOLEV-Norm

$$\|u\|_m := \|u\|_{H^m(\Omega)} := \left( \sum_{|\alpha| \leq m} \|D^\alpha u\|_{L^2(\Omega)}^2 \right)^{1/2}, \quad u \in H^m(\Omega). \quad (1.9)$$

**Lemma 1.1.7**  $H^m(\Omega) \cap C^\infty(\Omega)$  liegt dicht in  $H^m(\Omega)$ .

*Bemerkung.* Lemma 1.1.7, dessen Beweis bei [65, S. 74] zu finden ist, gestattet eine zweite Definition des SOBOLEV-Raumes  $H^m(\Omega)$ : Die Vervollständigung von  $X := \{u \in C^\infty(\Omega) : \|u\|_m < +\infty\}$  in  $L^2(\Omega)$  bezüglich der Norm (1.9) ergibt  $H^m(\Omega)$ .

Für die Behandlung von Eigenwertproblemen mit DIRICHLET-Randbedingungen benötigen wir einen weiteren SOBOLEV-Raum [15, S. 111],[65, S. 72]:

**Definition 1.1.8** Mit  $H_0^m(\Omega)$  bezeichnen wir die Vervollständigung von  $C_0^\infty(\Omega)$  in  $L^2(\Omega)$  bezüglich der Norm (1.9) <sup>2</sup>.

Mit dieser Definition ist  $H_0^m(\Omega)$  ebenfalls ein HILBERT-Raum; es gilt [15, S. 111],[65, S. 72]:

**Satz 1.1.9**  $H_0^m(\Omega)$  ist ein HILBERT-Raum mit dem gleichen Skalarprodukt (1.8) und gleicher Norm (1.9). Es gilt  $H_0^m(\Omega) \subset H^m(\Omega)$ .  $C_0^\infty(\Omega)$  liegt dicht in  $H_0^m(\Omega)$ . Für  $m = 0$  gilt

$$H_0^0(\Omega) = H^0(\Omega) = L^2(\Omega). \quad (1.10)$$

Es gilt der folgende Satz, dessen Beweis bei [15, S. 120f] nachzulesen ist:

**Satz 1.1.10** Für  $\Omega \in C^1$  und  $m \in \mathbb{N}$  gilt

$$H_0^m(\Omega) = \{u \in H^m(\Omega) : D^\alpha u|_\Gamma = 0 \text{ für } 0 \leq |\alpha| \leq m \Leftrightarrow 1\}. \quad (1.11)$$

Für den Satz von LAPIDUS ist im Fall der gemischten DIRICHLET-NEUMANN-Randbedingungen eine geometrische Voraussetzung an das Gebiet  $\Omega$  notwendig. Wir verwenden die bei LAPIDUS angegebene  $C'$ -Bedingung [28, S. 475]:

---

<sup>2</sup>Für den SOBOLEV-Raum  $H_0^m(\Omega)$  ist auch die Bezeichnung  $\mathring{W}_2^m(\Omega)$  üblich.

**Definition 1.1.11 (C'-Bedingung)** Eine offene Menge  $\Omega \subset \mathbb{R}^n$  ( $n \in \mathbb{N}$ ) erfüllt die C'-Bedingung, falls es die Konstanten  $\epsilon_0, M, t_0 > 0$  mit  $\epsilon_0 M < t_0$ , eine offene Überdeckung  $\{\Omega_i\}_{i=1}^N$  der inneren  $\epsilon_0$ -Umgebung von  $\cdot = \partial\Omega$ —wir bezeichnen diese mit  $\tilde{\cdot}_{\epsilon_0} = \{x \in \Omega : d(x, \cdot) < \epsilon_0\}$ —sowie nichttriviale Vektoren  $h_i \in \mathbb{R}^n$  ( $i = 1, \dots, N$ ) gibt, so daß für alle  $i = 1, \dots, N$ , alle  $(x, y) \in \Omega_i \times \Omega_i$  mit  $|x \leftrightarrow y| < \epsilon_0$  und alle  $t \in \mathbb{R}$  mit  $M|x \leftrightarrow y| \leq t \leq t_0$  die Streckenabschnitte  $[x, x + th_i]$ ,  $[y, y + th_i]$  und  $[x + th_i, y + th_i]$  in  $\Omega$  enthalten sind.

**Definition 1.1.12 (Kompakte Einbettung)**  $H_1, H_2$  seien HILBERT-Räume;  $H_1 \subset H_2$  heißt kompakt eingebettet, falls zu jeder beschränkten Folge  $\{u_n\}$  aus  $H_1$  eine in  $H_2$  konvergente Teilfolge  $\{u_{n_k}\}$  existiert, d.h.  $u_{n_k} \rightarrow u \in H_2$  für  $k \rightarrow +\infty$ .

Wir sind nun in der Lage, den folgenden Einbettungssatz zu formulieren [65, S. 121]:

**Satz 1.1.13** Sei  $\Omega \subset \mathbb{R}^n$  ( $n \in \mathbb{N}$ ) offen und beschränkt. Dann ist die Einbettung

$$H_0^m(\Omega) \subset L^2(\Omega) \quad (1.12)$$

für alle  $m \in \mathbb{N}$  kompakt. Erfüllt  $\Omega$  ferner die C'-Bedingung, so ist auch die Einbettung

$$H^m(\Omega) \subset L^2(\Omega) \quad (1.13)$$

kompakt.

## 1.1.2 Gleichmäßig elliptische Differentialoperatoren

**Definition 1.1.14** Es sei  $\Omega$  eine beschränkte offene Menge in  $\mathbb{R}^n$  ( $n \in \mathbb{N}$ ). Wir betrachten den durch

$$\mathcal{A} := \sum_{|\alpha| \leq m} \sum_{|\beta| \leq m} (\leftrightarrow 1)^{|\alpha|} D^\alpha (a_{\alpha\beta}(x) D^\beta), \quad x \in \Omega \quad (1.14)$$

definierten, linearen und partiellen Differentialoperator der Ordnung  $2m$  ( $m \in \mathbb{N}$ ) mit  $a_{\alpha\beta}(x) = \overline{a_{\beta\alpha}(x)} \in L^\infty(\Omega)$ , wobei der Raum  $L^\infty(\Omega)$  aus allen auf  $\Omega$  LEBESGUE-meßbaren und fast überall beschränkten Funktionen besteht. Den Definitionsbereich von  $\mathcal{A}$  bezeichnen wir mit  $\mathcal{D}(\mathcal{A})$ .

**Definition 1.1.15** Wir definieren als Hauptteil  $\mathcal{A}'$  des Operators  $\mathcal{A}$  den Differentialausdruck

$$\mathcal{A}' := \sum_{|\alpha|=m} \sum_{|\beta|=m} (\leftrightarrow 1)^{|\alpha|} D^\alpha (a_{\alpha\beta}(x) D^\beta), \quad x \in \Omega. \quad (1.15)$$

**Definition 1.1.16** Den Operator

$$\mathcal{A}^* := \sum_{|\alpha| \leq m} \sum_{|\beta| \leq m} (\leftrightarrow 1)^{|\beta|} D^\beta (\overline{a_{\alpha\beta}(x)} D^\alpha), \quad x \in \Omega \quad (1.16)$$



nennen wir den (formal) adjungierten zu (1.14); wir bekommen ihn durch Adjungieren im Sinne der Distributionstheorie oder in  $C_0^\infty(\Omega)$ . Für  $u, v \in C_0^\infty(\Omega)$  erhalten wir nämlich durch partielles Integrieren:

$$\begin{aligned} (\mathcal{A}u, v) &= \int_{\Omega} \sum_{|\alpha| \leq m} \sum_{|\beta| \leq m} (\pm 1)^{|\alpha|} D^\alpha (a_{\alpha\beta}(x) D^\beta u(x) \overline{v(x)}) dx \\ &= \int_{\Omega} \sum_{|\alpha| \leq m} \sum_{|\beta| \leq m} u(x) \overline{(\pm 1)^{|\beta|} D^\beta (a_{\alpha\beta}(x) D^\alpha v(x))} dx = (u, \mathcal{A}^*v). \end{aligned} \quad (1.17)$$

**Definition 1.1.17** Wir nennen den durch (1.14) definierten Differentialoperator  $\mathcal{A}$  (formal) selbstadjungiert, wenn  $\mathcal{A} = \mathcal{A}^*$  gilt; er heißt symmetrisch, falls  $\mathcal{D}(\mathcal{A})$  dicht in  $H$  liegt und  $(\mathcal{A}u, v) = (u, \mathcal{A}^*v)$  für alle  $u, v \in \mathcal{D}(\mathcal{A})$ .

**Definition 1.1.18** Wir ordnen dem Hauptteil des Differentialoperators  $\mathcal{A}$  das Polynom

$$a'(x, \xi) := \sum_{|\alpha|=m} \sum_{|\beta|=m} a_{\alpha\beta}(x) \xi^{\alpha+\beta}, \quad (x, \xi) \in \Omega \times \mathbb{R}^n, \quad (1.18)$$

genannt Hauptteiltonom, mit den von  $x \in \Omega$  abhängigen Koeffizienten zu. Hier bedeutet  $\xi^{\alpha+\beta} = \xi^{\alpha_1+\beta_1} \dots \xi^{\alpha_n+\beta_n}$ .

**Definition 1.1.19** Der durch (1.14) erklärte Operator  $\mathcal{A}$  heißt gleichmäßig elliptisch auf  $\Omega$ , wenn es eine Konstante  $c > 0$  gibt, so daß

$$\Re a'(x, \xi) \geq c|\xi|^{2m} \quad \text{für fast alle } x \in \Omega \text{ und alle } \xi \in \mathbb{R}^n \quad (1.19)$$

mit  $|\xi|^2 = \sum_{i=1}^n |\xi_i|^2$ ; er heißt positiv, wenn  $(\mathcal{A}u, u) \geq 0$  für alle  $u \in \mathcal{D}(\mathcal{A})$ .

### 1.1.3 Sesquilinearformen und Koerzivität

**Definition 1.1.20** Es sei  $H$  ein Hilbertraum und  $W \subset H$  ein dichter Teilraum. Eine Abbildung  $b(\cdot, \cdot) : W \times W \rightarrow \mathbb{C}$  heißt Sesquilinearform, falls sie linear in der ersten und antilinear in der zweiten Variablen ist:

$$\begin{aligned} b(u, \lambda v, w) &= b(u, w) + \lambda b(v, w), \\ b(u, v + \lambda w) &= b(u, v) + \bar{\lambda} b(u, w), \end{aligned} \quad \forall u, v, w \in W, \forall \lambda \in \mathbb{C}. \quad (1.20)$$

**Definition 1.1.21** Die zur Form  $b$  adjungierte Sesquilinearform  $b^*$  ist durch  $b^*(u, v) := \overline{b(v, u)}$  ( $u, v \in W$ ) gegeben. Eine Sesquilinearform  $b$  heißt hermitesch, falls  $b(u, v) = \overline{b(v, u)}$ ,  $\forall u, v \in W$ . Wenn  $b$  hermitesch ist, ist wegen  $b(u, u) = \overline{b(u, u)}$  die Form  $b(u, u)$  reell für alle  $u \in W$ ;  $b$  heißt positiv, wenn  $b(u, u) \geq 0$ ,  $\forall u \in W$ .

**Definition 1.1.22** Die Beschränktheit einer Sesquilinearform  $b$  (auch Stetigkeit genannt) wollen wir durch die Abschätzung

$$|b(u, v)| \leq c_s \|u\|_W \|v\|_W, \quad \forall u, v \in W \quad (1.21)$$

definieren.

**Definition 1.1.23** Sei  $b$  eine positive Sesquilinearform auf  $W$ . Dann heißt  $b$  abgeschlossen, falls  $W$  vollständig ist unter der Norm  $\|\cdot\|$ , gegeben durch  $\|\cdot\|^2 = b(\cdot, \cdot) + \|\cdot\|_H^2$ .

Um dem durch (1.14) erklärten Operator eine Sesquilinearform zuordnen zu können bilden wir für beliebiges  $u, v \in C_0^\infty(\Omega)$  das Skalarprodukt

$$(\mathcal{A}u, v) = \sum_{|\alpha| \leq m} \sum_{|\beta| \leq m} ((\Leftrightarrow 1)^{|\alpha|} D^\alpha (a_{\alpha\beta} D^\beta u), v). \quad (1.22)$$

Da  $v \in C_0^\infty(\Omega)$ , kann man partiell integrieren, ohne daß Randterme auftreten:

$$((\Leftrightarrow 1)^{|\alpha|} D^\alpha (a_{\alpha\beta} D^\beta u), v) = (D^\beta u, \overline{a_{\alpha\beta}} D^\alpha v). \quad (1.23)$$

Mit der Voraussetzung  $a_{\alpha\beta} = \overline{a_{\beta\alpha}}$  erhalten wir

$$(\mathcal{A}u, v) = \sum_{|\alpha| \leq m} \sum_{|\beta| \leq m} (D^\alpha u, a_{\alpha\beta}(x) D^\beta v) =: a(u, v). \quad (1.24)$$

Diese Identität ist zunächst für alle  $u, v \in C_0^\infty(\Omega)$  erfüllt. Um den Operator  $\mathcal{A}$  auf einen größeren Bereich fortsetzen zu können—dies ist notwendig, da wir Gebiete mit besonders irregulärem Rand im Sinn haben—, ist der Satz von FRIEDRICHS hilfreich [51, S. 117]:

**Satz 1.1.24 (Friedrichs-Erweiterung)** Es sei  $\mathcal{A}$  ein positiver symmetrischer Operator und  $a(u, v) = (\mathcal{A}u, v)$ ,  $\forall u, v \in \mathcal{D}(\mathcal{A})$ . Dann ist  $a$  eine abschließbare Sesquilinearform und ihr Abschluß  $\hat{a}$  ist die Sesquilinearform eines eindeutigen selbstadjungierten Operators  $\hat{\mathcal{A}}$ .

*Bemerkung.* Das Zeichen  $\hat{\cdot}$  über dem fortgesetzten Operator  $\hat{\mathcal{A}}$  und der Sesquilinearform  $\hat{a}$  lassen wir im folgenden der Einfachheit weg.

Anhand des  $n$ -dimensionalen (negativen) LAPLACE-Operators bei DIRICHLET-Randbedingungen wollen wir dies genauer nachvollziehen. Es gilt offensichtlich  $(\Leftrightarrow \Delta u, v) = (\nabla u, \nabla v)$  für alle  $u, v \in C_0^\infty(\Omega)$ . Setzen wir nun  $(u, v)_1 := (\nabla u, \nabla v) + (u, v)$ , so können wir den Raum  $C_0^\infty(\Omega)$  unter der Norm  $\|\cdot\|_1 := (\cdot, \cdot)^{1/2}$  vervollständigen und erhalten so den SOBOLEV-Raum  $H_0^1(\Omega)$  aus Definition 1.1.8. Der Satz über die FRIEDRICHS-Erweiterung erlaubt es nun, den LAPLACE-Operator auf den SOBOLEV-Raum  $H_0^1(\Omega)$  fortzusetzen, und es gilt  $(\Leftrightarrow \Delta u, v) = (\nabla u, \nabla v)$  für alle  $u, v \in H_0^1(\Omega)$ , wobei alle Ableitungen natürlich im Distributionssinne zu verstehen sind. Diese Identität gilt für beliebige meßbare (offene) Gebiete  $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ . Es sind keine Beschränkungen an den Rand des Gebietes notwendig.

Diese Art der (FRIEDRICHS-)Fortsetzung ist allgemein für einen positiven Operator von der Form (1.14) möglich. Wir können daher definieren:

**Definition 1.1.25** Es sei  $V$  ein abgeschlossener Teilraum von  $H^m(\Omega)$  der  $H_0^m(\Omega)$  enthält,

$$H_0^m(\Omega) \subset V \subset H^m(\Omega). \quad (1.25)$$

Der durch (1.14) erklärte Operator sei positiv. Dann können wir diesem Operator durch

$$a(u, v) := \sum_{|\alpha| \leq m} \sum_{|\beta| \leq m} (D^\alpha u, a_{\alpha\beta}(x) D^\beta v), \quad u, v \in V. \quad (1.26)$$

mit  $a_{\alpha\beta} = \overline{a_{\beta\alpha}} \in L^\infty(\Omega)$  eine Sesquilinearform zuordnen.

**Lemma 1.1.26** Seien  $a_{\alpha\beta} = \overline{a_{\beta\alpha}}$ . Dann ist die durch (1.26) definierte Sesquilinearform hermitesch, und es gilt  $a(u, u) \in \mathbb{R}$ ,  $\forall u \in V$ .

Wegen [15, S. 134 und S. 139] gilt das folgende Lemma:

**Lemma 1.1.27** Seien  $a_{\alpha\beta} \in L^\infty(\Omega)$ . Dann ist die durch (1.26) definierte Sesquilinearform auf  $V \times V$  beschränkt.

**Definition 1.1.28 (Koerzivität)** Eine Sesquilinearform  $b : W \times W \rightarrow \mathbb{C}$  heißt koerziv, dann und nur dann, wenn es ein  $c_0 > 0$  gibt, so daß

$$|b(u, u)| \geq c_0 \|u\|_W^2, \quad \forall u \in W. \quad (1.27)$$

Mit dieser Definition und [1, S. 86ff] folgt:

**Lemma 1.1.29** Seien  $a_{\alpha\beta} \in L^\infty(\Omega)$ . Die durch (1.26) definierte Sesquilinearform sei koerziv im Sinne von Definition 1.1.28. Dann gibt es ein  $c > 0$ , so daß

$$\Re \mathcal{A}'(x, \xi) \geq c |\xi|^{2m}, \quad \text{für fast alle } x \in \Omega \text{ und alle } \xi \in \mathbb{R}^n, \quad (1.28)$$

d.h. der zugehörige Differentialoperator  $\mathcal{A}$ , gegeben durch (1.14) ist gleichmäßig elliptisch auf  $\Omega$ .

*Bemerkungen.* Die weitere Bedeutung der Koerzivität liegt in der Eigenschaft begründet, daß bei einer beschränkten koerziven Form  $b$  auf  $W$  für alle  $u \in W$  ein  $u' \in W$  existiert, so daß  $b(u', v) = (u, v)_H$ ,  $\forall u \in W$ . Wir werden dies in Satz 1.2.9 auf Seite 27 beweisen. Hierdurch wird es möglich, das in der Einleitung zu diesem Kapitel erwähnte Eigenwertproblem des (unbeschränkten) Operators  $\mathcal{A}$  in eine äquivalente Eigenwertgleichung eines dann kompakten Operators umzuwandeln.

Zuvor ist es aber angebracht, sich mit der sogenannten schwachen Formulierung des Eigenwertproblems (1.1) zu beschäftigen. Dies geschieht in den drei nachfolgenden Abschnitten.

## 1.1.4 Gleichungen mit homogenen Dirichlet-Randbedingungen

Wir untersuchen im folgenden die elliptische Eigenwertgleichung

$$\mathcal{A}u = \lambda u \quad \text{in } \Omega \quad (1.29)$$

der Ordnung  $2m$  ( $m \in \mathbb{N}$ ), wobei  $\mathcal{A}$  durch (1.14) gegeben ist. Als Randbedingungen werden die homogenen DIRICHLET-Randbedingungen

$$u = 0, \quad \frac{\partial u}{\partial n} = 0, \quad \dots, \quad \left( \frac{\partial}{\partial n} \right)^{m-1} u = 0 \quad \text{auf } \partial\Omega, \quad (1.30)$$

verlangt, die allerdings nur sinnvoll sind, falls  $\Omega$  hinreichend glatt ist. Man beachte, daß für den Standardfall  $m = 1$  (Gleichung zweiter Ordnung) die Bedingung (1.30) zu  $u = 0$  wird. Da mit  $u = 0$  auf  $\Omega$ , auch die Tangentialableitungen verschwinden, verschwinden nicht nur die  $k$ -fachen Normalableitungen für  $k \leq m \Leftrightarrow 1$ , sondern sämtliche Ableitungen der Ordnung kleiner oder gleich  $m$ :

$$D^\alpha u(x) = 0 \quad \text{in } x \in \Omega, \quad \text{für } |\alpha| \leq m \Leftrightarrow 1. \quad (1.31)$$

Wegen Korollar 1.1.10 läßt sich dies durch  $u \in H_0^m(\Omega)$  formulieren. Zur Herleitung einer Variationsformulierung sei  $u \in C^{2m}(\Omega) \cap H_0^m(\Omega)$  eine Lösung von (1.29) und (1.30); diese wird in der Regel auch als klassische Lösung bezeichnet. Wir bilden für beliebiges  $v \in C_0^\infty(\Omega)$  das Skalarprodukt

$$(\mathcal{A}u, v) = a(u, v) \stackrel{!}{=} (\lambda u, v), \quad (1.32)$$

wegen  $\mathcal{A}u = \lambda u$  mit der Sesquilinearform (1.26). Wir erhalten so die schwache Formulierung der Eigenwertaufgabe (1.29),(1.30), die auch als Variationsformulierung bezeichnet wird <sup>3</sup>:

$$\text{Suche } u \in H_0^m(\Omega) \text{ mit } a(u, v) = \lambda(u, v), \quad \forall v \in C_0^\infty(\Omega). \quad (1.33)$$

Erfüllt umgekehrt  $u \in C^{2m}(\Omega)$  mit Randbedingung (1.29) die Forderung (1.33), so läßt sich die partielle Integration rückgängig machen, und

$$\int_{\Omega} (\mathcal{A}u \Leftrightarrow \lambda u) \bar{v} \, dx = 0, \quad \forall v \in C_0^\infty(\Omega) \quad (1.34)$$

beweist  $\mathcal{A}u = \lambda u$ . Für die weitere Herleitung benötigen wir ein Lemma [15, S. 127]:

**Lemma 1.1.30**  $a(\cdot, \cdot) : V \times V \rightarrow \mathbb{C}$  sei beschränkt.  $V_0 \subset V$  sei dicht in  $V$ . Dann ist die Lösung  $u \in V$  der Aufgabe

$$\text{Suche } u \in V \text{ mit } a(u, v) = \lambda(u, v), \quad \forall v \in V. \quad (1.35)$$

schon durch  $a(u, v) = \lambda(u, v)$  für alle  $v \in V_0$  eindeutig bestimmt.

Da  $C_0^\infty(\Omega)$  dicht in  $H_0^m(\Omega)$  liegt (Satz 1.1.9), sowie die durch (1.26) definierte Sesquilinearform auf  $H_0^m(\Omega) \times H_0^m(\Omega)$  beschränkt ist (Lemma 1.1.27), ist die Variationsformulierung (1.33) daher äquivalent zu der folgenden:

$$\text{Suche } u \in H_0^m(\Omega) \text{ mit } a(u, v) = \lambda(u, v), \quad \forall v \in H_0^m(\Omega). \quad (1.36)$$

*Bemerkungen.* Eine klassische Lösung des Variationsproblems (1.36) ist auch Lösung der ursprünglichen Randwertaufgabe. Die Differentialgleichung (1.29),(1.30) und die Variationsformulierung (1.36) sind somit bezüglich klassischer Lösungen äquivalent. Eine Lösung der Aufgabe (1.36), die definitionsgemäß in  $H_0^m(\Omega)$ , aber nicht notwendigerweise in  $C^{2m}(\Omega)$

---

<sup>3</sup>Der Begriff „Variationsformulierung“ erinnert an das RITZsche Variationsprinzip aus der Quantenmechanik. Um dort die gebundenen Zustände eines Elektrons in einem Potential  $V : x \mapsto V(x)$  zu bestimmen, sucht man bekanntlich das Infimum des RAYLAIGH-Quotienten  $(\mathcal{H}\psi, \psi)/(\psi, \psi)$ , wobei  $\mathcal{H} = -\frac{\hbar^2}{2m}\Delta + V$  den HAMILTON-Operator des Elektrons bezeichnet.

liegt, heißt schwache Lösung. Während die klassische Formulierung einer Randbedingung wie  $\partial u / \partial n = 0$  Voraussetzungen an den Rand, erfordert, kann die Aufgabe (1.36) für beliebige, meßbare  $\Omega$  formuliert werden.

**Beispiel. (Laplace-Operator)** Wir betrachten hier das DIRICHLET-Problem für den  $n$ -dimensionalen LAPLACE-operator  $\Leftrightarrow \Delta = \Leftrightarrow \sum_{i=1}^n \partial^2 / \partial^2 x_i$ .  $\Omega \in \mathbb{R}^n$  sei eine beliebige offene und beschränkte Menge. (Es sind keine Voraussetzungen an den Rand  $\partial\Omega$  notwendig.)

Die zum LAPLACE-Operator  $\Leftrightarrow \Delta$  zugehörige Sesquilinearform  $a$  hat die Gestalt

$$a(u, v) = \sum_{i=1}^n \int_{\Omega} \frac{\partial u}{\partial x_i} \overline{\frac{\partial v}{\partial x_i}} dx = (\nabla u, \nabla v), \quad (1.37)$$

der zum DIRICHLET-Problem zugehörige Randwertraum ist

$$V = H_0^1(\Omega). \quad (1.38)$$

Aufgrund der Abschätzungen

$$|a(u, v)| = \left| \sum_{i=1}^n \int_{\Omega} \frac{\partial u}{\partial x_i} \overline{\frac{\partial v}{\partial x_i}} dx \right| \leq \|u\|_1 \|v\|_1, \quad \forall u, v \in H^1(\Omega), \quad (1.39)$$

und

$$a(u, u) = \sum_{i=1}^n \int_{\Omega} \left| \frac{\partial u}{\partial x_i} \right|^2 dx \geq c_0 \|u\|_1^2, \quad \forall u \in H_0^1(\Omega), \quad (1.40)$$

wobei man letztere aufgrund der POINCARÉ-Ungleichung erhält, ist  $a$  eine beschränkte und koerzive Sesquilinearform. Wegen  $a(u, v) = \overline{a(v, u)}$ ,  $\forall u, v \in H_0^1(\Omega)$  ist sie auch hermitesch, und  $a(u, u)$  ist reell für alle  $u \in H_0^1(\Omega)$ .

Die Bedeutung der Koerzivität liegt hier in der folgenden Aussage [15, S. 137]:

**Lemma 1.1.31** *Sei  $\Omega \subset \mathbb{R}^n$  beschränkt. Die Sesquilinearform  $a(\cdot, \cdot)$  sei koerziv und hermitesch. Dann besitzt die Aufgabe (1.36) abzählbar viele Eigenwerte  $\lambda \in \mathbb{R}$ , die sich nur in  $\infty$  häufen.*

## 1.1.5 Neumann-Randbedingungen

Variationsprobleme mit physikalischem Hintergrund haben häufig die Form

$$\text{Suche } u \in H^m(\Omega) \text{ mit } a(u, v) = \lambda(u, v), \quad \forall v \in H^m(\Omega). \quad (1.41)$$

Wegen Lemma 1.1.30 ist für  $a_{\alpha\beta} \in L^\infty(\Omega)$  die durch (1.26) definierte Sesquilinearform auf  $H^m(\Omega) \times H^m(\Omega)$  beschränkt. Um herauszufinden, welche klassische Eigenwertaufgabe der Variationsformulierung (1.41) entspricht, nehmen wir zunächst an, daß (1.41) eine Lösung  $u \in C^{2m}(\Omega) \cap H^m(\Omega)$  besitzt. Wegen  $C^\infty(\Omega) \cap H^m(\Omega)$  dicht in  $H^m(\Omega)$  können wir  $v \in C^\infty(\Omega)$  annehmen. Wir beschränken uns hier auf den Fall  $m = 1$ . Dann läßt sich der Differentialoperator  $\mathcal{A}$  der Form (1.14) folgendermaßen schreiben:

$$\mathcal{A} = \Leftrightarrow \sum_{i,j=1}^n \frac{\partial}{\partial x_i} a_{ij} \frac{\partial}{\partial x_j} \Leftrightarrow \sum_{i=1}^n \frac{\partial}{\partial x_i} a_{i0} + \sum_{i=1}^n a_{0i} \frac{\partial}{\partial x_i} + a_{00}. \quad (1.42)$$

Unter der Voraussetzung  $a_{\alpha\beta} \in C^1(\Omega)$  und  $\bar{v}$  genügend glatt läßt sich eine verallgemeinerte Greensche Formel anwenden:

$$\begin{aligned}
a(u, v) &= \int_{\Omega} \left( \sum_{i,j=1}^n \bar{a}_{ij} \frac{\partial u}{\partial x_i} \frac{\partial \bar{v}}{\partial x_j} + \sum_{i=1}^n \bar{a}_{0i} u \frac{\partial \bar{v}}{\partial x_i} + \sum_{i=1}^n \bar{a}_{i0} \frac{\partial u}{\partial x_i} \bar{v} + \bar{a}_{00} u \bar{v} \right) dx \\
&= \int_{\Omega} \left( \Leftrightarrow \sum_{i,j=1}^n \frac{\partial}{\partial x_i} \left( a_{ij} \frac{\partial u}{\partial x_j} \right) \Leftrightarrow \sum_{i=1}^n \frac{\partial}{\partial x_i} (a_{i0} u) + \sum_{i=1}^n a_{0i} \frac{\partial u}{\partial x_i} + a_{00} u \right) \bar{v} dx \\
&\quad + \int_{\Gamma} \left( \sum_{i,j=1}^n n_i a_{ij} \frac{\partial u}{\partial x_j} + \sum_{i=1}^n n_i a_{i0} u \right) \bar{v} d, \\
&= \int_{\Omega} \mathcal{A} u \bar{v} dx + \int_{\Gamma} \mathcal{B} u \bar{v} d, \tag{1.43}
\end{aligned}$$

mit

$$\mathcal{B} := \sum_{i,j=1}^n n_i a_{ij} \frac{\partial}{\partial x_j} + \sum_{i=1}^n n_i a_{i0} \tag{1.44}$$

als den Rand-Differentialoperator. Dabei sind  $n_i$  die Komponenten der Normalenrichtung  $\mathbf{n} = \mathbf{n}(x)$ ,  $x \in \Gamma$ . Nach (1.41) stimmt  $a(u, v)$  mit  $\lambda(u, v)$  überein. Daher folgt

$$\int_{\Omega} \mathcal{A} u \bar{v} dx + \int_{\Gamma} \mathcal{B} u \bar{v} d, \stackrel{!}{=} \lambda \int_{\Omega} u \bar{v} dx, \quad \forall v \in H^1(\Omega). \tag{1.45}$$

Wir wählen zunächst  $v \in H_0^1(\Omega) \subset H^1(\Omega)$ . Dann verschwinden die Randintegrale, und wir erhalten

$$\int_{\Omega} (\mathcal{A} u \Leftrightarrow \lambda u) \bar{v} dx = 0, \quad \forall v \in H^1(\Omega) \tag{1.46}$$

und damit  $\mathcal{A} u = \lambda u$ . Daher reduziert sich die Identität  $a(u, v) = \lambda(u, v)$  zu

$$\int_{\Gamma} \mathcal{B} u \bar{v} d, = 0, \quad \forall v \in H^1(\Omega). \tag{1.47}$$

Dies beweist [15, S. 140]:

**Lemma 1.1.32** , sei hinreichend glatt. Dann ist eine klassische Lösung der Aufgabe (1.41) für  $m = 1$  auch eine klassische Lösung der Eigenwertaufgabe

$$\mathcal{A} u = \lambda u \quad \text{in } \Omega, \quad \mathcal{B} u = 0 \quad \text{auf } \Gamma, \tag{1.48}$$

und umgekehrt. Auch hier gilt wieder: Die Aufgabe (1.41) kann für beliebige, meßbare  $\Omega$  formuliert werden.

### 1.1.6 Formulierung von Eigenwertproblemen

Wir gehen nun über zu eine allgemeinen Formulierung von elliptischen Eigenwertproblemen. Sei  $\mathcal{A}$  ein gleichmäßig elliptischer Differentialoperator der Ordnung  $2m$  von der Form

$$\mathcal{A} := \sum_{|\alpha| \leq m} \sum_{|\beta| \leq m} (\Leftrightarrow 1)^{|\alpha|} D^{\alpha} (a_{\alpha\beta}(x) D^{\beta}), \quad x \in \Omega \tag{1.49}$$

mit  $a_{\alpha\beta} = \overline{a_{\beta\alpha}} \in L^\infty(\Omega)$ . Es seien  $m$  Rand-Differentialoperatoren der Ordnung  $0 \leq m_j < 2m$  gegeben durch

$$\mathcal{B}_j := \sum_{|\alpha| \leq m_j} b_{j\alpha}(x) D^\alpha, \quad j = 1, \dots, m \quad (1.50)$$

mit  $b_{j\alpha} \in C_0^\infty(\Omega)$ . Die Rand-Differentialoperatoren  $\mathcal{B}_j$  können dabei nicht beliebig gewählt werden, sondern müssen unabhängig voneinander sein (ein sogenanntes „normales System“ auf  $\Omega = \partial\Omega$  bilden, vgl. hierzu [37, S. 113 f] und [65, S. 214]). Insbesondere müssen die Ordnungen  $m_j$  paarweise verschieden sein ( $m_i \neq m_j$  für  $i \neq j$ ). Desweiteren muß die Bedingung  $b'_j(x, \xi) = \sum_{|\alpha|=m_j} b_{j\alpha}(x) \xi^\alpha \neq 0$  für alle  $x \in \Omega$ ,  $\xi \in \mathbb{R}^n$  und alle  $j = 1, \dots, m$  erfüllt sein, wobei  $\xi$  normal zu  $\Omega$  in  $x$  ist, und  $\Omega_1$  eine beliebige Untermenge von  $\Omega$  bezeichnet. Die zweite Bedingung bedeutet, daß die höchste reine Normalableitung  $\partial^{m_j} / \partial n^{m_j}$  in  $\mathcal{B}_j$  vorkommt und einen von Null verschiedenen Koeffizienten hat.

Sei nun  $V$  aus  $H_0^m(\Omega) \subset V \subset H^m(\Omega)$  der zugehörige Randwertraum,

$$V = H_0^m(\Omega) \cup \{u \in L^2(\Omega) : \mathcal{B}_j u \in L^2(\Omega), |\alpha| \leq m_j, j = 1, \dots, m\}. \quad (1.51)$$

Hierbei sind alle Ableitungen natürlich wieder im Distributionssinne zu verstehen. Dann lautet die klassische Formulierung eines Eigenwertproblems

$$\text{Suche } u \in V, \text{ so daß } \mathcal{A}u = \lambda u \quad \text{in } \Omega, \quad \mathcal{B}_j u = 0 \quad \text{auf } \Omega_1, \quad j = 1, \dots, m. \quad (1.52)$$

Eine Lösung von (1.52) heißt Eigenfunktion, falls  $u \neq 0$ . In diesem Fall ist  $\lambda$  der zu  $u$  gehörende Eigenwert. Man kann dann die klassische Darstellung (1.52) durch eine Variationsformulierung ersetzen, wobei eine geeignete Sesquilinearform  $a(\cdot, \cdot) : V \times V \rightarrow \mathbb{C}$ —sie ist durch Gleichung (1.26) gegeben—an die Stelle von  $\{\mathcal{A}, \mathcal{B}_j\}$  tritt:

$$\text{Suche } u \in V \text{ mit } a(u, v) = \lambda(u, v), \quad \forall v \in V. \quad (1.53)$$

**Definition 1.1.33** Sei  $\lambda \in \mathbb{C}$ . Mit  $E(\lambda)$  wird der Unterraum aller  $u \in V$  bezeichnet, die (1.53) erfüllen.  $E(\lambda)$  heißt der Eigenraum zu  $\lambda$ .  $\lambda$  heißt Eigenwert, falls  $\dim E(\lambda) \geq 1$ .

Für die Eigenwerte des Problems (1.53) gilt der folgende Satz [15, S. 227]:

**Satz 1.1.34**  $V \subset L^2(\Omega)$  sei stetig, dicht und kompakt eingebettet (z.B. sei  $V = H_0^m(\Omega)$  mit beschränktem  $\Omega$ ).  $a(\cdot, \cdot)$  sei koerziv und hermitesch. Dann haben die Aufgaben (1.53) abzählbar viele Eigenwerte  $\lambda \in \mathbb{R}$ , die sich nur in  $+\infty$  häufen, und es gilt  $\dim E(\lambda) < +\infty$ .

## 1.2 Variationseigenwertprobleme und Maximum-Minimumprinzip

### 1.2.1 Eigenwerttheorie symmetrischer kompakter Operatoren

Im folgenden sei  $T : H \rightarrow H$  durchweg ein symmetrischer kompakter linearer Operator auf einem reellen oder komplexen unendlich dimensionalen HILBERT-Raum  $H$  mit dem

Skalarprodukt  $(\cdot, \cdot)_H$  und der Norm  $\|\cdot\|_H$ . Kompakte Operatoren sind dadurch charakterisiert, daß sie eine beschränkte Menge stets in eine relativ kompakte Menge abbilden, oder—was äquivalent ist—wenn jede beschränkte Folge  $\{u_n\}$  aus  $H$  eine Teilfolge  $\{u_{n_k}\}$  besitzt, für die  $\{Tu_{n_k}\}$  konvergiert<sup>4</sup>. Aufgrund von  $(Tu, u)_H = (u, Tu)_H = \overline{(Tu, u)}_H$  ist für einen symmetrischen Operator  $T$  das Skalarprodukt  $(Tu, u)_H$  stets reell. Wir setzen im folgenden  $T \neq 0$  voraus, um Triviales zu vermeiden. Es gilt das folgende Lemma [8, S. 36]:

**Lemma 1.2.1** *Es sei  $\mu_1 := \sup\{(Tu, u)_H : \|u\|_H = 1\} > 0$ ; dann existiert ein  $\phi_1 \in H$  mit  $\|\phi_1\|_H = 1$ , so daß  $T\phi_1 = \mu_1\phi_1$ .*

*Beweis.* Aufgrund  $(Tu, u)_H \leq \|T\|_H = \mu_1$  für  $\|u\|_H = 1$  existiert eine Folge  $\{u_n\}$ , so daß  $\|u_n\|_H = 1$  und  $(Tu_n, u_n)_H \rightarrow \mu_1$ . Daher gilt

$$\begin{aligned} \|Tu_n \Leftrightarrow \mu_1 u_n\|_H^2 &= \|Tu_n\|_H^2 \Leftrightarrow 2\mu_1(Tu_n, u_n)_H + \mu_1^2 \|u_n\|_H^2 \\ &\leq \|T\|_H^2 \|u_n\|_H^2 \Leftrightarrow 2\mu_1(Tu_n, u_n)_H + \mu_1^2 \\ &\leq 2\mu_1^2 \Leftrightarrow 2\mu_1(Tu_n, u_n)_H \rightarrow 0, \quad \text{für } n \rightarrow +\infty \end{aligned} \quad (1.54)$$

Wegen der Kompaktheit von  $T$  besitzt  $\{Tu_n\}$  eine konvergente Teilfolge  $\{Tu_{n_k}\}$ , so daß  $Tu_{n_k} \rightarrow \phi$  für ein  $\phi \in H$ . Mit (1.54) und der Dreiecksungleichung ergibt sich dann  $\|\mu_1 u_{n_k} \Leftrightarrow \phi\|_H \leq \|Tu_{n_k} \Leftrightarrow \mu_1 u_{n_k}\|_H + \|Tu_{n_k} \Leftrightarrow \phi\|_H \rightarrow 0$  für  $k \rightarrow +\infty$ , so daß  $\{u_{n_k}\}$  gegen ein normiertes Element  $\phi_1 := \phi/\mu_1$  strebt. Wegen der Stetigkeit von  $T$  folgt  $\|T\phi_1 \Leftrightarrow \mu_1\phi_1\|_H \leq \|T\phi_1 \Leftrightarrow Tu_{n_k}\|_H + \|Tu_{n_k} \Leftrightarrow \mu_1\phi_1\|_H \rightarrow 0$  für  $k \rightarrow +\infty$ ; also ist  $\phi_1$  eine Eigenlösung zum Eigenwert  $\mu_1$ .  $\square$

Dieses Verfahren kann wiederholt werden, um weitere Eigenwerte von  $T$  zu gewinnen. Dies geht auf folgende Eigenschaft zurück: Sei  $W \subset H$  ein Teilraum von  $H$ , so daß  $T(W) \subset W$ . Dann ist  $T : W^\perp \rightarrow W^\perp$  ein kompakter und symmetrischer Operator. Sei also  $H_1 := \{\phi_1\}^\perp$  und  $T_1 := T|_{H_1}$  (Einschränkung von  $T$  auf  $H_1$ ). Dann gilt  $T(H_1) \subset H_1$ , weil  $(T(H_1), \phi_1)_H = (H_1, T\phi_1)_H = \mu_1(H_1, \phi_1)_H = 0$ . Daher ist  $T_1 : H_1 \rightarrow H_1$  ein symmetrischer kompakter Operator. Nach dem eben Bewiesenen besitzt  $T_1$ , falls  $T_1 \neq 0$ , einen Eigenwert  $\mu_2$  mit  $0 < \mu_2 = \|T_1\|_H \leq \|T\|_H = \mu_1$ .  $\phi_2$  sei die zugehörige normierte Eigenlösung. Ist  $T_2$  die Einschränkung von  $T$  auf  $H_2 = \{\phi_1, \phi_2\}^\perp$ , so liefern uns dieselben Überlegungen, falls  $T_2 \neq 0$ , einen Eigenwert  $\mu_3$  von  $T_2$  mit  $0 < \mu_3 = \|T_2\|_H \leq \|T_1\|_H = \mu_2$  und eine zugehörige (normierte) Eigenlösung  $\phi_3$ .  $\phi_2$  und  $\phi_3$  sind natürlich trivialerweise auch Eigenvektoren von  $T$  zu den Eigenwerten  $\mu_2$  und  $\mu_3$ . Durch Fortgang dieses Verfahrens erhält man eine Eigenwertfolge  $\{\mu_i\}$  von reellen Eigenwerten mit  $\mu_1 \geq \mu_2 \geq \dots \geq 0$  und eine Orthonormalfolge  $\{\phi_i\}$  von zugehörigen Eigenlösungen. Wir erhalten daher [8, S. 37]:

**Lemma 1.2.2** *Es sei  $\mu_i := \sup\{(Tu, u)_H : \|u\|_H = 1, u \perp \phi_1, \dots, \phi_{i-1}\} > 0$ ; dann existiert ein  $\phi_i \in H$  mit  $\|\phi_i\|_H = 1$ , so daß  $T\phi_i = \mu_i\phi_i$ .*

Mit  $T\phi_n = \mu_n$  und  $T\phi_m = \mu_m$  gilt

$$\mu_n(\phi_n, \phi_m)_H = (T\phi_n, \phi_m)_H = (\phi_n, T\phi_m)_H = \mu_m(\phi_n, \phi_m)_H, \quad (1.55)$$

<sup>4</sup>Für kompakte Operatoren ist auch der Begriff vollstetiger Operator gebräuchlich.



also  $(\mu_n \Leftrightarrow \mu_m)(\phi_n, \phi_m)_H = 0$ , und es folgt  $(\phi_n, \phi_m)_H = 0$  für alle  $\mu_n \neq \mu_m$ . Eigenvektoren zu gleichen Eigenwerten lassen sich mit dem GRAM-SCHMIDT'schen Orthonormalisierungsverfahren orthonormalisieren. Die Eigenwertfolge  $\{\mu_i\}$  breche nicht ab. Dann strebt  $\mu_i \rightarrow 0$ . Andernfalls wäre die Folge  $\phi_i/\mu_i$  beschränkt, und ihre Bildfolge  $\{T\phi_i/\mu_i\} = \{\phi_i\}$  müßte somit eine konvergente Teilfolge enthalten. Wegen

$$\|\phi_n \Leftrightarrow \phi_m\|_H^2 = (\phi_n \Leftrightarrow \phi_m, \phi_n \Leftrightarrow \phi_m)_H = 2 \quad \text{für } n \neq m \quad (1.56)$$

ist dies aber unmöglich. Da Null der einzig mögliche Häufungspunkt der Eigenwertfolge  $\{\mu_i\}$  ist, hat  $T$  höchstens endlich viele linear unabhängige Eigenvektoren zu Eigenwerten  $\mu > 0$ . Für beliebiges  $u \in H$  und  $n \geq 1$  gilt

$$v_n := u \Leftrightarrow \sum_{i=1}^n (u, \phi_i)_H \phi_i \in H_n, \quad (1.57)$$

infolgedessen ist  $\|Tv_n\|_H \leq \|T_n\|_H \|v_n\|_H = \mu_{n+1} \|v_n\|_H$  und

$$\begin{aligned} \|v_n\|_H^2 &= \|u\|_H^2 \Leftrightarrow 2 \sum_{i=1}^n |(u, \phi_i)_H|^2 + \sum_{i,j=1}^n (u, \phi_i)_H \overline{(u, \phi_j)_H} (\phi_i, \phi_j)_H \\ &= \|u\|_H^2 \Leftrightarrow \sum_{i=1}^n |(u, \phi_i)_H|^2 \leq \|u\|_H^2. \end{aligned} \quad (1.58)$$

Daher folgt  $\|Tv_n\|_H \leq \mu_{n+1} \|u\|_H \rightarrow 0$  für  $n \rightarrow +\infty$ , also  $Tv_n \rightarrow 0$ . Wir erhalten damit

$$Tu = \sum_{i=1}^{\infty} \mu_i (u, \phi_i)_H \phi_i. \quad (1.59)$$

In der Eigenwertfolge  $\{\mu_i\}$  tritt jeder Eigenwert  $\neq 0$  von  $T$  so oft auf, wie es seiner Multiplizität entspricht. Andernfalls gäbe es eine Eigenlösung  $\phi$  mit  $T\phi \neq 0$  und  $\phi \perp \phi_i$  ( $i = 1, 2, \dots$ ), für die dann  $T\phi = \sum_{i=1}^{\infty} \mu_i (\phi, \phi_i) \phi_i = 0$  gelten müßte, was aber der Annahme widerspricht.

Sei nun  $\{\phi_i\}$  ein vollständiges Orthonormalsystem in  $H$  und  $T\phi = 0$ . Dann ist  $0 = T\phi = \sum_{i=1}^{\infty} \mu_i (\phi, \phi_i)_H \phi_i$ , also  $\sum_{i=1}^{\infty} \mu_i^2 |(\phi, \phi_i)_H|^2 = 0$  und somit  $(\phi, \phi_i)_H = 0$  für alle  $i \in \mathbb{N}$ . Daher scheidet Null wegen  $\phi = 0$  als Eigenwert aus.

Umgekehrt sei nun Null *kein* Eigenwert von  $T$ . Ist  $\phi \in H$  orthogonal zu allen  $\phi_i$ , so muß  $T\phi = \sum_{i=1}^{\infty} \mu_i (\phi, \phi_i)_H \phi_i$  ebenfalls verschwinden. Da vorausgesetzt wurde, daß Null kein Eigenwert von  $T$  ist, muß  $\phi$  der Nullvektor sein, und  $\{\phi_i\}$  ist vollständig.

Zusammengefaßt erhalten wir daher den folgenden Satz [16, S. 202]:

**Satz 1.2.3** *Sei  $T : H \rightarrow H$  ein symmetrischer kompakter linearer Operator auf dem Hilbertraum  $H$ . Dann gilt*

- (a) *Alle Eigenwerte von  $T$  sind reell und durch Lemma 1.2.2 bestimmt.*
- (b) *Eigenvektoren zu verschiedenen Eigenwerten sind orthonormal. Eigenvektoren zu gleichen Eigenwerten lassen sich orthonormalisieren.*

(c) Das geschilderte Verfahren liefert jeden Eigenwert  $\neq 0$  von  $T$  so oft, wie es seiner Multiplizität entspricht, und es gilt der Entwicklungssatz für symmetrische kompakte Operatoren:

$$Tu = \sum_{i=1}^{\infty} \mu_i (u, \phi_i)_H \phi_i, \quad \forall u \in H. \quad (1.60)$$

(d) Falls  $\mu > 0$  ein Eigenwert von  $T$  ist, dann ist der Eigenraum von  $\mu$  endlich dimensional.

(e) Die Folge der Eigenwerte von  $T$ ,  $\{\mu_i\}$  bricht entweder ab oder strebt gegen 0.

(f) Die Eigenlösungen  $\phi_1, \phi_2, \dots$  von  $T$  bilden genau dann eine Orthonormalbasis von  $H$ , wenn Null kein Eigenwert von  $T$  ist.

## 1.2.2 Courantsches Maximum-Minimumprinzip

Lemma 1.2.2 besitzt den großen Nachteil, daß für die Bestimmung des  $i$ -ten Eigenwertes alle  $i \Leftrightarrow 1$  vorangehenden Eigenvektoren bekannt sein müssen. Folgendes COURANTSche Maximum-Minimumprinzip beseitigt dieses Manko [8, S. 39f],[16, S.212]:

**Satz 1.2.4** Sei  $T : H \rightarrow H$  ein symmetrischer kompakter linearer Operator auf einem reellen oder komplexen unendlich dimensionalen Hilbertraum  $H$  mit dem Skalarprodukt  $(\cdot, \cdot)_H$  und der Norm  $\|\cdot\|_H$ . Null sei kein Eigenwert von  $T$ . Dann ist der  $i$ -te Eigenwert von  $T$  gegeben durch

$$\mu_i = \max_{F_i \in \mathcal{F}_i(H)} \min_{u \in F_i} \{(Tu, u)_H : \|u\|_H = 1\}, \quad (1.61)$$

wobei  $\mathcal{F}_i(H)$  alle  $i$ -dimensionalen Teilräume von  $H$  umfaßt. Das Maximum-Minimum wird angenommen für  $F_i = \text{span} \{\phi_1, \dots, \phi_i\}$  mit  $T\phi_j = \mu_j \phi_j$  ( $j = 1, \dots, i$ ) und  $u = \phi_i$ , wobei  $\{\phi_i\}_{i=1}^{\infty}$  eine Orthonormalbasis in  $(H, \|\cdot\|_H)$  darstellt.

*Beweis.*  $\Lambda_i$  bezeichne die rechte Seite von (1.61). Desweiteren sei  $F_i = \text{span} \{\phi_1, \dots, \phi_i\}$ . Dann gilt für alle  $u = \sum_{j=1}^i \alpha_j \phi_j \in F_i$  mit  $\|u\|_H^2 = \sum_{j=1}^i |\alpha_j|^2 = 1$ :

$$(Tu, u)_H = \sum_{j,j'=1}^i (T\alpha_j \phi_j, \alpha_{j'} \phi_{j'})_H = \sum_{j=1}^i |\alpha_j|^2 \mu_j \geq \mu_i, \quad (1.62)$$

aufgrund von  $\mu_j \geq \mu_i$  für  $j = 1, \dots, i$ , und damit folgt  $\Lambda_i \geq \mu_i$ . Umgekehrt sei  $F_i$  ein beliebiger  $i$ -dimensionaler Teilraum von  $H$ , sowie  $u \in F_i$  mit  $u \perp \phi_1, \dots, \phi_{i-1}$  beliebig. Wegen Lemma 1.2.2 gilt  $(Tu, u)_H \leq \mu_i$  und somit

$$\min_{u \in F_i} (Tu, u)_H \leq \mu_i, \quad \forall F_i \in \mathcal{F}_i(H), \quad (1.63)$$

was  $\Lambda_i \leq \mu_i$  zur Folge hat.  $\square$

### 1.2.3 $i$ -Weite und Approximationstheorie

In diesem Abschnitt werden die Grundlagen der  $i$ -Weite und deren Beziehung mit der Approximationstheorie zusammengestellt. In der Approximationstheorie von metrischen Räumen werden diese durch  $i$ -dimensionale Teilräume approximiert. Die  $i$ -Weite stellt ein Maß dafür dar, wie gut dies möglich ist. Es sei  $X$  ein normierter linearer Raum und  $X_i$  ein beliebiger  $i$ -dimensionaler Teilraum von  $X$ . Mit

$$d(x; X_i) := \inf_{y \in X_i} \|x \leftrightarrow y\|_X \quad (1.64)$$

bezeichnen wir die Distanz zwischen  $x$  und  $X_i$ . Statt eines einzelnen Elements  $x \in X$ , betrachte nun eine Teilmenge  $A \subset X$ . Die maximale Abweichung zwischen  $A$  und  $X$  ist nun durch

$$d(A; X_i) := \sup_{x \in A} \inf_{y \in X_i} \|x \leftrightarrow y\|_X \quad (1.65)$$

gegeben. Man kann nun fragen, wie gut die Teilmenge  $A$  durch  $i$ -dimensionale Teilräume von  $X$  approximiert werden kann. Dies führt zu der Definition der Kolmogorov  $i$ -Weite [48, S. 9],[7, S. 268],[38, S. 132]:

**Definition 1.2.5 (Kolmogorov  $i$ -Weite)** *Es sei  $(X, \|\cdot\|_X)$  ein reeller oder komplexer normierter linearer Raum und  $A \subset X$  eine beliebige (nichtleere) Teilmenge. Mit  $i \in \mathbb{N}_0$  wird die Kolmogorov  $i$ -Weite von  $A$  in  $X$  definiert durch*

$$d_i(A; X) := \inf_{X_i} \sup_{x \in A} \inf_{y \in X_i} \|x \leftrightarrow y\|_X, \quad (1.66)$$

wobei sich das linke Infimum über alle  $i$ -dimensionalen Teilräume  $X_i \subset X$  erstreckt.

Die  $i$ -Weite besitzt u.a. die folgenden Eigenschaften [48, S. 9],[38, S.132]:

**Lemma 1.2.6**  *$X$  sei ein normierter linearer Raum und  $A \subset X$ . Dann gilt:*

- (a)  $d_i(A; X) = d_i(\bar{A}; X)$ , wobei  $\bar{A}$  der Abschluß von  $A$  in  $X$  ist.
- (b)  $B \subset A \Rightarrow d_i(B; X) \leq d_i(A; X)$
- (c)  $Y \subset X$  und  $A \subset Y \Rightarrow d_i(A; X) \leq d_i(A; Y)$
- (d)  $d_i(A; X) \geq d_{i+1}(A; X)$ ,  $i = 0, 1, \dots$
- (e)  $d_i(\alpha A; X) = |\alpha| d_i(A; X)$  für alle  $\alpha \in \mathbb{C}$ .
- (f) Wenn  $A$  abgeschlossen und beschränkt ist, gilt:  $d_i(A; X) \searrow 0^+ \Leftrightarrow A$  ist kompakt.
- (g) Sei  $X_{n+1}$  ein  $n + 1$ -dimensionaler Teilraum eines Hilbertraums  $H$ ,  $S(X_{n+1})$  sei die abgeschlossene Einheitskugel in  $X_{n+1}$ . Dann gilt:

$$d_n(S(X_{n+1}); H) = 1 \quad (\text{Theorem von Gohberg und Krein}).$$

*Bemerkungen.* (a)-(e) folgen unmittelbar aus der Definition der  $i$ -Weite. Die Beweise von (f) und (g) findet man bei [48, S. 11] bzw. [38, S. 137].

Wir definieren nun wie in [42, S. 131],[10, S. 314],[28, S. 492] ein sogenanntes Variations-triplet. Es dient zur Vereinfachung der Schreibweise.

**Definition 1.2.7 (Variationstripel)** *Es sei  $H$  ein unendlich dimensionaler Hilbertraum mit dem Skalarprodukt  $(\cdot, \cdot)_H$  und der Norm  $\|\cdot\|_H$ .  $W$  sei ein Teilraum von  $H$ , der stetig, dicht und kompakt in  $H$  eingebettet ist. Sei nun  $b$  eine Sesquilinearform auf  $W$ , die beschränkt, hermitesch und koerziv ist. Dann heißt  $(W, H, b)$  Variationstripel.*

Wir betrachten das Variationseigenwertproblem bezüglich des Variationstripels  $(W, H, b)$ :

$$b(u, v) = \lambda(u, v)_H, \quad \forall v \in W. \quad (1.67)$$

**Definition 1.2.8**  $\lambda$  heißt *Eigenwert* von (1.67), falls es einen nichttrivialen Vektor  $u \in W$  gibt, so daß (1.67) erfüllt ist.

**Satz 1.2.9** *Für alle  $u \in W$  existiert genau ein  $Tu \in W$ , so daß*

$$(u, v)_H = b(Tu, v), \quad \forall v \in W \quad (1.68)$$

mit einem linearen Operator  $T : W \rightarrow W$ .

*Beweis.* Da  $b$  eine beschränkte koerzive Form ist—es gilt  $|b(u, v)| \leq c_s \|u\|_W \|v\|_W$  und  $b(u, u) \geq c_0 \|u\|_W^2$ ,  $\forall u, v \in W$ —, und  $W$  stetig in  $H$  eingebettet ist, d.h. man hat  $\|u\|_H^2 \leq c \|u\|_W^2$ ,  $\forall u \in W$ , definiert die Sesquilinearform  $b$  ein Skalarprodukt, welches zum ursprünglichen—dies ist  $(\cdot, \cdot)_H$ —äquivalent ist.

Für beliebiges, aber festes  $u \in W$  ist die Abbildung  $f(v) = (v, u)_H$  ein beschränktes lineares Funktional auf  $W$ . Aufgrund des Darstellungssatzes von F. RIESZ [43, S. 109] existiert genau ein  $u' \in W$  mit der Eigenschaft  $(u, v)_H = b(u', v)$ ,  $\forall v \in W$ . Wir setzen  $u' = Tu$ . Der so definierte Operator ist offenbar linear. Da  $u \in W$  beliebig gewählt wurde, folgt die Behauptung des Satzes.  $\square$

Für den Operator  $T$  gilt das folgende Lemma:

**Lemma 1.2.10**  $T : W \rightarrow W$  ist auf dem HILBERT-Raum  $(W, b(\cdot, \cdot))$  ein beschränkter positiver selbstadjungierter Operator.

*Beweis.* Die Beschränktheit folgt wegen (1.68), der CAUCHY-SCHWARZschen Ungleichung, der stetigen Einbettung von  $W$  in  $H$  und der Koerzivität der Sesquilinearform  $b$ , da dann  $b(Tu, Tu) = (u, Tu)_H \leq \|u\|_H \|Tu\|_H \leq \sqrt{c} \|u\|_W \|Tu\|_W \leq \sqrt{\frac{c}{c_0}} (b(u, u))^{1/2} (b(Tu, Tu))^{1/2}$ , also  $b(Tu, Tu) \leq \frac{c}{c_0} b(u, u)$ ,  $\forall u \in W$ .

Die Positivität gilt aufgrund  $b(Tu, u) = (u, u)_H \geq 0$ ,  $\forall u \in W$ ; die Selbstadjungiertheit erhalten wir schließlich aus  $b(Tu, v) = (u, v)_H = \overline{(v, u)_H} = \overline{b(Tv, u)} = b(u, Tv)$ ,  $\forall u, v \in W$ , da  $b$  hermitesch ist.  $\square$

**Satz 1.2.11** *Das Variationseigenwertproblem (1.67) kann umgeschrieben werden in*

$$b(u, v) = \lambda(u, v)_H, \quad \forall v \in W \quad \Leftrightarrow \quad Tu = \frac{1}{\lambda} u. \quad (1.69)$$

*Beweis.* Wegen  $b(Tu, v) = (u, v)_H = \lambda^{-1}b(u, v) \stackrel{!}{=} b(\lambda^{-1}u, v)$ ,  $\forall v \in W$  folgt:  $\lambda$  ist genau dann ein Eigenwert von (1.67), wenn  $\lambda^{-1}$  ein Eigenwert von  $T$  ist, d.h.  $Tu = \lambda^{-1}u$  für ein nichttriviales  $u \in W$  gilt.  $\square$

**Lemma 1.2.12**  $T : W \rightarrow W$  ist auf dem HILBERT-Raum  $(W, b(\cdot, \cdot))$  kompakt.

*Beweis.* Sei nämlich  $\{u_n\}$  eine beschränkte Folge in  $W$ . Wegen  $W$  kompakt eingebettet in  $H$  existiert eine in  $H$  konvergente Teilfolge  $\{u_{n_k}\}$ , d.h. man hat  $u_{n_k} \rightarrow u$  für  $k \rightarrow +\infty$  mit  $u \in H$ . Wir ersetzen nun in (1.68)  $u$  durch  $u_{n_k} \Leftrightarrow u$  und  $v$  durch  $Tu_{n_k} \Leftrightarrow Tu$  und erhalten:

$$\begin{aligned} b(Tu_{n_k} \Leftrightarrow Tu, Tu_{n_k} \Leftrightarrow Tu) &= (u_{n_k} \Leftrightarrow u, Tu_{n_k} \Leftrightarrow Tu)_H \leq \|u_{n_k} \Leftrightarrow u\|_H \|Tu_{n_k} \Leftrightarrow Tu\|_H \\ &\leq \sqrt{c} \|u_{n_k} \Leftrightarrow u\|_H \|Tu_{n_k} \Leftrightarrow Tu\|_W \leq \sqrt{\frac{c}{c_0}} \|u_{n_k} \Leftrightarrow u\|_H (b(Tu_{n_k} \Leftrightarrow Tu, Tu_{n_k} \Leftrightarrow Tu))^{1/2}. \end{aligned} \quad (1.70)$$

Daher folgt  $b(Tu_{n_k} \Leftrightarrow Tu, Tu_{n_k} \Leftrightarrow Tu) \leq \frac{c}{c_0} \|u_{n_k} \Leftrightarrow u\|_H^2 \rightarrow 0$  für  $k \rightarrow +\infty$ , so daß  $Tu_{n_k} \rightarrow Tu$  in  $(W, b(\cdot, \cdot))$ .  $\square$

**Satz 1.2.13** *Es sei  $(W, H, b)$  ein Variationstripel. Dann gilt:*

(a) *Das Spektrum von (1.67) (=Menge aller Eigenwerte von (1.67)) besteht aus einer Folge von positiven Eigenwerten*

$$0 < \lambda_1 \leq \lambda_2 \leq \dots \leq \lambda_i \leq \dots \quad \text{mit } \lambda_i \rightarrow +\infty \text{ für } i \rightarrow +\infty, \quad (1.71)$$

*die sich nur in  $+\infty$  häufen und die unter Berücksichtigung ihrer Multiplizität geordnet sein mögen.*

(b) *Die Eigenwerte  $\lambda_i$  ( $i \in \mathbb{N}$ ) sind gegeben durch*

$$\frac{1}{\lambda_i} = \max_{F_i \in \mathcal{F}_i(W)} \min_{u \in F_i} \{b(Tu, u) : b(u, u) = 1\} = \max_{F_i \in \mathcal{F}_i(W)} \min_{u \in F_i} \{(u, u)_H : b(u, u) = 1\}, \quad (1.72)$$

*wobei  $\mathcal{F}_i(W)$  die Menge der  $i$ -dimensionalen Teilräume von  $W$  umfaßt.*

(c) *Die zugehörigen Eigenfunktionen  $\{\phi_i\}_{i=1}^\infty$  erfüllen die Gleichungen*

$$b(\phi_i, v) = \lambda_i(\phi_i, v)_H, \quad \forall v \in W, \quad b(\phi_i, \phi_j) = \delta_{i,j} \quad \text{und} \quad \frac{1}{\lambda_i} = (\phi_i, \phi_i)_H. \quad (1.73)$$

(d) *Jeder Vektor des Hilbertraumes  $W$  kann nach Eigenfunktionen des Operators  $T$  entwickelt werden:*

$$v = \sum_{i=1}^{\infty} b(v, \phi_i) \phi_i, \quad \forall v \in W. \quad (1.74)$$

(e) *Das Maximum-Minimum wird angenommen für  $F_i := \text{span}\{\phi_1, \dots, \phi_i\}$  und  $u := \phi_i$ , mit  $\{\phi_i\}_{i=1}^\infty$  als Orthonormalbasis von  $(W, b(\cdot, \cdot))$ , wobei  $T\phi_i = \lambda_i^{-1}\phi_i$  für alle  $i \in \mathbb{N}$  gilt.*

*Beweis.* Wir können die in Abschnitt 1.2.1 entwickelte Eigenwerttheorie der kompakten (positiven) selbstadjungierten Operatoren anwenden. Null ist kein Eigenwert von  $T$ ; an-  
 derfalls wäre mit  $\phi_0$  als nichttriviale Eigenfunktion zum Eigenwert Null wegen  $T\phi_0 = 0$   
 auch  $(\phi_0, \phi_0)_H = b(T\phi_0, \phi_0) = 0$ . Dies hätte eine triviale Eigenfunktion zur Folge und  
 führt damit zum Widerspruch. Wende daher Satz 1.2.3 und das Courantsche Maximum-  
 Minimumprinzip (Lemma 1.2.4) mit  $(W, b(\cdot, \cdot))$  an.  $\square$

Um nun die grundlegende Beziehung zwischen der Spektraltheorie und der  $i$ -Weite aus der  
 Approximationstheorie zu erhalten, definieren wir [42, S.133]:

**Definition 1.2.14** *Es sei  $S_b(W) := \{u \in W : b(u, u) \leq 1\}$  die abgeschlossene Einheitsku-  
 gel in  $W$  bezüglich der Sesquilinearform  $b$ .*

Mit dem Maximum-Minimumprinzip folgt dann [7, S. 279],[28, S. 492]:

**Lemma 1.2.15** *Sei  $(W, H, b)$  ein Variationstripel. Dann gilt*

$$d_{i-1}(S_b(W); H) = \lambda_i^{-1/2}, \quad \forall i \geq 1 \quad (1.75)$$

mit  $\{\lambda_i\}_{i=1}^\infty$  als der Eigenwertfolge des Eigenwertproblems (1.67).

*Beweis.* Sei  $F_i = \text{span} \{\phi_1, \dots, \phi_i\}$  mit  $i \geq 1$  und  $u \in S_b(W)$  beliebig. Dann gilt aufgrund  
 von  $\lambda_j \geq \lambda_{i+1}$  für alle  $j \geq i + 1$ , (1.74) und wegen

$$b(u, u) = \sum_{j=1}^{\infty} b(u, \phi_j)b(\phi_j, u) \geq \sum_{j=i+1}^{\infty} \lambda_j b(u, \phi_j)(\phi_j, u)_H \geq \lambda_{i+1} \sum_{j=i+1}^{\infty} b(u, \phi_j)(\phi_j, u)_H \quad (1.76)$$

für den Abstand zwischen  $u$  und  $F_i$ :

$$\begin{aligned} d^2(u, F_i) &= \inf_{v \in F_i} \|u \Leftrightarrow v\|_H^2 = \inf_{v \in F_i} b(Tu \Leftrightarrow Tv, u \Leftrightarrow v) = \sum_{j,k=i+1}^{\infty} b(u, \phi_j)b(\phi_k, u)b(T\phi_j, \phi_k) \\ &= \sum_{j=i+1}^{\infty} b(u, \phi_j)\lambda_j^{-1}b(\phi_j, u) = \sum_{j=i+1}^{\infty} b(u, \phi_j)(\phi_j, u)_H \leq \lambda_{i+1}^{-1}, \end{aligned} \quad (1.77)$$

da  $u \in S_b(W)$ . Daher folgt  $\sup_{u \in S_b(W)} d^2(u, F_i) \leq \lambda_{i+1}^{-1}$ , bzw.  $d_i(S_b(W); H) \leq \lambda_{i+1}^{-1/2}$ .

Umgekehrt sei nun  $F_{i+1} = \text{span} \{\phi_1, \dots, \phi_{i+1}\}$  mit  $i \geq 1$  und  $u \in F_{i+1}$ . Dann gilt mit  
 $\lambda_j \leq \lambda_{i+1}$  für  $j \leq i + 1$ , sowie  $b(u, \phi_j) = 0$  für alle  $j > i + 1$  mit der Abschätzung

$$\|u\|_{F_{i+1}}^2 = \sum_{j=1}^{i+1} b(u, \phi_j)(\phi_j, u)_H \geq \lambda_{i+1}^{-1} \sum_{j=1}^{i+1} b(u, \phi_j)b(\phi_j, u) = \lambda_{i+1}^{-1} b(u, u) \quad (1.78)$$

die Inklusion  $\lambda_{i+1}^{-1/2} S(F_{i+1}) \subset S_b(W)$ , da  $u \in \lambda_{i+1}^{-1/2} S(F_{i+1})$  die Abschätzung  $b(u, u) \leq$   
 $\lambda_{i+1} \|u\|_{F_{i+1}}^2 \leq 1$  zur Folge hat. Wir erhalten daher, wenn wir sukzessive (b),(e) und (g) aus  
 Lemma 1.2.6 anwenden:

$$d_i^2(S_b(W); H) \geq d_i^2(\lambda_{i+1}^{-1/2} S(F_{i+1}); H) = \lambda_{i+1}^{-1} d_i^2(S(F_{i+1}); H) = \lambda_{i+1}^{-1}. \quad \square \quad (1.79)$$

### 1.3 Zustandszahlfunktion

Aufgrund der bislang entwickelten Theorie können wir nun eine abstrakte Definition der Zustandszahlfunktion für ein Variationstriplet angeben [42, S. 133],[28, S. 492]:

**Definition 1.3.1 (Zustandszahlfunktion)** Sei  $(W, H, b)$  ein Variationstriplet im Sinne von Definition 1.2.7. Dann definieren wir für alle  $\lambda > 0$ :

$$\mathcal{N}(\lambda; W, H, b) = \sum_{\lambda d_{i-1}^2(S_b(W); H) \geq 1} 1 = \#\{i \geq 0 : d_i(S_b(W); H) \geq \lambda^{-1/2}\}. \quad (1.80)$$

Mit dieser Definition folgt zusammen mit Lemma 1.2.15:

**Lemma 1.3.2** Es sei  $(W, H, b)$  ein Variationstriplet und  $\{\lambda_i\}_{i=1}^{\infty}$  die Eigenwertfolge des zugehörigen Variationsproblems (1.67). Dann gilt für alle  $\lambda > 0$ :

$$\mathcal{N}(\lambda; W, H, b) = \sum_{\lambda_i \leq \lambda} 1 = \#\{i \geq 1 : \lambda_i \leq \lambda\}. \quad (1.81)$$

Aufgrund der Definition 1.3.1 gibt  $\mathcal{N}(\lambda; W, H, b)$  für  $\lambda > 0$  die Anzahl der Eigenwerte des Variationsproblems (1.67) bezüglich des Variationstriplets  $(W, H, b)$  unter Berücksichtigung ihrer Multiplizität an.

Elementare Eigenschaften der Zustandszahlfunktion besagt [42, S. 132]:

**Korollar 1.3.3** Es sei  $(W, H, b)$  ein Variationstriplet. Dann gilt für alle  $\lambda > 0$ :

- (a)  $\mathcal{N}(\lambda; W, H, b+t) = \mathcal{N}(\lambda \Leftrightarrow t; W, H, b)$ ,  $t \in \mathbb{R}$ .
- (b)  $\mathcal{N}(\lambda; W, H, \alpha b) = \mathcal{N}(\alpha^{-1}\lambda; W, H, b)$ ,  $\alpha > 0$ .

Hierbei ist  $b+t$  im Sinne von  $b(\cdot, \cdot) + t(\cdot, \cdot)_H$  zu verstehen.

*Beweis.* (a) Es gilt  $(\lambda \Leftrightarrow t)\lambda_i^{-1} \geq 1 \Leftrightarrow \lambda(\lambda_i+t)^{-1} \geq 1$ . Die Aussage folgt dann aufgrund von  $d_{i-1}^2(S_b(W); H) = \lambda_i^{-1}$ ,  $d_{i-1}^2(S_{b+t}(W); H) = (\lambda_i+t)^{-1}$  und der daraus folgenden Äquivalenz

$$\lambda d_{i-1}^2(S_{b+t}(W); H) \geq 1 \Leftrightarrow (\lambda \Leftrightarrow t)d_{i-1}^2(S_b(W); H) \geq 1. \quad (1.82)$$

(b) Da  $S_{\alpha b}(W) = \{u \in W : \alpha b(u, u) \leq 1\} = \{u \in W : b(\sqrt{\alpha}u, \sqrt{\alpha}u) \leq 1\} = \alpha^{-1/2}S_b(W)$  ist, folgt  $d_i(S_{\alpha b}(W); H) = \alpha^{-1/2}d_i(S_b(W); H)$  und daher

$$\lambda d_{i-1}^2(S_{\alpha b}(W); H) \geq 1 \Leftrightarrow \alpha^{-1}\lambda d_{i-1}^2(S_b(W); H) \geq 1. \quad \square \quad (1.83)$$

Wichtig für Anwendungen sind die beiden folgenden Lemmata [42, S. 132,136,141f].

**Lemma 1.3.4 (Monotonieprinzipien)**  $(W_1, H, b)$ ,  $(W_2, H, b)$ ,  $(W, H, b_1)$  und  $(W, H, b_2)$  seien Variationstriplets. Für alle  $\lambda > 0$  gilt dann:

- (a)  $W_1 \subset W_2 \Rightarrow \mathcal{N}(\lambda; W_1, H, b) \leq \mathcal{N}(\lambda; W_2, H, b)$ .
- (b)  $b_1(u, u) \geq b_2(u, u), \forall u \in W \Rightarrow \mathcal{N}(\lambda; W, H, b_1) \leq \mathcal{N}(\lambda; W, H, b_2)$ .

*Beweis.* (a) Aufgrund von  $W_1 \subset W_2$  folgt  $S_b(W_1) \subset S_b(W_2)$  und daher  $d_{i-1}(S_b(W_1); H) \leq d_{i-1}(S_b(W_2); H)$ , was

$$\mathcal{N}(\lambda; W_1, H, b) = \sum_{\lambda d_{i-1}^2(S_b(W_1); H) \geq 1} 1 \leq \sum_{\lambda d_{i-1}^2(S_b(W_2); H) \geq 1} 1 = \mathcal{N}(\lambda; W_2, H, b) \quad (1.84)$$

für alle  $\lambda > 0$  zur Folge hat.

(b) Wegen  $b_1(u, u) \geq b_2(u, u)$ ,  $\forall u \in W$  gilt  $S_{b_1}(W) \subset S_{b_2}(W)$ , also  $d_{i-1}(S_{b_1}(W); H) \leq d_{i-1}(S_{b_2}(W); H)$  und damit

$$\mathcal{N}(\lambda; W, H, b_1) = \sum_{\lambda d_{i-1}^2(S_{b_1}(W); H) \geq 1} 1 \leq \sum_{\lambda d_{i-1}^2(S_{b_2}(W); H) \geq 1} 1 = \mathcal{N}(\lambda; W, H, b_2). \quad \square \quad (1.85)$$

**Lemma 1.3.5 (Summationseigenschaft)**  $(W_1, H_1, b_1)$  und  $(W_2, H_2, b_2)$  seien Variationstriplet. Mit  $W = W_1 \oplus W_2$ ,  $H = H_1 \oplus H_2$  (Hilbertsche Summen) und  $b = b_1 \oplus b_2$  ist auch  $(W, H, b)$  ein Variationstriplet, und es gilt für alle  $\lambda > 0$ :

$$\mathcal{N}(\lambda; W, H, b) = \mathcal{N}(\lambda; W_1, H_1, b_1) + \mathcal{N}(\lambda; W_2, H_2, b_2). \quad (1.86)$$

Dabei gilt  $\|u_1 \oplus u_2\|_W^2 = \|u_1\|_{W_1}^2 + \|u_2\|_{W_2}^2$ ,  $\|u_1 \oplus u_2\|_H^2 = \|u_1\|_{H_1}^2 + \|u_2\|_{H_2}^2$ ;  $b = b_1 \oplus b_2$  ist im Sinne von  $b(u_1 \oplus u_2, v_1 \oplus v_2) = b_1(u_1, v_1) + b_2(u_2, v_2)$  zu verstehen.

Mit Hilfe von Korollar 1.3.3 und Lemma 1.3.4(b) zeigt man leicht [9, S. 358]:

**Korollar 1.3.6**  $(W, H, b_1)$  und  $(W, H, b_2)$  seien Variationstriplet, so daß es die Konstanten  $\delta_1, \delta_2 > 0$  gibt mit

$$|b_1(u, u) \Leftrightarrow b_2(u, u)| \leq \delta_1 b_1(u, u) + \delta_2 (u, u)_H, \quad \forall u \in W. \quad (1.87)$$

Dann gilt für alle  $\lambda > 0$  die Abschätzung

$$\mathcal{N}((1 \Leftrightarrow \delta_1)\lambda \Leftrightarrow \delta_2; W, H, b_2) \leq \mathcal{N}(\lambda; W, H, b_1) \leq \mathcal{N}((1 + \delta_1)\lambda + \delta_2; W, H, b_2). \quad (1.88)$$

*Bemerkungen.* Lemma 1.3.5 in Verbindung mit Lemma 1.3.4(a) bilden die Grundlage der sogenannten Dirichlet-Neumann-Klammerung [51, S.260ff]: Mit

$$\oplus H_0^m(\Omega_i) \subset H_0^m(\Omega) \subset V \subset H^m(\Omega) \subset \oplus H^m(\Omega_i), \quad (1.89)$$

wobei das offene Gebiet  $\Omega$  in eine endliche Anzahl von paarweise disjunkten offenen Teilgebieten  $\Omega_i$  zerlegt wird, so daß  $\bar{\Omega} = \cup_i \bar{\Omega}_i$ , folgt:

$$\begin{aligned} \sum_i \mathcal{N}(\lambda; H_0^m(\Omega_i), H_i, b_i) &\leq \mathcal{N}(\lambda; H_0^m(\Omega), H, b) \leq \mathcal{N}(\lambda; V, H, b) \\ &\leq \mathcal{N}(\lambda; H^m(\Omega), H, b) \leq \sum_i \mathcal{N}(\lambda; H^m(\Omega_i), H_i, b_i), \end{aligned} \quad (1.90)$$

wobei  $H := \oplus H_i$  und  $b := \oplus b_i$ . Wir werden dieses Verfahren benutzen, um die Zustandzahlfunktion nach unten abzuschätzen. Für eine obere Schranke werden wir eine Verfeinerung der Dirichlet-Neumann-Klammerung verwenden. Dazu benötigen wir folgendes Lemma, dessen Beweis bei [42, S. 138] zu finden ist:



**Lemma 1.3.7**  $(W, H, b)$  sei ein Variationstriplet und  $W_0$  ein abgeschlossener Teilraum von  $W$ . Mit  $\lambda > 0$  sei

$$Z_\lambda := \{u \in W : b(u, v) = \lambda(u, v)_H, \forall v \in W_0\}. \quad (1.91)$$

Dann gilt  $\mathcal{N}(\lambda; W, H, b) = \mathcal{N}(\lambda; W_0, H, b) + \mathcal{N}(\lambda; Z_\lambda, H, b) \Leftrightarrow \dim(W_0 \cap Z_\lambda)$  und im besonderen

$$\mathcal{N}(\lambda; W_0, H, b) \leq \mathcal{N}(\lambda; W, H, b) \leq \mathcal{N}(\lambda; W_0, H, b) + \mathcal{N}(\lambda; Z_\lambda, H, b). \quad (1.92)$$

## 1.4 Minkowski- und Hausdorff-Dimension

In diesem Abschnitt wollen wir uns mit zwei in der Literatur üblichen Definitionen der fraktalen Dimension beschäftigen [41, S. 370 ff],[17],[55],[56]. Wir werden sehen, daß diese nur in Spezialfällen, z.B. bei selbstähnlichen Fraktalen übereinstimmen. Die in der Literatur gebräuchlichere Definition ist die HAUSDORFF-Dimension. Für unser Problem ist jedoch die MINKOWSKI-Dimension zweckmäßiger. Wir definieren [28, S. 474]:

**Definition 1.4.1 (Minkowski-Dimension)** (a) Es sei  $\Omega \subset \mathbb{R}^n$  offen und beschränkt mit Rand  $\partial\Omega$ . Zu gegebenen  $\epsilon > 0$  sei  $\mathcal{U}_\epsilon = \{x \in \mathbb{R}^n : d(x, \Omega) < \epsilon\}$  die offene  $\epsilon$ -Umgebung von  $\Omega$ . Mit  $d \geq 0$  bezeichnen wir

$$\mathcal{M}_*(d; \Omega) := \liminf_{\epsilon \rightarrow 0^+} \epsilon^{-(n-d)} |\mathcal{U}_\epsilon \cap \Omega|_n \quad (1.93)$$

als den unteren  $d$ -dimensionalen MINKOWSKI-Inhalt von  $\Omega$  bezüglich  $\Omega$ .

$$\mathcal{M}^*(d; \Omega) := \limsup_{\epsilon \rightarrow 0^+} \epsilon^{-(n-d)} |\mathcal{U}_\epsilon \cap \Omega|_n \quad (1.94)$$

wird der obere MINKOWSKI-Inhalt von  $\Omega$  bezüglich  $\Omega$  genannt. Wir definieren dann die MINKOWSKI-Dimension  $D$  von  $\Omega$  bezüglich  $\Omega$  durch

$$D = D(\Omega) := \inf\{d \geq 0 : \mathcal{M}^*(d; \Omega) = 0\} = \sup\{d \geq 0 : \mathcal{M}_*(d; \Omega) = +\infty\}. \quad (1.95)$$

$\mathcal{M}_*(D; \Omega)$  bzw.  $\mathcal{M}^*(D; \Omega)$  bezeichnen wir kurz als den unteren bzw. oberen MINKOWSKI-Inhalt von  $\Omega$  bezüglich  $\Omega$ . Gilt  $\mathcal{M}_*(D; \Omega) = \mathcal{M}^*(D; \Omega) =: \mathcal{M}(D; \Omega)$ , so sagen wir:  $\Omega$  ist bezüglich  $\Omega$  MINKOWSKI-meßbar.

(b) Sei  $A \subset \mathbb{R}^n$  beschränkt. Zu  $\epsilon > 0$  sei  $A_\epsilon$  wieder die offene  $\epsilon$ -Umgebung von  $A$ . Mit  $d \geq 0$  bezeichnen wir

$$\tilde{\mathcal{M}}^*(d; A) := \limsup_{\epsilon \rightarrow 0^+} \epsilon^{-(n-d)} |A_\epsilon|_n \quad (1.96)$$

als den oberen  $d$ -dimensionalen MINKOWSKI-Inhalt von  $A$ . Wir definieren dann die MINKOWSKI-Dimension  $\tilde{D}$  von  $A$  durch

$$\tilde{D} = \tilde{D}(A) := \inf\{d \geq 0 : \tilde{\mathcal{M}}^*(d; A) = 0\} = \sup\{d \geq 0 : \tilde{\mathcal{M}}^*(d; A) = +\infty\}. \quad (1.97)$$

Die MINKOWSKI-Dimension besitzt u.a. die folgenden Eigenschaften, die unmittelbar aus ihrer Definition folgen:

**Lemma 1.4.2** Sei  $A \subset \mathbb{R}^n$  beschränkt. Dann gilt:

- (a)  $\tilde{\mathcal{M}}^*(\tilde{D}; A) = \tilde{\mathcal{M}}^*(\tilde{D}; \bar{A})$  und  $\tilde{D}(A) = \tilde{D}(\bar{A})$ .  
(b)  $B \subset A \Rightarrow \tilde{D}(B) \leq \tilde{D}(A)$ .

**Lemma 1.4.3** Sei  $\Omega \subset \mathbb{R}^n$  offen und beschränkt mit Rand  $\partial\Omega$ . Dann gilt:

$$\mathcal{M}^*(d; \cdot) \leq \tilde{\mathcal{M}}^*(d; \cdot), \quad \forall d \geq 0 \text{ und } D(\cdot) \leq \tilde{D}(\cdot).$$

**Definition 1.4.4 (Pflasterung des  $\mathbb{R}^n$ )** Sei  $\epsilon > 0$  gegeben. Dann bezeichnen wir eine mosaikartige Zerlegung  $\{Q_\zeta\}_{\zeta \in \mathbb{Z}^n}$  des  $\mathbb{R}^n$  in eine abzählbare Menge von disjunkten offenen Würfeln  $Q_\zeta$  mit Kantenlänge  $\epsilon$  und dem Mittelpunkt  $x_\zeta$ , so daß  $\bigcup_{\zeta \in \mathbb{Z}^n} \overline{Q_\zeta} = \mathbb{R}^n$  gilt, als eine Pflasterung des  $\mathbb{R}^n$ . Wenn  $A \subset \mathbb{R}^n$  beschränkt ist, definieren wir

$$K = K(\epsilon) = K(\epsilon; A) := \{\zeta \in \mathbb{Z}^n : \overline{Q_\zeta} \cap A \neq \emptyset\}. \quad (1.98)$$

**Lemma 1.4.5** Es existieren positive Konstanten  $c_1$  und  $c_2$ —abhängig von der Dimension  $n$ —derart, daß für alle  $\epsilon > 0$  und alle beschränkten Untermengen  $A$  des  $\mathbb{R}^n$  gilt:

$$\#K(\epsilon) \epsilon^n \leq |A_{c_1\epsilon}| \quad \text{und} \quad |A_\epsilon| \leq c_2 \#K(\epsilon) \epsilon^n. \quad (1.99)$$

*Beweis.* Wegen (1.98) gilt offensichtlich  $\bigcup_{\zeta \in K} Q_\zeta \subset A_{c_1\epsilon}$  mit  $c_1 > \sqrt{n}$  beliebig, aber fest. Da die Würfel  $Q_\zeta$  paarweise disjunkt sind, erhalten wir

$$\left| \bigcup_{\zeta \in K} Q_\zeta \right| = \#K |Q_\zeta| = \#K \epsilon^n \leq |A_{c_1\epsilon}|. \quad (1.100)$$

Zum Beweis der zweiten Abschätzung überzeugt man sich leicht davon, daß ein  $\rho > 1$  existiert, so daß  $A_\epsilon \subset \bigcup_{\zeta \in K} \overline{\rho Q_\zeta}$ , wobei  $\rho Q_\zeta$  hier einen offenen Würfel mit dem Mittelpunkt  $x_\zeta$  und der Kantenlänge  $\rho\epsilon$  bezeichnet. Sei nämlich  $\zeta \in K$  beliebig und  $x \in Q_\zeta \cap A$ . Für alle  $y \in A_\epsilon$  mit  $d(x, y) < \epsilon$  gilt dann aufgrund der Abschätzung  $|x_i \leftrightarrow y_i|^2 \leq \sum_{j=1}^n |x_j \leftrightarrow y_j|^2 < \epsilon^2$ ,  $\forall i = 1, \dots, n$ , sowie der Dreiecksungleichung:

$$|(x_\zeta)_i \leftrightarrow y_i| \leq |(x_\zeta)_i \leftrightarrow x_i| + |x_i \leftrightarrow y_i| < \frac{\epsilon}{2} + \epsilon < \frac{\rho}{2}\epsilon, \quad \forall i = 1, \dots, n \quad \Rightarrow \quad \rho > 3. \quad (1.101)$$

Hierbei bezeichnet  $(x_\zeta)_i$  die  $i$ -Komponente von  $x_\zeta$ ; analoges gilt für  $x_i$  und  $y_i$ . Wenn wir beachten, daß die Würfel  $\{\rho Q_\zeta\}_{\zeta \in \mathbb{Z}^n}$  nicht notwendigerweise paarweise disjunkt sind, können wir abschätzen:

$$|A_\epsilon| \leq \left| \bigcup_{\zeta \in K} \overline{\rho Q_\zeta} \right| \leq \sum_{\zeta \in K} |\overline{\rho Q_\zeta}| = \#K \rho^n \epsilon^n. \quad (1.102)$$

Die obige Abschätzung folgt daher mit jedem  $c_2 > 3^n$ .  $\square$

**Lemma 1.4.6** Sei  $A$  eine beschränkte Untermenge des  $\mathbb{R}^n$  ( $n \in \mathbb{N}$ ). Dann gilt

$$\tilde{D}(A) = \limsup_{\epsilon \rightarrow 0^+} \frac{\ln \#K(\epsilon)}{\ln \frac{1}{\epsilon}}. \quad (1.103)$$

*Beweis.*  $b$  bezeichne die rechte Seite von (1.103). Wir führen den Beweis in zwei Schritten.

(1) Wir beweisen zunächst die Ungleichung  $b \leq \tilde{D}(A)$ . Sei daher  $d > \tilde{D}(A)$ . Wegen Definition 1.4.1(b) gilt  $\tilde{\mathcal{M}}^*(d; A) = 0$ , und es existieren die Konstanten  $\epsilon_0$  und  $C$ , so daß  $|A_{c_1\epsilon}| \leq C \epsilon^{n-d}$ ,  $\forall \epsilon < \epsilon_0$ . Anwendung der zweiten Ungleichung in (1.99) gibt daher

$$\#K(\epsilon) \epsilon^n \leq |A_{c_1\epsilon}| \leq C \epsilon^{n-d}, \quad \forall \epsilon < \epsilon_0 \quad \Rightarrow \quad \#K(\epsilon) \leq C \epsilon^{-d}, \quad \forall \epsilon < \epsilon_0. \quad (1.104)$$

Wir schließen daher, daß

$$b := \limsup_{\epsilon \rightarrow 0^+} \frac{\ln \#K(\epsilon)}{\ln \frac{1}{\epsilon}} \leq \limsup_{\epsilon \rightarrow 0^+} \frac{\ln(C\epsilon^{-d})}{\ln \frac{1}{\epsilon}} \leq \limsup_{\epsilon \rightarrow 0^+} \left( \frac{\ln C}{\ln \epsilon} + d \right) = d, \quad (1.105)$$

woraus schließlich die Ungleichung  $b \leq \tilde{D}(A)$  folgt, da  $d > \tilde{D}(A)$  beliebig gewählt wurde.

(2) Die Aussage des Lemmas folgt, wenn wir  $b \geq \tilde{D}(A)$  zeigen. Sei also  $d > b$  beliebig. Aufgrund der Definition von  $b$  existiert ein  $\epsilon_0 \in (0, 1)$  derart, daß

$$d \geq \frac{\ln \#K(\epsilon)}{\ln \frac{1}{\epsilon}}, \quad \forall \epsilon < \epsilon_0 \quad \Rightarrow \quad \#K(\epsilon) < \epsilon^{-d}, \quad \forall \epsilon < \epsilon_0, \quad (1.106)$$

da  $1/\epsilon > 1$  für  $\epsilon < \epsilon_0$ . Anwendung der zweiten Ungleichung in (1.99) gibt

$$|A_\epsilon| \leq c_2 \#K(\epsilon) \epsilon^n \leq c_2 \epsilon^{n-d}, \quad \forall \epsilon < \epsilon_0 \quad \Rightarrow \quad \epsilon^{-(n-d)} |A_\epsilon| \leq c_2, \quad \forall \epsilon < \epsilon_0, \quad (1.107)$$

und wegen Definition 1.4.1(b) schließen wir  $\tilde{\mathcal{M}}^*(d; A) \leq c_2$  und damit  $\tilde{D}(A) \leq d$ , was  $b \geq \tilde{D}(A)$  zur Folge hat.  $\square$

Es stellt sich heraus, daß die MINKOWSKI-Dimension eines Gebietes unter einer großen Klasse von Abbildungen invariant ist (Korollar 1.4.8). Für den Beweis dieses Korollars benötigen wir ein Lemma, das die  $\epsilon$ -Umgebungen eines Gebietes, welches einer LIPSCHITZ-stetigen Abbildung unterworfen wird, zueinander in Beziehung setzt:

**Lemma 1.4.7** *Sei  $A \subset \mathbb{R}^n$  beschränkt und  $\phi : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$  eine Abbildung, die der LIPSCHITZ-Bedingung*

$$d(\phi(x), \phi(y)) \leq Ld(x, y), \quad \forall x, y \in A \quad (1.108)$$

*mit einer LIPSCHITZ-Konstanten  $L > 0$  genügt. Dann gibt es die Konstanten  $c_1, c_2 > 0$ , so daß*

$$|(\phi(A))_\epsilon| \leq c_1 |A_{c_2\epsilon}|, \quad \forall \epsilon > 0. \quad (1.109)$$

*Beweis.* Zu  $\epsilon > 0$  beliebig, aber fest sei  $\{Q_\zeta\}_{\zeta \in \mathbb{Z}^n}$  eine Pflasterung des  $\mathbb{R}^n$  im Sinne von Definition 1.4.4 mit  $K(\epsilon) = \{\zeta \in \mathbb{Z}^n : \overline{Q_\zeta} \cap A \neq \emptyset\}$ . Für beliebiges  $\zeta \in K$  gilt:

$$d(\phi(x), \phi(y)) \leq Ld(x, y) \leq L\sqrt{n}\epsilon, \quad \forall x, y \in \overline{Q_\zeta} \cap A, \quad (1.110)$$

so daß  $\phi(\overline{Q_\zeta} \cap A) \subset \overline{Q_\zeta^*}$ , wobei  $Q_\zeta^*$  einen Würfel mit Mittelpunkt  $x_\zeta^*$  und der Kantenlänge  $L\epsilon$  bezeichnet. Es gilt  $(\phi(\overline{Q_\zeta} \cap A))_\epsilon \subset \overline{\rho Q_\zeta^*}$ ,  $\forall \zeta \in K$  mit  $\rho > 3$  beliebig, aber fest (siehe hierzu den Beweis von Lemma 1.4.5). Daher folgt:

$$|(\phi(A))_\epsilon| \leq \left| \bigcup_{\zeta \in K} (\phi(\overline{Q_\zeta} \cap A))_\epsilon \right| \leq \left| \bigcup_{\zeta \in K} \overline{\rho Q_\zeta^*} \right| \leq \#K(\epsilon) \rho^n L^n \epsilon^n, \quad (1.111)$$

da  $\rho Q_\zeta^*$  ein Würfel mit der Kantenlänge  $\rho L\epsilon$  ist. Wegen Lemma 1.4.5 gilt  $\#K(\epsilon)\epsilon^n \leq |A_{c_2\epsilon}|$ ,  $\forall \epsilon > 0$  mit  $c_2 > \sqrt{n}$  beliebig, aber fest, und es folgt die die Behauptung des Lemmas mit Konstanten  $c_1 > 3^n L^n$  und  $c_2 > \sqrt{n}$ .  $\square$

Als Korollar haben wir:

**Korollar 1.4.8** (a) Sei  $A \subset \mathbb{R}^n$  beschränkt und  $\phi : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$  ein  $C^1$ -Diffeomorphismus. Dann gilt:

$$\tilde{D}(A) = \tilde{D}(\phi(A)). \quad (1.112)$$

(b) Ist  $\phi$  stetig differenzierbar auf einer offenen konvexen Menge  $B \supset A$  und  $\phi^{-1}$  stetig differenzierbar auf einer ebenfalls offenen konvexen Menge  $C \supset \phi(A)$ , sowie  $\phi'$  beschränkt auf  $B$  und  $(\phi^{-1})'$  beschränkt auf  $C$ , dann folgt ebenfalls die Behauptung (1.112)

*Beweis.* (a) Die Abbildung  $\phi$  ist stetig differenzierbar auf  $\mathbb{R}^n$ . Daher ist  $\phi$  wegen [61, S. 109f] LIPSCHITZ-stetig auf  $A$ . d.h. es existiert eine Konstante  $L > 0$ , so daß

$$d(\phi(x), \phi(y)) \leq Ld(x, y), \quad \forall x, y \in A. \quad (1.113)$$

Die Voraussetzungen von Lemma 1.4.7 sind erfüllt, und es folgt für alle  $d > \tilde{D}(A)$ :

$$\tilde{\mathcal{M}}^*(d; \phi(A)) = \limsup_{\epsilon \rightarrow 0^+} \epsilon^{-(n-d)} |(\phi(A))_\epsilon| \leq c_1 \limsup_{\epsilon \rightarrow 0^+} \epsilon^{-(n-d)} |A_{c_2\epsilon}| = c_1 c_2^{n-d} \tilde{\mathcal{M}}^*(d; A) = 0, \quad (1.114)$$

so daß  $\tilde{D}(\phi(A)) = \inf\{d \geq 0 : \tilde{\mathcal{M}}^*(d; \phi(A))\} \leq \tilde{D}(A)$ . Im Fall (b) ist  $\phi$  wieder wegen [61, S. 109f] LIPSCHITZ-stetig auf  $A$ , so daß auch in diesem Fall (1.114) folgt. Dieselbe Argumentation mit  $\phi(A)$  anstatt  $A$  und  $\phi^{-1}$  statt  $\phi$  beweist die Abschätzung  $\tilde{D}(A) \leq \tilde{D}(\phi(A))$ .  $\square$

Neben der MINKOWSKI-Dimension spielte bei der Entwicklung der Theorie der fraktalen Trommel ein weiterer Dimensionsbegriff eine Rolle [28, S. 483f]:

**Definition 1.4.9 (Hausdorff-Dimension)** Sei  $d \geq 0$  gegeben und  $A$  eine nichtleere Teilmenge des  $\mathbb{R}^n$  ( $n \in \mathbb{N}$ ). Dann definieren wir

$$\mathcal{H}(d; A) := \lim_{\epsilon \rightarrow 0^+} \left\{ \inf \sum_{i=1}^{\infty} (r_i)^d \right\}, \quad (1.115)$$

wobei sich das Infimum über alle abzählbaren Überdeckungen von  $A$  durch offene Kugeln  $\{B_i\}_{i=1}^{\infty}$  mit Radius  $r_i \leq \epsilon$  erstreckt.  $\mathcal{H}(d; A)$  wird das  $d$ -dimensionale HAUSDORFF-Maß von  $A$  genannt. Die HAUSDORFF-Dimension von  $A$  wird nun durch

$$H(A) := \inf\{d \geq 0 : \mathcal{H}(d; A) = 0\} = \sup\{d \geq 0 : \mathcal{H}(d; A) = +\infty\} \quad (1.116)$$

definiert.

Die HAUSDORFF-Dimension besitzt u. a. die folgenden Eigenschaften [54, S. 40],[44, S. 696]:

**Lemma 1.4.10**

- (a)  $A \subset B \subset \mathbb{R}^n \Rightarrow H(A) \leq H(B)$   
 (b)  $A = \cup_{i=1}^{\infty} A_i \Rightarrow H(A) = \sup_i H(A_i)$   
 (c) Sei  $\phi: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$  ein  $C^1$ -Diffeomorphismus und  $A \subset \mathbb{R}^n$ . Dann gilt  $H(A) = H(\phi(A))$ .  
 (d) Offene Teilmengen  $A \subset \mathbb{R}^n$  besitzen die HAUSDORFF-Dimension  $H(A) = n$ .  
 (e) Beliebige Teilmengen  $A \subset \mathbb{R}^n$  mit endlichem  $n$ -dimensionalen LEBESGUESchen Maß ( $|A|_n > 0$ ) besitzen die HAUSDORFF-Dimension  $H(A) = n$ .

*Bemerkungen.* Die HAUSDORFF-Dimension wird daher benutzt, um Mengen zu charakterisieren, deren Lebesguesches Maß verschwindet. Für eine gegebene Menge  $A$  stimmen HAUSDORFF- und MINKOWSKI-Dimension in der Regel nicht überein, wie folgende Beispiele zeigen.

**Beispiele.** (1) Sei  $A$  die Menge der rationalen Zahlen im Intervall  $(0, 1)$ . Dann gilt  $H(A) = 0$ , da  $A$  abzählbar unendlich. Dagegen ist  $D(A) = \tilde{D}(A) = 1$ , wegen  $\bar{A} = [0, 1]$ . Die MINKOWSKI-Dimension unterscheidet aufgrund von  $\tilde{\mathcal{M}}^*(d; A) = \tilde{\mathcal{M}}^*(d; \bar{A})$  (siehe Definition 1.4.1(b) und Lemma 1.4.2(a)) nicht zwischen der Menge selbst und ihrem Abschluß.

(2) Gegeben sei die Menge  $A = \{i^{-\alpha} \in \mathbb{R} : i = 1, 2, \dots\}$  mit  $\alpha > 0$ . Dann gilt  $H(A) = 0$  und  $D(A)\tilde{D}(A) = (\alpha + 1)^{-1}$ . Die Menge  $A$  ist MINKOWSKI-meßbar; es gilt  $\mathcal{M}(D; A) = (1 \Leftrightarrow D)^{-1} 2^{1-D} \alpha^D$ . Zum Beweis siehe [28, S.523].

Es läßt sich aber eine allgemeingültige Beziehung zwischen der HAUSDORFF- und der MINKOWSKI-Dimension angeben:

**Lemma 1.4.11** Sei  $A \subset \mathbb{R}^n$  beliebig. Dann gilt  $H(A) \leq \tilde{D}(A)$ .

*Beweis.* Sei  $d > \tilde{D}(A)$  beliebig, aber fest. Wegen (1.103) gibt es ein  $\epsilon_0 < 1$ , so daß  $\#K(\epsilon) \leq \epsilon^{-d}$  für  $\epsilon < \epsilon_0 < 1$ . Da  $A \subset \cup_{\zeta \in K(\epsilon)} \overline{Q_\zeta}$ , folgt mit Definition 1.4.9:

$$\mathcal{H}(d; A) \leq \#K(\epsilon)(\sqrt{n}\epsilon)^d \leq n^{d/2} < +\infty \quad (1.117)$$

und damit  $H(A) \leq d$ . Da wir  $d > \tilde{D}(A)$  beliebig gewählt haben, folgt unmittelbar die Behauptung des Lemmas.  $\square$

Aufgrund von  $\tilde{D}(A) \leq n$ , sowie  $H(A) \geq n \Leftrightarrow 1$ , haben wir als Korollar [28, S. 486]:

**Korollar 1.4.12** Falls  $\partial A := \partial\Omega$ , wobei  $\Omega$  eine nichtleere beschränkte offene Teilmenge des  $\mathbb{R}^n$  ist, gilt  $\tilde{D}(A) \in [n \Leftrightarrow 1, n]$ .

Eine Klasse von Gebieten, bei der MINKOWSKI- und HAUSDORFF-Dimension übereinstimmen, sind streng selbstähnliche Gebiete. Dazu definieren wir:

**Definition 1.4.13 (Selbstähnlichkeit)** Sei  $N \geq 2$  eine natürliche Zahl.  $A \subset \mathbb{R}^n$  heißt streng selbstähnlich, falls  $A$  eine Vereinigung von  $N$  disjunkten Mengen  $A_i$  ( $i = 1, \dots, N$ ) ist, wobei  $A_i$  mit dem Verhältnis  $r \in (0, 1)$  ähnlich zu  $A$  ist,  $A = \uplus_{i=1}^N A_i$  mit  $A_i = rA$ .

**Lemma 1.4.14** Sei  $A$  eine streng selbstähnliche Menge im Sinne von Definition 1.4.13 mit  $Nr^n < 1$ . Dann gilt

$$H(A) = \tilde{D}(A) = \frac{\ln N}{\ln \frac{1}{r}}. \quad (1.118)$$

*Beweis.* Der Beweis benutzt zwei elementare Eigenschaften für die  $\epsilon$ -Umgebungen von Mengen in einem normierten Raum [61, S. 27]: Sei  $r \in (0, 1)$ ,  $B \subset \mathbb{R}^n$  beschränkt und  $\epsilon > 0$  beliebig. Dann gilt  $rB_\epsilon = (rB)_{r\epsilon}$  und  $|rB_\epsilon| = r^n|B_\epsilon|$ .

Sei nun  $\epsilon_0 > 0$  beliebig, aber fest und  $\epsilon_1 = r\epsilon_0$ . Dann folgt mit den obigen Eigenschaften:

$$\begin{aligned} |A_{\epsilon_1}| &\leq \sum_{i=1}^N |(A_i)_{\epsilon_1}| = \sum_{i=1}^N |(rA)_{\epsilon_1}| = N|rA_{\epsilon_1/r}| = Nr^n|A_{\epsilon_1/r}| \\ &= Nr^n|A_{\epsilon_0}| \left(\frac{\epsilon_1}{r\epsilon_0}\right)^{n-d} = Nr^d|A_{\epsilon_0}| \left(\frac{\epsilon_1}{\epsilon_0}\right)^{n-d}. \end{aligned} \quad (1.119)$$

Für alle  $d$  mit  $Nr^d \leq 1$  erhalten wir daher die Abschätzung

$$\epsilon_1^{-(n-d)}|A_{\epsilon_1}| \leq \epsilon_0^{-(n-d)}|A_{\epsilon_0}|. \quad (1.120)$$

Wenn wir  $\epsilon_{i+1} = r\epsilon_i$ ,  $i \in \mathbb{N}_0$  setzen, so erhalten wir iterativ:

$$\epsilon_i^{-(n-d)}|A_{\epsilon_i}| \leq \epsilon_{i-1}^{-(n-d)}|A_{\epsilon_{i-1}}| \leq \dots \leq \epsilon_0^{-(n-d)}|A_{\epsilon_0}|. \quad (1.121)$$

Zu gegebenen  $0 < \epsilon < \epsilon_0$  wähle  $i$ , so daß  $\epsilon_{i+1} < \epsilon \leq \epsilon_i$ . Dann folgt aufgrund der Voraussetzung  $Nr^n < 1$  für alle  $d$  mit  $\ln N / \ln \frac{1}{r} \leq d < n$ :

$$\epsilon^{-(n-d)}|A_\epsilon| \leq \epsilon_{i+1}^{-(n-d)}|A_{\epsilon_i}| = \frac{\epsilon_i^{-(n-d)}}{r^{n-d}}|A_{\epsilon_i}| \leq \frac{\epsilon_0^{-(n-d)}}{r^{n-d}}|A_{\epsilon_0}| < +\infty \quad (1.122)$$

und damit  $\limsup_{\epsilon \rightarrow 0^+} \epsilon^{-(n-d)}|A_\epsilon| < +\infty$ , so daß  $H(A) \leq \tilde{D}(A) \leq \ln N / \ln \frac{1}{r}$ . Die Behauptung folgt mit [17, S. 736], da  $H(A) = \ln N / \ln \frac{1}{r}$ .  $\square$

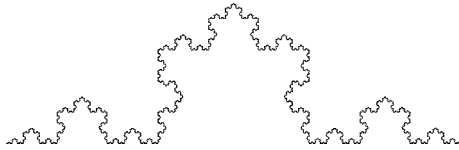


Abbildung 1.1: Kochsche Schneeflockenkurve. Es gilt  $H = D = \ln 4 / \ln 3$ .

**Beispiel.** Das bekannteste Beispiel eines selbstähnlichen Fraktals ist wohl die Kochsche Schneeflockenkurve (Abbildung 1.1). Sie besitzt wegen  $N = 4$  und  $r = 1/3$  die fraktale Dimension  $H = \tilde{D} = \ln 4 / \ln 3$ .

# Kapitel 2

## Der Satz von Lapidus

Wir werden in diesem Kapitel den Beweis des Satzes von LAPIDUS [28, S. 479] in seinem vollen Umfang wiedergeben. Wir konzentrieren uns dabei aber auf das DIRICHLET-Problem, da der Beweis für das NEUMANN-Problem ähnlich verläuft. Zum Beweis benutzen wir eine Verfeinerung der schon erwähnten DIRICHLET-NEUMANN-Klammerung. Bei diesem Verfahren wird das betrachtete Gebiet  $\Omega \subset \mathbb{R}^n$  (beschränkt und offen) in eine geeignete Folge von immer kleineren Würfeln zerlegt, wobei die Kantenlänge gegen Null strebt. Durch dieses Exhaustionsverfahren wird  $\Omega$  von innen heraus immer genauer angenähert, um den Einfluß des (fraktalen) Randes auf die Zustandzahlfunktion  $\mathcal{N}(\lambda)$  zu gewinnen. Das wesentliche Prinzip der DIRICHLET-NEUMANN-Klammerung besteht darin, das Randwertproblem unter Ausnutzung ein Monotonieprinzips und der Summationseigenschaft von  $N$  (Lemma 1.3.4(a) bzw. 1.3.5) auf das Problem eines Würfels zurückzuführen, für dessen Zustandzahlfunktion man eine Abschätzung kennt (Lemma 2.2.2). Die Verfeinerung besteht in der Verwendung von Lemma 1.3.7 als obere Schranke; die dort auftretende untere Schranke ist nichts anderes als ein Monotonieprinzip. Die mit diesem Verfahren erhaltene Abschätzung von  $\mathcal{N}$  enthält drei Terme: Einen „inneren“ Term, der durch den WEYLSchen Ausdruck  $\Phi(\lambda)$  verursacht wird, einen Rand- sowie einen Restterm  $R(\lambda)$ , die beide als Funktion der fraktalen MINKOWSKI-Dimension des Randes abgeschätzt werden können.

### 2.1 Formulierung des Satzes

Wir formulieren nun den Satz von LAPIDUS (Satz 2.1.5) und einige Folgerungen (Korollar 2.1.6 und 2.1.7), die damit verbunden sind. Zunächst stellen wir die Voraussetzungen dieses Satzes zusammen:

1.  $\Omega$  sei ein offenes und beschränktes Gebiet aus dem  $\mathbb{R}^n$  ( $n \in \mathbb{N}$ ). Die Oberfläche von  $\Omega$ , der Rand, wird mit  $\gamma = \partial\Omega$  bezeichnet.
2. Sei  $V$  ein abgeschlossener Teilraum von  $H^m(\Omega)$ , der  $H_0^m(\Omega)$  enthält, d.h.

$$H_0^m(\Omega) \subset V \subset H^m(\Omega). \quad (2.1)$$

3.  $\mathcal{A}$  sei ein positiver, gleichmäßig elliptischer und formal selbstadjungierter Operator der Ordnung  $2m$  ( $m \in \mathbb{N}$ ) auf  $\Omega$ :

$$\mathcal{A} = \sum_{|\alpha| \leq m} \sum_{|\beta| \leq m} (\Leftrightarrow 1)^{|\alpha|} D^\alpha (a_{\alpha\beta}(x) D^\beta). \quad (2.2)$$

Es gelte  $a_{\alpha\beta} = \overline{a_{\beta\alpha}} \in L^\infty(\Omega)$  für  $|\alpha|, |\beta| \leq m$  und  $a_{00} \geq 0$ .

4. Die zugehörige beschränkte hermitesche Form

$$a(u, v) = \sum_{|\alpha| \leq m} \sum_{|\beta| \leq m} (D^\alpha u, a_{\alpha\beta} D^\beta v), \quad u, v \in V \quad (2.3)$$

sei koerziv im Sinne von Definition 1.1.28.

5. Der Hauptteil des Operators  $\mathcal{A}$ —wir bezeichnen ihn mit  $\mathcal{A}'$ —besitze lokal konstante Koeffizienten, d.h. für  $|\alpha|, |\beta| = m$  sei  $a_{\alpha\beta}$  auf jedem zusammenhängenden Gebiet aus  $\Omega$  konstant.
6. Für gemischte DIRICHLET-NEUMANN-Bedingungen ( $V \neq H_0^m(\Omega)$ ) erfülle  $\Omega$  die  $C'$ -Bedingung aus Definition 1.1.11.

*Bemerkungen.* Wegen Lemma 1.1.27 ist die Sesquilinearform  $a$  beschränkt und hermitesch, da  $a_{\alpha\beta} = \overline{a_{\beta\alpha}} \in L^\infty(\Omega)$ . Aus der Koerzivität von  $a$  läßt sich mit Lemma 1.1.29 die gleichmäßige Elliptizität des Operators  $\mathcal{A}$  herleiten. Aufgrund der Hermitizität von  $a$  ist  $a(u, u)$  reell für alle  $u \in V$ .

Wir betrachten das folgende Eigenwertproblem:

$$\mathcal{A}u = \lambda u, \quad u \in V. \quad (2.4)$$

**Definition 2.1.1**  $\lambda$  heißt *Eigenwert* von (2.4), wenn es einen nichttrivialen Vektor  $u \in V$  gibt, so daß im Distributionssinne gilt:

$$a(u, v) = \lambda(u, v)_{L^2(\Omega)}, \quad \forall v \in V. \quad (2.5)$$

Wir können nun Satz 1.2.13 mit dem Variationstripel  $(V, L^2(\Omega), a)$  anwenden:

**Satz 2.1.2** *Das Spektrum von (2.4) besteht aus einer abzählbar unendlichen Folge von diskreten und positiven Eigenwerten  $\{\lambda_i\}_{i=1}^\infty$  endlicher Multiplizität, wobei diese unter Berücksichtigung ihrer Multiplizität in aufsteigender Reihenfolge geordnet sein mögen:*

$$0 < \lambda_1 \leq \lambda_2 \leq \dots \leq \lambda_i \leq \dots \quad \text{mit } \lambda_i \rightarrow +\infty \text{ für } i \rightarrow +\infty. \quad (2.6)$$

Der  $i$ -te Eigenwert ist dabei durch das COURANTSche Maximum-Minimumprinzip gegeben:

$$\frac{1}{\lambda_i} = \max_{F_i \in \mathcal{F}(V)_i} \min_{u \in F_i} \{(u, u)_{L^2(\Omega)} : a(u, u) = 1\}, \quad (2.7)$$

wobei  $\mathcal{F}_i(V)$  die Menge aller  $i$ -dimensionalen Teilräume von  $V$  umfaßt.



**Definition 2.1.3**  $\mathcal{N}(\lambda)$  bezeichne die Zustandzahlfunktion, d.h. für  $\lambda > 0$  gebe  $\mathcal{N}(\lambda)$  die Anzahl der Eigenwerte kleiner oder gleich  $\lambda$  unter Berücksichtigung ihrer Multiplizität an:

$$\mathcal{N}(\lambda) = \#\{i \geq 1 : \lambda_i \leq \lambda\}. \quad (2.8)$$

**Definition 2.1.4 (Weylscher Ausdruck)** Es sei

$$\mu'_{\mathcal{A}}(\Omega) = \frac{1}{(2\pi)^n} \int_{\Omega} |\{\xi \in \mathbb{R}^n : a'(x, \xi) < 1\}|_n dx \quad (2.9)$$

mit dem Hauptteilpolynom  $a'$  des Differentialoperators  $\mathcal{A}$  aus Definition 1.1.18,

$$a'(x, \xi) = \sum_{|\alpha|=m} \sum_{|\beta|=m} a_{\alpha\beta}(x) \xi^{\alpha+\beta}, \quad (x, \xi) \in \Omega \times \mathbb{R}^n. \quad (2.10)$$

Dann definieren wir den sogenannten WEYLSchen Ausdruck durch

$$\Phi(\lambda) := \Phi(\lambda; \Omega) := \mu'_{\mathcal{A}}(\Omega) \lambda^{\frac{n}{2m}}. \quad (2.11)$$

**Satz 2.1.5 (Satz von Lapidus)** Die Voraussetzungen 1. bis 6. seien erfüllt. Ferner sei  $d \in [n \Leftrightarrow 1, n]$  so gewählt, daß  $\mathcal{M}^*(d; , ) < +\infty$  für DIRICHLET-Randbedingungen und  $\tilde{\mathcal{M}}^*(d; , ) < +\infty$  für gemischte DIRICHLET-NEUMANN-Randbedingungen gilt. Dann gilt für die Zustandzahlfunktion bezüglich des Eigenwertproblems (2.4) die folgende Abschätzung:

(a) Wenn  $d \in (n \Leftrightarrow 1, n]$ , dann gilt

$$|\mathcal{N}(\lambda) \Leftrightarrow \Phi(\lambda)| = O(\lambda^{\frac{d}{2m}}), \quad \text{für } \lambda \rightarrow \infty. \quad (2.12)$$

(b) Wenn  $d = n \Leftrightarrow 1$ , dann gilt

$$|\mathcal{N}(\lambda) \Leftrightarrow \Phi(\lambda)| = O(\lambda^{\frac{d}{2m}} \log \lambda), \quad \text{für } \lambda \rightarrow \infty. \quad (2.13)$$

Es sei nun  $D$  die MINKOWSKI-Dimension von  $\cdot$ , bezüglich  $\Omega$  und  $\tilde{D}$  die MINKOWSKI-Dimension von  $\cdot$ . Wenn wir  $\mathcal{M}^*(d; , ) < +\infty$  für  $d > D$  bzw.  $\tilde{\mathcal{M}}^*(d; , ) < +\infty$  für  $d > \tilde{D}$  anwenden, erhalten wir die beiden folgenden Korollare:

**Korollar 2.1.6 (Dirichlet-Randbedingung)**

Die Voraussetzungen 1. bis 5. seien erfüllt.  $D = D(\cdot) \in [n \Leftrightarrow 1, n]$  sei die MINKOWSKI-Dimension von  $\cdot$ , bezüglich  $\Omega$ . Dann gilt bezüglich des Eigenwertproblems (2.4) mit  $V = H_0^m(\Omega)$  die folgende Abschätzung:

(a) Wenn  $\cdot$ , fraktal ist, d.h.  $D \in (n \Leftrightarrow 1, n]$ , dann gilt für alle  $d > D$ :

$$|\mathcal{N}(\lambda) \Leftrightarrow \Phi(\lambda)| = O(\lambda^{\frac{d}{2m}}), \quad \text{für } \lambda \rightarrow +\infty. \quad (2.14)$$

(b) Wenn  $\cdot$ , nichtfraktal ist, d.h.  $D = n \Leftrightarrow 1$ , dann gilt für alle  $d > D$ :

$$|\mathcal{N}(\lambda) \Leftrightarrow \Phi(\lambda)| = O(\lambda^{\frac{d}{2m}} \log \lambda), \quad \text{für } \lambda \rightarrow +\infty. \quad (2.15)$$

Desweiteren gelten die beiden Abschätzungen mit  $d = D$ , falls der obere MINKOWSKI-Inhalt  $\mathcal{M}^*(D; , )$  bezüglich  $\Omega$  endlich ist.

**Korollar 2.1.7 (Gemischte Dirichlet-Neumann Randbedingungen)**

Die Voraussetzungen 1. bis 6. seien erfüllt.  $\tilde{D} = \tilde{D}(\cdot, \cdot) \in [n \Leftrightarrow 1, n]$  sei die MINKOWSKI-Dimension von  $\cdot, \cdot$ . Dann gilt bezüglich des Eigenwertproblems (2.4) mit  $H_0^m(\Omega) \subset V \subset H^m(\Omega)$  die folgende Abschätzung:

(a) Wenn  $\cdot, \cdot$  fraktal ist, d.h.  $\tilde{D} \in (n \Leftrightarrow 1, n]$ , dann gilt für alle  $d > \tilde{D}$ :

$$|\mathcal{N}(\lambda) \Leftrightarrow \Phi(\lambda)| = O(\lambda^{\frac{d}{2m}}), \quad \text{für } \lambda \rightarrow +\infty. \quad (2.16)$$

(b) Wenn  $\cdot, \cdot$  nichtfraktal ist, d.h.  $\tilde{D} = n \Leftrightarrow 1$ , dann gilt für alle  $d > \tilde{D}$ :

$$|\mathcal{N}(\lambda) \Leftrightarrow \Phi(\lambda)| = O(\lambda^{\frac{d}{2m}} \log \lambda), \quad \text{für } \lambda \rightarrow +\infty. \quad (2.17)$$

Desweiteren gelten die beiden Abschätzungen mit  $d = \tilde{D}$ , falls der obere MINKOWSKI-Inhalt  $\tilde{\mathcal{M}}^*(D; \cdot, \cdot)$  endlich ist.

## 2.2 Hilfssätze für den Beweis

Neben den in Abschnitt 1.1.1 definierten SOBOLEV-Räumen  $H^m(\Omega)$  und  $H_0^m(\Omega)$  benutzen wir folgenden verallgemeinerten SOBOLEV-Raum  $\mathcal{H}_0^m(\Omega)$  [42, S. 145],[28, S. 494]:

**Definition 2.2.1** Sei  $\mathcal{H}_0^m(\Omega)$  ( $m \in \mathbb{N}$ ) der folgende SOBOLEV-Raum:

$$\mathcal{H}_0^m(\Omega) := \{u \in H^m(\mathbb{R}^n) : D^\alpha u(x) = 0 \text{ für fast alle } x \in \mathbb{R}^n \setminus \Omega \text{ und } |\alpha| \leq m\}. \quad (2.18)$$

Hierbei ist  $H^m(\mathbb{R}^n)$  die Vervollständigung von  $C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$  bezüglich der Norm  $\|\cdot\|_{H^m(\Omega)}$ , und  $C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$  ist der Raum der auf  $\mathbb{R}^n$  unendlich oft differenzierbaren Funktionen, die im Unendlichen verschwinden.

*Bemerkungen.* Hierdurch wird es möglich, die Fortsetzung einer Funktion  $u$  durch Null außerhalb von  $\Omega$  zu erklären; es gilt  $H_0^m(\Omega) \subset \mathcal{H}_0^m(\Omega) \subset H^m(\Omega)$  [28, S. 494].

Wie schon in der Einleitung dieses Kapitel erwähnt, wird das ins Auge gefaßte Randwertproblem mit Hilfe eines Monotonieprinzips und der Summationseigenschaft der Zustandzahlfunktion auf das eines  $n$ -dimensionalen Würfels zurückgeführt [42, S. 162],[28, S. 494]:

**Satz 2.2.2** Wir setzen voraus, daß die Voraussetzungen 1. bis 5. erfüllt sind. Dann gibt es ein  $c > 0$ , so daß für alle  $\epsilon > 0$ , alle offenen  $n$ -dimensionalen Würfel  $Q \subset \Omega$  mit der Kantenlänge  $\epsilon$  und alle  $\lambda, \mu > 0$  die folgenden Abschätzungen der Zustandzahlfunktionen bezüglich der Variationstriplet  $(W_Q, L^2(Q), a'_Q)$  bzw.  $(Z_\lambda, L^2(Q), a'_Q)$  gelten:

(a)

$$|\mathcal{N}(\lambda; W_Q, L^2(Q), a'_Q) \Leftrightarrow \mu'_A(Q) \lambda^{\frac{n}{2m}}| \leq c(1 + \epsilon^{n-1} \lambda^{\frac{n-1}{2m}}), \quad (2.19)$$

wobei  $W_Q$  einen der Räume  $H_0^m(Q)$ ,  $\mathcal{H}_0^m(Q)$  oder  $H^m(Q)$  bezeichnet.

(b)

$$\mathcal{N}(\mu; Z_\lambda(Q), L^2(Q), a'_Q) \leq c(1 + \epsilon^{n-1} (\lambda^{\frac{n-1}{2m}} + \mu^{\frac{n-1}{2m}})) \quad (2.20)$$

mit  $Z_\lambda(Q) := \{u \in H^m(Q) : a'_Q(u, v) = \lambda(u, v)_{L^2(Q)}, \forall v \in H_0^m(\Omega)\}$ . Dabei bezeichnet  $a'_Q$  den Hauptteil der Sesquilinearform  $a_Q$  auf dem Würfel  $Q$ :

$$a'_Q(u, v) = \int_Q \sum_{|\alpha|=m} \sum_{|\beta|=m} D^\alpha u \overline{a_{\alpha\beta}} D^\beta \bar{v} \, dx, \quad u, v \in V. \quad (2.21)$$

Für den Beweis von Satz 2.2.7 benötigen wir ein Lemma [42, S. 150f],[28, S. 495]:

**Lemma 2.2.3** *Sei  $U$  eine konvexe Teilmenge des  $\mathbb{R}^n$  mit Durchmesser  $\text{diam } U$ .  $U_1, U_2 \subset U$  seien meßbar. Dann gilt für alle  $f \in H^1(U)$ :*

$$\iint_{U_1 \times U_2} |f(x) \Leftrightarrow f(y)|^2 \, dx \, dy \leq 2^{n-1} (|U_1| + |U_2|) (\text{diam } U)^2 \|f\|_{H^1(U)}^2. \quad (2.22)$$

*Beweis.* Da der Raum  $H^1(U)$  dicht in  $H^1(U) \cap C^\infty(U)$  liegt (siehe Lemma 1.1.7), können wir  $f \in H^1(U) \cap C^1(U)$  annehmen. Mit  $(x, y) \in U_1 \times U_2$  und wegen der Konvexität von  $U$  können wir schreiben:

$$f(x) \Leftrightarrow f(y) = \int_y^x \nabla f(z) \cdot dz = \int_0^1 \nabla f(tx + (1 \Leftrightarrow t)y) \cdot (x \Leftrightarrow y) \, dt, \quad (2.23)$$

wobei  $\cdot$  das übliche Skalarprodukt im  $\mathbb{R}^n$  bezeichnet. Mit der Hölderungleichung ( $|f \cdot g| \leq \|f\|_p \|g\|_q$ , mit  $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$  [61, S. 338]) und  $\text{diam } U := \sup_{(x,y) \in U \times U} |x \Leftrightarrow y|$  folgt weiter:

$$\begin{aligned} |f(x) \Leftrightarrow f(y)|^2 &\leq \int_0^1 |\nabla f(tx \Leftrightarrow (1 \Leftrightarrow t)y)|^2 \, dt \int_0^1 |x \Leftrightarrow y|^2 \, dt \\ &\leq (\text{diam } U)^2 \int_0^1 |\nabla f(tx \Leftrightarrow (1 \Leftrightarrow t)y)|^2 \, dt. \end{aligned} \quad (2.24)$$

Wir integrieren (2.24) über  $U_1 \times U_2$  und zerlegen das Intervall  $(0, 1)$  in  $(0, \frac{1}{2})$  und  $(\frac{1}{2}, 1)$ . Mit der Variablentransformation  $\Theta(x, y, t) := (x, tx + (1 \Leftrightarrow t)y, t)$  für  $0 < t < 1/2$ , deren Jakobideterminante offensichtlich gleich  $\det(\partial\Theta(x, y, t)/\partial(x, y, t)) = (1 \Leftrightarrow t)^n \geq 2^{-n}$  ist, erhalten wir

$$\begin{aligned} \iint_{U_1 \times U_2} \int_{(0, 1/2)} |\nabla f(tx \Leftrightarrow (1 \Leftrightarrow t)y)|^2 \, dt \, dx \, dy &\leq \int_{U_1} dx \int_{U_2} |\nabla f(y)|^2 \, dy \int_0^{1/2} (1 \Leftrightarrow t)^{-n} \, dt \\ &\leq |U_1| 2^n \frac{1}{2} \int_U |\nabla f(y)|^2 \, dy \leq 2^{n-1} |U_1| \|f\|_{H^1(U)}^2, \end{aligned} \quad (2.25)$$

da  $\int_U |\nabla f(y)|^2 \, dy = \|\nabla f\|_{L^2(U)}^2 \leq \|\nabla f\|_{L^2(U)}^2 + \|f\|_{L^2(U)}^2 = \|f\|_{H^1(U)}^2$ . Analog erhalten wir mit der Transformation  $\Theta(x, y, t) := (tx + (1 \Leftrightarrow t)y, y, t)$  für  $1/2 < t < 1$  und der Jakobideterminante  $\det(\partial\Theta(x, y, t)/\partial(x, y, t)) = t^n \geq 2^{-n}$ :

$$\iint_{U_1 \times U_2} \int_{(1/2, 1)} |\nabla f(tx \Leftrightarrow (1 \Leftrightarrow t)y)|^2 \, dt \, dx \, dy \leq 2^{n-1} |U_2| \|f\|_{H^1(U)}^2. \quad (2.26)$$

Zusammen mit (2.25) und (2.24) folgt dann die Behauptung des Lemmas.  $\square$

**Definition 2.2.4** Der HILBERT-Raum  $W$  sei stetig in  $L^2(\Omega)$  eingebettet,  $\omega \subset \Omega$  sei offen. Mit  $S(W)$  als der abgeschlossenen Einheitskugel in  $W$  bezüglich der Norm  $\|\cdot\|_W$  und  $S(W)_{/\omega}$  als deren Einschränkung auf  $\omega$ , definieren wir für  $\lambda > 0$  [28, S. 495]:

$$\mathcal{N}^*(\lambda; W, L^2(\omega)) := \#\{i \geq 0 : d_i(S(W)_{/\omega}; L^2(\omega)) \geq \lambda^{-1/2}\}. \quad (2.27)$$

Es gelten die folgenden Korollare [42, S. 147]:

**Korollar 2.2.5** Für alle  $\lambda > 0$  sind die folgenden Monotonieprinzipien erfüllt:

$$(a) \ \omega_1 \subset \omega_2 \quad \Rightarrow \quad \mathcal{N}^*(\lambda; W, L^2(\omega_1)) \leq \mathcal{N}^*(\lambda; W, L^2(\omega_2)).$$

$$(a) \ W_1 \subset W_2 \quad \Rightarrow \quad \mathcal{N}^*(\lambda; W_1, L^2(\omega)) \leq \mathcal{N}^*(\lambda; W_2, L^2(\omega)).$$

*Beweis.* (a) Die Behauptung folgt mit  $d_i(S(W)_{/\omega_1}; L^2(\omega_1)) \leq d_i(S(W)_{/\omega_2}; L^2(\omega_2))$  für alle  $i \in \mathbb{N}_0$ , wegen  $S(W)_{/\omega_1} \subset S(W)_{/\omega_2}$ , sowie  $L^2(\omega_2) \subset L^2(\omega_1)$  bei Anwendung von Lemma 1.2.6(b) und (c).

(b) Die Aussage erhalten wir aufgrund von  $d_i(S(W_1)_{/\omega}; L^2(\omega)) \leq d_i(S(W_2)_{/\omega}; L^2(\omega))$ , da  $S(W_1)_{/\omega} \subset S(W_2)_{/\omega}$ .  $\square$

**Korollar 2.2.6** Es sei  $W_1 \subset W_2$  stetig eingebettet; dann gilt für alle  $\lambda > 0$ :

$$\mathcal{N}^*(\lambda; W_1, L^2(\omega)) \leq \mathcal{N}^*(\lambda; W_2, L^2(\omega)). \quad (2.28)$$

*Beweis.* Wegen der stetigen Einbettung von  $W_1$  in  $W_2$  existiert eine Konstante  $\alpha > 0$ , so daß  $\|u\|_{W_2}^2 \leq \alpha^2 \|u\|_{W_1}^2$ ,  $\forall u \in W_1$ . Die Behauptung folgt dann wegen der Inklusion

$$S(W_1)_{/\omega} = \{u \in W_1 : \|u\|_{W_1}^2 \leq 1\}_{/\omega} \subset \{u \in W_2 : \|\alpha^{-1}u\|_{W_2}^2 \leq 1\}_{/\omega} = \alpha S(W_2)_{/\omega}, \quad (2.29)$$

da  $d_i(S(W_1)_{/\omega}; L^2(\omega)) \leq d_i(\alpha S(W_2)_{/\omega}; L^2(\omega)) = \alpha d_i(S(W_2)_{/\omega}; L^2(\omega))$ .  $\square$

**Lemma 2.2.7** Sei  $\Omega \subset \mathbb{R}^n$  offen und beschränkt.

(a) Sei  $\omega \subset \Omega$  offen. Dann gibt es ein  $C = C(n, m)$ , so daß für alle  $\lambda > 0$  gilt:

$$\mathcal{N}^*(\lambda; \mathcal{H}_0^m(\Omega), L^2(\omega)) \leq C |\omega_{\sqrt{n}\lambda^{-1/2m}} \cap \Omega| \lambda^{\frac{n}{2m}}. \quad (2.30)$$

(b) Erfüllt ferner  $\Omega$  die  $C'$ -Bedingung, dann gibt es die Konstanten  $\lambda_0, c, C > 0$ , so daß mit  $\tilde{\omega}_\epsilon = \omega \cap \Omega = \{x \in \Omega : d(x, \omega) < \epsilon\}$  für alle  $\epsilon > 0$  und  $\lambda \geq \lambda_0$  gilt:

$$\mathcal{N}^*(\lambda; H^m(\Omega), L^2(\tilde{\omega}_\epsilon)) \leq C |\omega_{\epsilon+c\lambda^{-\frac{1}{2m}}} \cap \Omega| \lambda^{\frac{n}{2m}}. \quad (2.31)$$

*Bemerkung.* Teil (a) wird für den Beweis für das DIRICHLET-Problem benötigt, während Teil (b) für den Beweis für das NEUMANN-Problem verwendet wird. Wir führen hier nur den Beweis von Teil (a) an [42, S. 151f],[28, S. 495ff]. Der Beweis des anderen Teils ist in [42, S. 158ff] zu finden.

*Beweis.* Wir zeigen zunächst Teil (a) für  $m = 1$ . Zu  $\epsilon > 0$  sei  $\{Q_\zeta\}_{\zeta \in \mathbb{Z}^n}$  eine Pflasterung des  $\mathbb{R}^n$  in disjunkte kongruente und offene Würfel mit der Kantenlänge  $\epsilon$ ,

$$K := \{\zeta \in \mathbb{Z}^n : Q_\zeta \cap \omega \neq \emptyset\} \quad \text{und} \quad K' := \{\zeta \in K : |Q_\zeta \cap \Omega| \geq \frac{1}{2}|Q_\zeta|\}, \quad (2.32)$$

sowie  $\omega'$  das Innere von  $\bigcup_{\zeta \in K} (\overline{Q_\zeta} \cap \Omega)$ . Dann gilt offensichtlich  $\omega \subset \omega' \subset \omega_{\sqrt{n}\epsilon} \cap \Omega$  und

$$\#K' \frac{1}{2}\epsilon^n = \sum_{\zeta \in K'} \frac{1}{2}|Q_\zeta| \leq \sum_{\zeta \in K'} |Q_\zeta \cap \Omega| \leq \left| \bigcup_{\zeta \in K} (\overline{Q_\zeta} \cap \Omega) \right| = |\omega'|. \quad (2.33)$$

Daher folgt

$$i := \#K' \leq 2|\omega'|\epsilon^{-n} \leq 2|\omega_{\sqrt{n}\epsilon} \cap \Omega|\epsilon^{-n}. \quad (2.34)$$

Sei nun  $f \in \mathcal{H}_0^1(\Omega)$ . Dann gibt es ein zugehöriges  $\tilde{f} \in H^1(\mathbb{R}^n)$ , so daß fast überall in  $\mathbb{R}^n \setminus \Omega$   $\tilde{f} = 0$  und  $\nabla \tilde{f} = 0$  gilt. Wir definieren nun ein  $f_\zeta$  durch

$$f_\zeta = \begin{cases} \frac{1}{|Q_\zeta|} \int_{Q_\zeta} \tilde{f}(x) dx & \text{wenn } \zeta \in K' \\ 0 & \text{wenn } \zeta \in K \setminus K' \end{cases} \quad (2.35)$$

und approximieren die Funktion  $f$  für  $\zeta \in K'$  durch den Mittelwert von  $\tilde{f}$  auf  $Q_\zeta$  und durch Null für  $\zeta \in K \setminus K'$ . Dann folgt für beliebiges  $\zeta \in K'$  die Abschätzung

$$\begin{aligned} \|f \Leftrightarrow f_\zeta\|_{L^2(Q_\zeta \cap \Omega)}^2 &= \int_{Q_\zeta} |\tilde{f}(x) \Leftrightarrow \frac{1}{|Q_\zeta|} \int_{Q_\zeta} \tilde{f}(y) dy|^2 dx \\ &= \frac{1}{|Q_\zeta|} \int_{Q_\zeta} |\int_{Q_\zeta} (\tilde{f}(x) \Leftrightarrow \tilde{f}(y)) dy|^2 dx \\ &\leq \frac{1}{|Q_\zeta|} \iint_{Q_\zeta \times Q_\zeta} |\tilde{f}(x) \Leftrightarrow \tilde{f}(y)|^2 dx dy \\ &\leq \frac{1}{|Q_\zeta|} 2^{n-1} (|Q_\zeta| + |Q_\zeta|) (\text{diam } Q_\zeta)^2 \|\tilde{f}\|_{H^1(Q_\zeta)}^2 \\ &\leq n2^n \epsilon^2 \|f\|_{H^1(Q_\zeta \cap \Omega)}^2, \quad \forall \zeta \in K', \end{aligned} \quad (2.36)$$

wenn wir Lemma 2.2.3 mit  $U_1 = U_2 = U := Q_\zeta$  anwenden und  $\|\tilde{f}\|_{H^1(Q_\zeta)} = \|f\|_{H^1(Q_\zeta \cap \Omega)}$  berücksichtigen. Mit  $\Omega^c := \mathbb{R}^n \setminus \Omega$  erhalten wir mit  $\tilde{f}(y) = 0$  für fast alle  $y \in \Omega^c$  dann für beliebiges  $\zeta \in K \setminus K'$ :

$$\begin{aligned} \|f\|_{L^2(Q_\zeta \cap \Omega)}^2 &= \frac{1}{|Q_\zeta \cap \Omega^c|} \iint_{(Q_\zeta \cap \Omega^c) \times (Q_\zeta \cap \Omega)} |\tilde{f}(x) \Leftrightarrow \tilde{f}(y)|^2 dx dy \\ &\leq \frac{1}{|Q_\zeta \cap \Omega^c|} 2^{n-1} (|Q_\zeta \cap \Omega^c| + |Q_\zeta \cap \Omega|) (\text{diam } Q_\zeta)^2 \|\tilde{f}\|_{H^1(Q_\zeta)}^2 \\ &\leq n2^n \epsilon^2 \|f\|_{H^1(Q_\zeta \cap \Omega)}^2, \quad \forall \zeta \in K \setminus K' \end{aligned} \quad (2.37)$$

bei Anwendung von Lemma 2.2.3 mit  $U_1 := Q_\zeta \cap \Omega^c, U_2 := Q_\zeta \cap \Omega, U := Q_\zeta$ , sowie unter Berücksichtigung von  $|Q_\zeta \cap \Omega| < |Q_\zeta \cap \Omega^c|$ . Sei nun

$$1_{Q_\zeta}(x) := \begin{cases} 1 & \text{für } x \in Q_\zeta \\ 0 & \text{sonst} \end{cases} \quad (2.38)$$

die charakteristische Funktion auf  $Q_\zeta$ . Wir können dann zeigen, daß zu jedem  $f \in \mathcal{H}_0^1(\Omega)$  mit  $\|f\|_{H^1(\Omega)} \leq 1$  ein  $g := \sum_{\zeta \in K'} f_\zeta 1_{Q_\zeta}$  existiert, so daß

$$\begin{aligned} \|f \Leftrightarrow g\|_{L^2(\omega')}^2 &= \sum_{\zeta \in K'} \|f \Leftrightarrow \sum_{\zeta' \in K'} f_{\zeta'} 1_{Q_{\zeta'}}\|_{L^2(Q_\zeta \cap \Omega)}^2 + \sum_{\zeta \in K \setminus K'} \|f \Leftrightarrow \sum_{\zeta' \in K'} f_{\zeta'} 1_{Q_{\zeta'}}\|_{L^2(Q_\zeta \cap \Omega)}^2 \\ &= \sum_{\zeta \in K'} \|f \Leftrightarrow f_\zeta\|_{L^2(Q_\zeta \cap \Omega)}^2 + \sum_{\zeta \in K \setminus K'} \|f\|_{L^2(Q_\zeta \cap \Omega)}^2 \\ &\leq n2^n \epsilon^2 \sum_{\zeta \in K} \|f\|_{H^1(Q_\zeta \cap \Omega)}^2 = n2^n \epsilon^2 \|f\|_{H^1(\omega')}^2 \leq n2^n \epsilon^2 \end{aligned} \quad (2.39)$$

gilt. Die Funktion  $g$  liegt in einem  $i := \#K'$ -dimensionalen Teilraum von  $L^2(\omega')$ —wir bezeichnen ihn mit  $L_i$ —, der von den charakteristischen Funktionen  $1_{Q_\zeta}$  ( $\zeta \in K'$ ) aufgespannt wird. Es genügt nun, diesen  $i$ -dimensionalen Teilraum zu betrachten, um mit der Definition der  $i$ -Weite eine Abschätzung für die Zustandszahlfunktion  $\mathcal{N}^*$  zu erhalten:

$$d_i^2(S(\mathcal{H}_0^1(\Omega))_{/\omega'}; L^2(\omega')) \leq \sup_{f \in S(\mathcal{H}_0^1(\Omega))_{/\omega'}} \inf_{g \in L_i} \|f \Leftrightarrow g\|_{L^2(\omega')}^2 \leq n2^n \epsilon^2. \quad (2.40)$$

Für  $0 < \lambda \leq n^{-1}2^{-n}\epsilon^{-2}$  gilt daher wegen Definition 2.2.4,  $\omega \subset \omega'$ , Korollar 2.2.5 und Abschätzung (2.34):

$$\mathcal{N}^*(\lambda; \mathcal{H}_0^1(\Omega), L^2(\omega)) \leq \mathcal{N}^*(\lambda; \mathcal{H}_0^1(\Omega), L^2(\omega')) \leq i = \#K' \leq 2|\omega_{\sqrt{n}\epsilon} \cap \Omega| \epsilon^{-n}. \quad (2.41)$$

Wenn wir daher zu gegebenen  $\lambda > 0$ ,  $\epsilon = n^{-1/2}2^{-n/2}\lambda^{-1/2} (\leq \lambda^{-1/2})$  wählen, erhalten wir

$$\mathcal{N}^*(\lambda; \mathcal{H}_0^1(\Omega), L^2(\omega)) \leq C|\omega_{\sqrt{n}\lambda^{-1/2}} \cap \Omega| \lambda^{\frac{n}{2}}, \quad (2.42)$$

mit  $C = 2^{1+n^2/2}n^{n/2}$  und damit die Abschätzung für  $m = 1$ . Mit der Beziehung

$$\mathcal{N}^*(\lambda; \mathcal{H}_0^m(\Omega), L^2(\omega')) \leq \sum_{h=0}^{m-1} (n+1)^h \mathcal{N}^*((n+1)\lambda^{\frac{1}{m}}; \mathcal{H}_0^1(\Omega), L^2(\omega')), \quad (2.43)$$

die in [42, S. 148f] zu finden ist, folgt für alle  $(n+1)\lambda^{1/m} \leq n^{-1}2^{-n}\epsilon^{-2}$ , d.h. für alle  $\lambda \leq (2^{-n}\epsilon^{-2}/(n^2+n))^m$ :

$$\mathcal{N}^*(\lambda; \mathcal{H}_0^m(\Omega), L^2(\omega')) \leq \sum_{h=0}^{m-1} (n+1)^h \#K' = 2 \sum_{h=0}^{m-1} (n+1)^h |\omega_{\sqrt{n}\epsilon} \cap \Omega| \epsilon^{-n}. \quad (2.44)$$

Wähle daher zu gegebenen  $\lambda > 0$ ,  $\epsilon = (n^2+n)^{-1/2}2^{-1/2}\lambda^{-1/2m} (\leq \lambda^{-1/2m})$  und erhalte mit  $\mathcal{N}^*(\lambda; \mathcal{H}_0^m(\Omega), L^2(\omega)) \leq \mathcal{N}^*(\lambda; \mathcal{H}_0^m(\Omega), L^2(\omega'))$  die Abschätzung in Teil (a) des Lemmas.  $\square$

## 2.3 Beweis des Satzes

Die Voraussetzungen von Satz 2.1.5 seien erfüllt.

**Definition 2.3.1** Wir setzen für eine beliebige offene Teilmenge  $\omega \subset \Omega$ :

$$\mathcal{N}_0(\lambda; \omega) := \mathcal{N}(\lambda; H_0^m(\omega), L^2(\Omega), a) \quad \text{und} \quad \mathcal{N}_1(\lambda; \omega) := \mathcal{N}(\lambda; H^m(\omega), L^2(\Omega), a). \quad (2.45)$$

Mit dieser Notation und aufgrund der Inklusion  $H_0^m(\Omega) \subset V \subset H^m(\Omega)$ , sowie eines Monotonieprinzips der Zustandszahlfunktion  $\mathcal{N}$  folgt:

**Lemma 2.3.2** Es gilt

$$\mathcal{N}_0(\lambda; \Omega) \leq \mathcal{N}(\lambda) = \mathcal{N}(\lambda; V, L^2(\Omega), a) \leq \mathcal{N}_1(\lambda; \Omega), \quad \forall \lambda > 0. \quad (2.46)$$

Zum Beweis von Satz 2.1.5 genügt es daher, diesen für das DIRICHLET- bzw. NEUMANN-Problem zu beweisen.

### 2.3.1 Dirichlet-Problem ( $V = H_0^m(\Omega)$ )

Wir setzen  $N_0^*(\lambda; \omega) := N^*(\lambda; H_0^m(\Omega), L^2(\omega))$  und  $N_1^*(\lambda; \omega) := N^*(\lambda; \mathcal{H}_0^m(\Omega), L^2(\omega))$  mit  $\mathcal{N}^*$  aus Definition 2.2.4. Desweiteren schreiben wir kurz  $\mathcal{N}(\lambda) = \mathcal{N}_0(\lambda; \Omega)$ . Zur Vereinfachung der Schreibweise bezeichnen wir ferner die innere  $\epsilon$ -Umgebung von  $\cdot$ , bezüglich  $\Omega$  mit  $\cdot, \epsilon$ , d.h. wir setzen  $\tilde{\cdot}, \epsilon := \cdot, \epsilon \cap \Omega = \{x \in \Omega : d(x, \cdot) < \epsilon\}$ .

**Lemma 2.3.3 (Randabschätzung)** Es existieren positive Konstanten  $\epsilon_0, \lambda_0$  und  $C_0$ , so daß für alle  $0 < \epsilon < \epsilon_0$  und alle  $\lambda \geq \lambda_0 \epsilon^{-2m}$  gilt [28, S. 499]:

$$\mathcal{N}_1^*(\lambda; \tilde{\cdot}, \epsilon) = \mathcal{N}^*(\lambda; \mathcal{H}_0^m(\Omega), L^2(\tilde{\cdot}, \epsilon)) \leq C_0 \epsilon^{n-d} \lambda^{\frac{n}{2m}}. \quad (2.47)$$

*Beweis.* Sei  $\epsilon > 0$  beliebig, aber fest. Anwendung von Lemma 2.2.7(a) mit  $\omega = \tilde{\cdot}, \epsilon$  zeigt, daß eine Konstante  $C = C(n, m) > 0$  existiert, so daß

$$N_1^*(\lambda, \tilde{\cdot}, \epsilon) \leq C |(\tilde{\cdot}, \epsilon)_{\sqrt{n}\lambda^{-1/2m}} \cap \Omega| \lambda^{\frac{n}{2m}} = C |(\tilde{\cdot}, \epsilon)_\delta \cap \Omega| \lambda^{\frac{n}{2m}}, \quad \forall \lambda > 0, \quad (2.48)$$

wobei  $\delta := \sqrt{n}\lambda^{-1/2m}$  gesetzt wurde. Es gilt  $\tilde{\cdot}, \epsilon \subset \cdot, \epsilon$  und damit  $(\tilde{\cdot}, \epsilon)_\delta \subset (\cdot, \epsilon)_\delta \subset \cdot, \epsilon + \delta$ . Daher folgt  $(\tilde{\cdot}, \epsilon)_\delta \cap \Omega \subset \cdot, \epsilon + \delta \cap \Omega = \tilde{\cdot}, \epsilon + \delta$  und die Abschätzung

$$|(\tilde{\cdot}, \epsilon)_\delta \cap \Omega| \leq |\tilde{\cdot}, \epsilon + \delta|. \quad (2.49)$$

Wegen  $\mathcal{M}^*(d; \cdot, \cdot) = \limsup_{\epsilon \rightarrow 0^+} \epsilon^{-(n-d)} |\cdot, \epsilon| < +\infty$ , existieren existieren die Konstanten  $\epsilon'_0, c > 0$ , so daß

$$|\tilde{\cdot}, \epsilon| \leq c \epsilon^{n-d}, \quad \forall \epsilon < \epsilon'_0. \quad (2.50)$$

Sei  $\lambda_0 > 0$  beliebig und  $\epsilon_0 = \epsilon'_0 (1 + \sqrt{n}\lambda_0^{-1/2m})^{-1}$ . Dann gilt für  $\epsilon < \epsilon_0$  und  $\lambda \geq \lambda_0 \epsilon^{-2m}$ :

$$\epsilon + \delta = \epsilon + \sqrt{n}\lambda^{-\frac{1}{2m}} \leq (1 + \sqrt{n}\lambda_0^{-\frac{1}{2m}})\epsilon < (1 + \sqrt{n}\lambda_0^{-\frac{1}{2m}})(1 + \sqrt{n}\lambda_0^{-\frac{1}{2m}})^{-1}\epsilon'_0 = \epsilon'_0. \quad (2.51)$$

Wir können daher mit (2.48) bis (2.51) und  $\delta \leq \sqrt{n}\lambda_0^{-1/2m}\epsilon$  schließen, daß

$$\mathcal{N}_1^*(\lambda; \tilde{\epsilon}) \leq C|(\tilde{\epsilon})_\delta \cap \Omega| \lambda^{\frac{n}{2m}} \leq C|\tilde{\epsilon}_{+\delta}| \lambda^{\frac{n}{2m}} \leq C_0 \epsilon^{n-d} \lambda^{\frac{n}{2m}}, \quad \forall \epsilon < \epsilon_0, \forall \lambda \geq \lambda_0 \epsilon^{-2m}, \quad (2.52)$$

wobei  $C_0 = Cc(1 + \sqrt{n}\lambda_0^{-1/2m})^{n-d}$ .  $\square$

Wir konstruieren nun eine Folge von Pflasterungen  $\{Q_\zeta^p\}_{\zeta \in \mathbb{Z}^n}$  des  $\mathbb{R}^n$  durch Standard  $2^{-p}$ -Würfel ( $p = 0, 1, \dots$ ) mit den folgenden Eigenschaften [42, S. 197f],[28, S. 500],[31, S. 429f] (siehe hierzu auch Abbildung 2.1):

**Definition 2.3.4 (Pflasterung des Gebietes)** Sei  $p \in \mathbb{N}_0$  und  $\{Q_\zeta^p\}_{\zeta \in \mathbb{Z}^n}$  eine Pflasterung des  $\mathbb{R}^n$  in eine abzählbare Familie von kongruenten nicht überlappenden offenen  $n$ -dimensionalen Würfeln mit Kantenlänge  $\epsilon_p := 2^{-p}$ , so daß  $\bigcup_{\zeta \in \mathbb{Z}^n} \overline{Q_\zeta^p} = \mathbb{R}^n$ . Ferner sollen die Würfel der  $p$ -ten Generation durch Halbieren der Würfelseiten der  $p \Leftrightarrow 1$ -sten Generation entstehen. Wir definieren nun rekursiv die folgende Indexmenge  $I_p$  und offenen Teilmengen  $\Omega'_p, \omega_p \subset \Omega$ :

$$\begin{aligned} I_0 &:= \{\zeta \in \mathbb{Z}^n : Q_\zeta^0 \subset \Omega\} \\ \Omega'_0 &= \bigcup_{\zeta \in I_0} Q_\zeta^0 \\ \omega_0 &= \Omega \setminus \overline{\Omega'_0} \\ I_1 &:= \{\zeta \in \mathbb{Z}^n : Q_\zeta^1 \subset \omega_0\} = \{\zeta \in \mathbb{Z}^n : Q_\zeta^1 \subset \Omega \text{ und } \zeta \notin I_0\} \\ \Omega'_1 &= \Omega'_0 \cup \left( \bigcup_{\zeta \in I_1} Q_\zeta^1 \right) \\ \omega_1 &= \Omega \setminus \overline{\Omega'_1} \\ &\vdots \end{aligned}$$

Allgemein, falls  $p \geq 1$  und  $I_q, \Omega'_q$ , sowie  $\omega_q$  für  $q \leq p \Leftrightarrow 1$  definiert worden sind, definieren wir rekursiv:

$$I_p := \{\zeta \in \mathbb{Z}^n : Q_\zeta^p \subset \omega_{p-1}\} = \{\zeta \in \mathbb{Z}^n : Q_\zeta^p \subset \Omega \text{ und } \zeta \notin \bigcup_{q=1}^{p-1} I_q\} \quad (2.53)$$

$$\Omega'_p = \Omega'_{p-1} \cup \left( \bigcup_{\zeta \in I_p} Q_\zeta^p \right) \quad (2.54)$$

$$\omega_p = \Omega \setminus \overline{\Omega'_p}. \quad (2.55)$$

*Bemerkung.* Aufgrund ihrer Konstruktion sind die Indexmengen  $I_q$  paarweise disjunkt. Daher gilt für alle  $p \geq 1$ :

$$\Omega'_p = \Omega'_{p-1} \cup \left( \bigcup_{\zeta \in I_p} Q_\zeta^p \right) = \Omega'_{p-2} \cup \left( \bigcup_{\zeta \in I_{p-1}} Q_\zeta^{p-1} \right) \cup \left( \bigcup_{\zeta \in I_p} Q_\zeta^p \right) = \bigcup_{q=0}^p \left( \bigcup_{\zeta \in I_q} Q_\zeta^q \right) \quad (2.56)$$

**Korollar 2.3.5** Es gilt  $\omega_p \subset \tilde{\epsilon}_{c_1 \epsilon_p}$ ,  $\forall p \in \mathbb{N}$  mit  $c_1 > \sqrt{n}$  beliebig, aber fest und  $\epsilon_p = 2^{-p}$ .

*Beweis.* Sei nämlich  $x \in \omega_p$ ; dann gilt  $x \in \overline{Q_\zeta^p}$  für ein  $\zeta \in \mathbb{Z}^n$ . Wegen (2.54) und (2.55) gilt  $\overline{Q_\zeta^p} \cap \omega_p \neq \emptyset$  und daher  $d(x, \zeta) \leq c_1 \epsilon_p$  für alle  $c_1 > \sqrt{n}$ . Da  $x \in \Omega$  ist, folgt  $x \in \tilde{\epsilon}_{c_1 \epsilon_p}$ .  $\square$



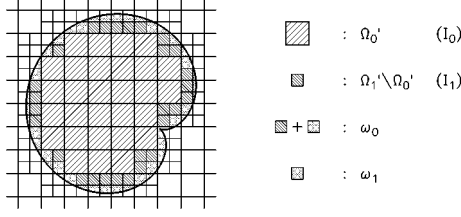


Abbildung 2.1: Pflasterung des Gebietes  $\Omega$  durch Ausfüllung mit  $n$ -dimensionalen Würfeln von innen heraus.

**Lemma 2.3.6 (Abschätzung der Zustandszahlfunktion)** *Es sei  $\{Q_\zeta\}_{\zeta \in \mathbb{Z}^n}$  eine Pflasterung des Gebietes  $\Omega$  im Sinne von Definition 2.3.4. Dann gibt es Konstanten  $C_1, p_1 > 0$  und ein  $\lambda_1 > 1$  derart, daß für alle natürlichen Zahlen  $p \geq p_1$  und alle  $\lambda \geq \lambda_1(\epsilon_p)^{-2m}$  gilt:*

$$|N(\lambda) \Leftrightarrow \Phi(\lambda)| \leq C_1 \left( (\epsilon_p)^{n-d} \lambda^{\frac{n}{2m}} + R_p(\lambda) \right), \quad (2.57)$$

wobei

$$R_p(\lambda) := \sum_{q=0}^p (\#I_q) (1 + (\epsilon_q)^{n-1} \lambda^{\frac{n-1}{2m}}) = S_p \lambda^{\frac{n-1}{2m}} + T_p \quad (2.58)$$

mit

$$S_p := \sum_{q=0}^p (\#I_q) (\epsilon_q)^{n-1} \quad \text{und} \quad T_p := \sum_{q=0}^p (\#I_q). \quad (2.59)$$

$S_p$  und  $T_p$  hängen offensichtlich nicht von  $\lambda$  ab.

*Beweis.* Sei  $p \geq 2$  und  $\lambda > 0$ . Wir wenden nun Lemma 1.3.7 mit dem Variationstriplet  $(H_0^m(\Omega), L^2(\Omega), a)$  und  $W_0 = H_0^m(\Omega'_p)$  an:

$$\mathcal{N}_0(\lambda; \Omega'_p) \leq \mathcal{N}(\lambda) \leq \mathcal{N}_0(\lambda; \Omega'_p) + \mathcal{N}^\bullet(\lambda; \Omega'_p), \quad (2.60)$$

wobei

$$\mathcal{N}^\bullet(\lambda; \Omega'_p) := \mathcal{N}(\lambda; Z_\lambda, L^2(\Omega), a) \quad (2.61)$$

und

$$Z_\lambda := \{u \in H_0^m(\Omega) : a(u, v) = \lambda(u, v)_{L^2(\Omega)}, \forall v \in H_0^m(\Omega'_p)\}. \quad (2.62)$$

Mit dem WEYLschen Ausdruck  $\Phi(\lambda) := \Phi(\lambda; \Omega)$  können wir dann

$$A_1 + A_2 \leq \mathcal{N}(\lambda) \Leftrightarrow \Phi(\lambda) \leq A_1 + A_2 + A_3 \quad (2.63)$$

abschätzen, wobei wir

$$A_1 = N_0(\lambda; \Omega'_p) \Leftrightarrow \Phi(\lambda; \Omega'_p) \quad , \quad A_2 = \Phi(\lambda; \Omega'_p) \Leftrightarrow \Phi(\lambda; \Omega) \quad \text{und} \quad A_3 = \mathcal{N}^\bullet(\lambda; \Omega'_p) \quad (2.64)$$

gesetzt haben. Wir schätzen nun die  $A_i$  ( $i = 1, 2, 3$ ) der Reihe nach ab:

(1) Wegen  $\Omega'_p = \bigcup_{q=0}^p (\bigcup_{\zeta \in I_q} Q_\zeta^q)$ , der Summationseigenschaft der Zustandszahlfunktion (Lemma 1.3.5), der Identität  $\Phi(\lambda; \cdot) = \mu'_{\mathcal{A}}(\cdot) \lambda^{n/2m}$ , und da  $\mu'_{\mathcal{A}}(\cdot)$  ein Maß ist, folgt:

$$\mathcal{N}_0(\lambda; \Omega'_p) = \sum_{q=0}^p \sum_{\zeta \in I_q} \mathcal{N}_0(\lambda; Q_\zeta^q), \quad \text{sowie} \quad \Phi(\lambda; \Omega'_p) = \sum_{q=0}^p \sum_{\zeta \in I_q} \Phi(\lambda; Q_\zeta^q). \quad (2.65)$$

Daher erhalten wir die Abschätzung

$$|A_1| = |\mathcal{N}_0(\lambda; \Omega'_p) \Leftrightarrow \Phi(\lambda; \Omega'_p)| \leq \sum_{q=0}^p \sum_{\zeta \in I_q} |\mathcal{N}_0(\lambda; Q_\zeta^q) \Leftrightarrow \Phi(\lambda; Q_\zeta^q)|. \quad (2.66)$$

Wir nehmen nun im folgenden an, daß der Differentialoperator  $\mathcal{A}$  mit seinem Hauptteil  $\mathcal{A}'$  übereinstimmt, d.h.  $\mathcal{A}$  ein homogener Operator der Ordnung  $2m$  ist. In einem noch zu beweisenden Störungslemma (Lemma 2.3.9) werden wir zeigen, daß die Substitution von  $\mathcal{A}$  durch  $\mathcal{A}'$  das Ergebnis nicht verändert. Wir können dann Satz 2.2.2(a) mit  $W_Q = H_0^m(Q)$  anwenden, um jeden einzelnen Summand in (2.66) abzuschätzen: Es existiert eine Konstante  $C > 0$  derart, daß für alle  $q \geq 1$  und alle  $\epsilon > 0$  gilt:

$$|\mathcal{N}_0(\lambda; Q_\zeta^q) \Leftrightarrow \Phi(\lambda; Q_\zeta^q)| = |\mathcal{N}_0(\lambda; Q_\zeta^q) \Leftrightarrow \mu'_{\mathcal{A}}(Q_\zeta^q) \lambda^{\frac{n}{2m}}| \leq C(1 + \epsilon_q^{n-1} \lambda^{\frac{n-1}{2m}}). \quad (2.67)$$

Wir können daher weiter abschätzen:

$$|A_1| \leq C \sum_{q=0}^p (\#I_q) (1 + (\epsilon_q)^{n-1} \lambda^{\frac{n-1}{2m}}) = CR_p(\lambda), \quad \forall p \geq 1, \quad \forall \lambda > 0. \quad (2.68)$$

(2) Als nächstes schätzen wir  $A_2$  ab. Wegen  $\Phi(\lambda; \cdot) = \mu'_{\mathcal{A}}(\cdot) \lambda^{n/2m}$  und da  $\omega_p = \Omega \setminus \overline{\Omega'_p}$  können wir sukzessive schreiben:

$$|A_2| = |\Phi(\lambda; \Omega'_p) \Leftrightarrow \Phi(\lambda; \Omega)| = |(\mu'_{\mathcal{A}}(\Omega) \Leftrightarrow \mu'_{\mathcal{A}}(\Omega'_p)) \lambda^{\frac{n}{2m}}| = |\mu'_{\mathcal{A}}(\omega_p) \lambda^{\frac{n}{2m}}| \leq c' |\omega_p| \lambda^{\frac{n}{2m}} \quad (2.69)$$

mit einer Konstanten  $c' > 0$ . Korollar 2.3.5 besagt  $\omega_p \subset \tilde{c}_1 \epsilon_p$  mit  $c_1 > \sqrt{n}$ . Da ferner  $\epsilon_p \searrow 0^+$  und  $\mathcal{M}^*(d; \cdot) = \limsup_{\rho \rightarrow 0^+} \rho^{-(n-d)} |\tilde{\rho}| < +\infty$ , folgt, daß es die beiden Konstanten  $c'_1, p'_1 > 0$  gibt, so daß

$$|\omega_p| \leq |\tilde{c}_1 \epsilon_p| \leq c'_1 (\epsilon_p)^{n-d}, \quad \forall p \geq p'_1, \quad \text{d.h.} \quad \epsilon_p \leq \epsilon_{p'_1}. \quad (2.70)$$

Diese Ungleichung impliziert mit Abschätzung (2.69), daß für alle  $p \geq p'_1$  und  $\lambda > 0$  gilt:

$$|A_2| \leq c' |\omega_p| \lambda^{\frac{n}{2m}} \leq c_1 (\epsilon_p)^{n-d} \lambda^{\frac{n}{2m}} \quad \text{mit} \quad c_1 = c' c'_1. \quad (2.71)$$

(3) Abzuschätzen bleibt der Randterm  $A_3 = \mathcal{N}^\bullet(\lambda, \Omega'_p)$ . Dazu benötigen wir ein Lemma:

**Lemma 2.3.7** Sei  $p \in \mathbb{N}$  beliebig und  $\{Q_\zeta\}_{\zeta \in \mathbb{Z}^n}$  eine Pflasterung des Gebietes  $\Omega$  im Sinne von Definition 2.3.4. Dann existiert eine Konstante  $c_0 > 0$ , so daß die folgende Abschätzung für die Zustandzahlfunktion bezüglich des Variationstripels  $(Z_\lambda, L^2(\Omega), a)$  mit  $Z_\lambda$  aus (2.62) für alle  $\lambda > 0$  gilt [42, S.181f]:

$$\mathcal{N}(\lambda; Z_\lambda, L^2(\Omega), a) \leq \mathcal{N}^*(c_0\lambda, H_0^m(\Omega), L^2(\omega)) + \sum_{q=0}^p \sum_{\zeta \in I_q} \mathcal{N}(c_0\lambda, Z_\lambda(Q_\zeta^q), L^2(Q_\zeta^q), a_{Q_\zeta^q}) \quad (2.72)$$

mit  $Z_\lambda(Q_\zeta^q) = \{u \in H^m(Q_\zeta^q) : a_{Q_\zeta^q}(u, v) = \lambda(u, v), \forall v \in H_0^m(Q_\zeta^q)\}$ , der Sesquilinearform  $a_{Q_\zeta^q}$  auf dem zugehörigen Würfel  $Q_\zeta^q$ , sowie  $\mathcal{N}^*$  aus Definition 2.2.4.

Wegen dieses Lemmas folgt für  $A_3$  die Abschätzung

$$\begin{aligned} A_3 &\leq \mathcal{N}_0^*(c_0\lambda, \omega_p) + \sum_{q=0}^p (\#I_q) \mathcal{N}(c_0\lambda; Z_\lambda(Q^q), L^2(Q^q), a_{Q^q}) \\ &\leq \mathcal{N}_0^*(c_0\lambda, \omega_p) + c'_0 \sum_{q=0}^p (\#I_q) \left( 1 + (\epsilon_q)^{n-1} \left( \lambda^{\frac{n-1}{2m}} + c_0'^{\frac{n-1}{2m}} \lambda^{\frac{n-1}{2m}} \right) \right), \quad \forall \lambda > 0 \end{aligned} \quad (2.73)$$

mit einer Konstanten  $c'_0 > 0$ . Hierbei bezeichnet  $Q^q$  einen Würfel mit der Kantenlänge  $\epsilon_q$ ,  $a_{Q^q}$  die zugehörige Sesquilinearform, und die letzte Abschätzung folgt wegen Satz 2.2.2(b). Mit der Defintion von  $R_p(\lambda)$  erhalten wir daher die Abschätzung

$$A_3 \leq \mathcal{N}_0^*(c_0\lambda; \omega_p) + c_0'' R_p(\lambda) \leq \mathcal{N}_0^*(c\lambda; \omega_p) + c R_p(\lambda), \quad \forall \lambda > 0 \quad (2.74)$$

mit  $c_0'' = \max(c'_0, c'_0 + c_0'^2)$  und  $c = \max(c_0, c_0'')$ . Wegen  $H_0^m(\omega_p) \subset \mathcal{H}_0^m(\omega_p)$  und Korollar 2.3.5 folgt:

$$\mathcal{N}_0^*(\lambda; \omega_p) \leq \mathcal{N}_1^*(\lambda; \omega_p) \leq \mathcal{N}_1^*(\lambda; \tilde{\cdot}_{c_1\epsilon_p}), \quad \forall \lambda > 0. \quad (2.75)$$

Aufgrund von Lemma 2.3.3 existieren die Konstanten  $\lambda_1 > 1$ ,  $C'_1 > 0$  und ein  $p_1 \geq p'_1$ , so daß für alle  $p \geq p_1$  und  $\lambda \geq \lambda_1(\epsilon_p)^{-2m}$ :

$$A_3 \leq \mathcal{N}_1^*(c\lambda; \tilde{\cdot}_{c_1\epsilon_p}) + c R_p(\lambda) \leq C'_1(\epsilon_p)^{n-d} \lambda^{\frac{n}{2m}} + c R_p(\lambda). \quad (2.76)$$

Mit den Abschätzungen der  $A_i$ , sowie (2.63) folgt nun die Behauptung des Lemmas.  $\square$

**Lemma 2.3.8 (Abschätzung des Restterms)** Es gibt positive Konstanten  $c_2, c_3$  und  $p_2$ —nur abhängig von  $\Omega, n$  und  $d$ —derart, daß für alle  $p \geq p_2$  gilt [28, S. 504ff]:

$$(a) \quad \begin{aligned} S_p &\leq c_2 + c_3(\epsilon_p)^{-\Theta} = c_2 + c_3 2^{p\Theta} && \text{falls } \Theta \in (0, 1] \\ S_p &\leq c_2 + c_3 p && \text{falls } \Theta = 0 \end{aligned} \quad (2.77)$$

$$(b) \quad \begin{aligned} T_p &\leq c_2 + c_3(\epsilon_p)^{-d} = c_2 + c_3 2^{pd} && \text{falls } d \neq 0 \\ T_p &\leq c_2 + c_3 p && \text{falls } d = 0 \end{aligned} \quad (2.78)$$

mit den Ausdrücken  $S_p$  und  $T_p$  aus Lemma 2.3.6, sowie  $\Theta := d \Leftrightarrow (n \Leftrightarrow 1)$ .

*Bemerkungen.*  $\Theta$  stellt ein Maß für die Fraktalität von  $\omega$  dar. Da  $d \in [n \Leftrightarrow 1, n]$  haben wir  $\Theta \in (0, 1]$ , falls der Rand  $\omega$  fraktal ist, andernfalls ist  $\Theta = 0$ . Wenn  $n \geq 2$ , dann liegt wegen  $d \geq n \Leftrightarrow 1 > 0$  notwendigerweise der erste Fall in (b) vor. Der andere Fall kann daher nur eintreten, falls  $n = 1$  ist, und  $\omega$  nicht fraktal ist, d.h.  $D = n \Leftrightarrow 1 = 0$ .

*Beweis.* Teil (a) und (b) können getrennt bewiesen werden, da man offensichtlich gemeinsame Konstanten  $c_2, c_3$  und  $p_2$  wählen kann.

(a) Aufgrund der Konstruktion von  $I_p$ , (2.53) und Korollar 2.3.5 gilt

$$\bigcup_{\zeta \in I_q} Q_\zeta^q \subset \omega_{q-1} \subset \tilde{\omega}_{c_1 \epsilon_{q-1}}, \quad \forall q \geq 2 \quad (2.79)$$

mit  $c_1 > \sqrt{n}$  beliebig, aber fest. Da  $\mathcal{M}^*(d; \cdot) < +\infty$ , können wir (2.50) anwenden und folgern, daß Konstanten  $c, c'$  und  $p_2 > 1$  existieren, so daß für alle  $q \geq p_2$  gilt:

$$\left| \bigcup_{\zeta \in I_q} Q_\zeta^q \right| = (\#I_q)(\epsilon_q)^n \leq |\tilde{\omega}_{c_1 \epsilon_{q-1}}| \leq c'(\epsilon_{q-1})^{n-d} = c'(2\epsilon_q)^{n-d} = c(\epsilon_q)^{n-d} \quad (2.80)$$

mit  $c = 2^{n-d}c'$ . Aufgrund von  $\Theta = d \Leftrightarrow (n \Leftrightarrow 1)$  folgt

$$(\#I_q)(\epsilon_q)^{n-1} \leq c(\epsilon_q)^{(n-1)-d} = c(\epsilon_q)^{-\Theta}, \quad \forall q \geq p_2 \quad (2.81)$$

Sei nun  $p > p_2$  beliebig, aber fest. Dann können wir  $S_p$  in 2 Summen aufspalten, und es existiert ein  $c_2 > 0$ , so daß

$$S_p = \sum_{q=0}^{p_2} (\#I_q)(\epsilon_q)^{n-1} + \sum_{q=p_2+1}^p (\#I_q)(\epsilon_q)^{n-1} \leq c_2 + c \sum_{q=p_2+1}^p (\epsilon_q)^{-\Theta}, \quad (2.82)$$

wegen Gleichung (2.81). Sei nun  $\Theta = 0$ , Dann folgt

$$S_p \leq c_2 + c \sum_{q=p_2+1}^p 1 \leq c_2 + c_3 p, \quad (2.83)$$

womit der zweite Teil von (a) bewiesen ist. Wir nehmen nun  $\Theta \neq 0$  an; wegen (2.82), und da  $\epsilon_q = 2^{-q}$ , können wir abschätzen:

$$S_p \leq c_2 + c \sum_{q=p_2+1}^p 2^{q\Theta} \leq c_2 + c \frac{2^\Theta}{2^{\Theta \Leftrightarrow 1}} 2^{p\Theta} = c_2 + c_3 2^{p\Theta} \quad (2.84)$$

mit  $c_3 = c2^\Theta / (2^{\Theta \Leftrightarrow 1})$ , womit Teil (a) bewiesen ist.

(b) Wegen (2.80) und (2.81) gibt es  $c > 0$  und  $p_2 > 1$ , so daß

$$\#I_q \leq c(\epsilon_q)^{-d} = c2^{pd}, \quad \forall q \geq p_2. \quad (2.85)$$

Falls  $d = 0$  gilt, folgt mit beliebigem, aber festem  $p_2 > p$ :

$$T_p = \sum_{q=0}^{p_2} (\#I_q) + \sum_{p_2+1}^p (\#I_q) \leq c_2 + c \sum_{q=p_2+1}^p 1 \leq c_2 + c_3 p \quad (2.86)$$

und damit der zweite Teil von (b). Auf der anderen Seite, falls  $d \neq 0$ , spalten wir  $T_p$  wiederum in zwei Summen auf, benutzen (2.85) und erhalten

$$T_p = \sum_{q=0}^{p_2} (\#I_q) + \sum_{q=p_2+1}^p (\#I_q) \leq c_2 + c \sum_{q=p_2+1}^p 2^{qd} \leq c_2 + c \frac{2^d}{2^d \Leftrightarrow 1} 2^{pd} = c_2 + c_3 2^{pd} \quad (2.87)$$

mit  $c_3 = c2^d/(2^d \Leftrightarrow 1)$ , wie behauptet.  $\square$

*Beweis von Satz 2.1.5.* Wir schließen nun den Beweis von Satz 2.1.5 ab. Dazu müssen wir  $|\mathcal{N}(\lambda) \Leftrightarrow \Phi(\lambda)|$  abschätzen. Aufgrund von Lemma 2.3.6 gibt es die Konstanten  $C_1, p_1 > 0$  und ein  $\lambda_1 > 1$  derart, daß für alle  $p \geq p_1$  und alle  $\lambda \geq \lambda_1(\epsilon_p)^{-2m}$  gilt:

$$|\mathcal{N}(\lambda) \Leftrightarrow \Phi(\lambda)| \leq C_1 \left( (\epsilon_p)^{n-d} \lambda^{\frac{n}{2m}} + R_p(\lambda) \right). \quad (2.88)$$

Sei nun  $p = p(\lambda)$  die größte natürliche Zahl, die  $2^p \leq (\lambda/\lambda_1)^{1/2m}$  erfüllt, d.h. wir setzen

$$p = p(\lambda) := \left\lceil \frac{1}{2m} \log_2 \left( \frac{\lambda}{\lambda_1} \right) \right\rceil, \quad (2.89)$$

wobei  $[x]$  die größte ganze Zahl, die kleiner oder gleich  $x$  bezeichnet (GAUSS-Klammer). Mit dieser Definition folgt:

$$(\lambda/\lambda_1)^{\frac{1}{2m}}/2 < 2^p \leq (\lambda/\lambda_1)^{\frac{1}{2m}} \quad (2.90)$$

und daher  $\epsilon_p \approx \lambda^{-1/2m}$ , für  $\lambda \rightarrow +\infty$ . Wir unterscheiden wieder zwischen zwei Fällen:

(1)  $d \in (n \Leftrightarrow 1, n]$ . Dann gilt  $\Theta := d \Leftrightarrow (n \Leftrightarrow 1) \in (0, 1]$  und damit  $d \neq 0$ . Wegen Lemma 2.3.8 existieren die Konstanten  $c_1, c_2, p_2 > 0$ , so daß für alle  $p \geq p_2$ :

$$R_p(\lambda) = S_p \lambda^{\frac{n-1}{2m}} + T_p \leq (c_1 + c_2(\epsilon_p)^{-\Theta}) \lambda^{\frac{n-1}{2m}} + c_1 + c_2(\epsilon_p)^{-d}. \quad (2.91)$$

Wir können  $p_2 > p_1$  annehmen. Wenn wir (2.88) und (2.91) zusammenfassen, dann gilt für alle  $p \geq p_2$  und alle  $\lambda \geq \lambda_1(\epsilon_p)^{-2m}$ :

$$\begin{aligned} |\mathcal{N}(\lambda) \Leftrightarrow \Phi(\lambda)| &\leq C_1 \left( (\epsilon_p)^{n-d} \lambda^{\frac{n}{2m}} + (c_1 + c_2(\epsilon_p)^{-\Theta}) \lambda^{\frac{n-1}{2m}} + c_1 + c_2(\epsilon_p)^{-d} \right) \\ &\leq C'_1 \left( (\epsilon_p)^{n-d} \lambda^{\frac{n}{2m}} + \lambda^{\frac{n-1}{2m}} + (\epsilon_p)^{-\Theta} \lambda^{\frac{n-1}{2m}} + 1 + (\epsilon_p)^{-d} \right) \end{aligned} \quad (2.92)$$

mit  $C'_1 = \max(C_1, C_1 c_1, C_1 c_2)$ . Sei nun  $\lambda_2$  so gewählt, daß  $\lambda_2 > \lambda_1$  und  $p(\lambda_2) \geq p_2$  erfüllt sind. Dann gibt es ein  $C' > 0$ , so daß für alle  $\lambda \geq \lambda_2$  mit  $p = p(\lambda)$  gilt:

$$\begin{aligned} (\epsilon_p)^{n-d} \lambda^{\frac{n}{2m}} &\leq C' \lambda^{-\frac{n-d}{2m}} \lambda^{\frac{n}{2m}} = C' \lambda^{\frac{d}{2m}} \\ \lambda^{\frac{n-1}{2m}} &\leq \lambda^{\frac{d}{2m}}, \quad \text{da } n \Leftrightarrow 1 < d \text{ und } \lambda \geq 1 \\ (\epsilon_p)^{-\Theta} \lambda^{\frac{n-1}{2m}} &\leq C' \lambda^{\frac{\Theta}{2m}} \lambda^{\frac{n-1}{2m}} = C' \lambda^{\frac{d}{2m}} \\ (\epsilon_p)^{-d} &\leq C' \lambda^{\frac{d}{2m}} \\ 1 &\leq \lambda^{\frac{d}{2m}}, \quad \text{da } \lambda > 1 \text{ und } \frac{d}{2m} > 0. \end{aligned}$$

Mit (2.92) folgt daher, daß es ein  $C > 0$  und  $\lambda_2 > 1$  in der Weise gibt, daß

$$|\mathcal{N}(\lambda) \Leftrightarrow \Phi(\lambda)| \leq C \lambda^{\frac{d}{2m}}, \quad \forall \lambda \geq \lambda_2 \quad (2.93)$$

womit Teil (a) von Satz 2.1.5 für das DIRICHLET-Problem bewiesen ist.

(2)  $d = n \Leftrightarrow 1$ , d.h.  $\Theta = 0$ . Falls  $n \geq 2$ , dann ist  $d \neq 0$ , dagegen verschwindet  $d$ , wenn  $n = 1$ . Anwendung von Lemma 2.3.8 gibt:

$$R_p(\lambda) = A + B \quad \text{mit} \quad A = (c_1 + c_2 p) \lambda^{\frac{n-1}{2m}} \quad \text{und} \quad B = \begin{cases} c_1 + c_2 (\epsilon_p)^{-(n-1)} & \text{wenn } n \geq 2 \\ c_1 + c_2 p & \text{andernfalls.} \end{cases} \quad (2.94)$$

Mit dem obigen  $p = p(\lambda)$  ist  $A$  der dominante Term, da wegen  $\epsilon_p \approx \lambda^{-\frac{1}{2m}}$ , für  $\lambda \rightarrow +\infty$ , dann  $(\epsilon_p)^{-(n-1)} \approx \lambda^{\frac{n-1}{2m}}$ , für  $\lambda \rightarrow +\infty$ . Es gibt daher ein  $c > 0$  und ein  $\lambda_2 > \lambda_1$ , so daß im Fall  $n \geq 2$  für alle  $\lambda > \lambda_2$  gilt:

$$B = c_1 + c_2 (\epsilon_p)^{-(n-1)} \leq c_1 + c_2' \lambda^{\frac{n-1}{2m}} \leq cA. \quad (2.95)$$

Im Fall  $n = 1$  ist  $B = A$ , so daß in jedem Fall  $B \leq cA$  mit einer Konstanten  $c > 0$  für alle  $\lambda > \lambda_2$  gilt. Aufgrund von  $(\epsilon_p)^{-1} = 2^p \leq \lambda_1^{-1/2m} \lambda^{1/2m}$  (Ungleichung (2.90)) folgt:

$$p \leq \log_2(\lambda_1^{-\frac{1}{2m}} \lambda^{\frac{1}{2m}}) \leq c' \log \lambda \quad (2.96)$$

für genügend großes  $\lambda$ . Wir können daher den Restterm folgendermaßen abschätzen:

$$R_p(\lambda) \leq cA \leq c(c_1 + c_2 c' \log \lambda) \lambda^{\frac{n-1}{2m}} \leq C' \lambda^{\frac{n-1}{2m}} \log \lambda. \quad (2.97)$$

Desweiteren gilt wegen  $d = n \Leftrightarrow 1$  und (2.90):

$$(\epsilon_p)^{n-d} \lambda^{\frac{n}{2m}} = \epsilon_p \lambda^{\frac{n}{2m}} < 2 \lambda_1^{\frac{1}{2m}} \lambda^{\frac{n-1}{2m}} \leq C'' \lambda^{\frac{n-1}{2m}} \log \lambda. \quad (2.98)$$

Mit (2.88) folgt daher, daß es ein  $C > 0$  und  $\lambda_3 > 1$  gibt, so daß

$$|\mathcal{N}(\lambda) \Leftrightarrow \Phi(\lambda)| \leq C \lambda^{\frac{d}{2m}} \log \lambda, \quad \forall \lambda \geq \lambda_3. \quad (2.99)$$

Damit ist der Satz für das DIRICHLET-Problem bewiesen.  $\square$

Nachzutragen bleibt das folgende (Störungs-)Lemma [28, S. 522f]:

**Lemma 2.3.9 (Störungslemma)** *Wenn Lemma 2.3.6 für den Hauptteil  $\mathcal{A}'$  eines Operators  $\mathcal{A}$  gilt, dann gilt es auch für den Operator selbst.*

*Beweis.*  $V$  sei entweder  $H_0^m(\Omega)$  oder  $H^m(\Omega)$ . Man kann dann mit Hilfe der Interpolationsungleichung [1, S. 65]

$$|u|_j^2 \leq C \left( \epsilon |u|_m^2 + (1 + \epsilon^{1-m}) \|u\|_{L^2(\Omega)}^2 \right) \quad \text{für } 0 < \epsilon < 1, \quad m \geq 1, \quad j = 1, \dots, m \Leftrightarrow 1, \quad (2.100)$$

wobei wir die Seminorm  $|u|_m := \left( \sum_{|\alpha|=m} \|D^\alpha u\|_{L^2(\Omega)}^2 \right)^{1/2}$  ( $m \in \mathbb{N}$ ) verwendet haben, zeigen, daß es eine Konstante  $c_1 > 0$  gibt, so daß für alle  $\tau \in (0, 1)$  und  $u \in V$  gilt [42, S. 178f]:

$$|a(u, u) \Leftrightarrow a'(u, u)| \leq \left( \tau + \frac{1}{2} \right) a(u, u) + t \|u\|_{L^2(\Omega)}, \quad (2.101)$$

wobei  $t := c_1(\tau^{1-2m} + 1)$  und  $a'$  den Hauptteil bezüglich der Form  $a$  bezeichnet. Mit dieser Abschätzung und Korollar 1.3.6 folgt:

$$\mathcal{N}(\tilde{\lambda}_1, a') \leq \mathcal{N}(\lambda, a) \leq \mathcal{N}(\tilde{\lambda}_2, a') \quad \text{mit} \quad \tilde{\lambda}_1 := \left(\frac{1}{2} \Leftrightarrow \tau\right)\lambda \Leftrightarrow t \quad \text{und} \quad \tilde{\lambda}_2 := \left(\frac{3}{2} + \tau\right)\lambda + t. \quad (2.102)$$

Wir wählen nun  $\tau = c\lambda^{1/2m}$  und  $\lambda \geq c'(\epsilon_p)^{-2m}$  mit  $c'$  und daher  $\lambda$  genügend groß. Man kann dann leicht zeigen, daß die Konstanten  $c'_1, c'_2 > 0$  und ein  $\lambda_0 > 0$  existieren, so daß

$$c'_1\lambda \leq \tilde{\lambda}_1 \leq \lambda \leq \tilde{\lambda}_2 \leq c'_2\lambda, \quad \forall \lambda \geq \lambda_0. \quad (2.103)$$

und da offensichtlich  $\mu'_{\mathcal{A}'}(\Omega) = \mu'_{\mathcal{A}}(\Omega)$ , haben wir

$$c'_1\Phi(\lambda) \leq \Phi(\tilde{\lambda}_1) \leq \Phi(\lambda) \leq \Phi(\tilde{\lambda}_2) \leq c'_2\Phi(\lambda), \quad \forall \lambda \geq \lambda_0. \quad (2.104)$$

Auf die resultierende Abschätzung

$$|\mathcal{N}(\lambda, a) \Leftrightarrow \Phi(\lambda)| \leq C \max_{i=1,2} |N(\tilde{\lambda}_i, a') \Leftrightarrow \Phi(\lambda_i)|, \quad \forall \lambda \geq \lambda_0 \quad (2.105)$$

können wir Lemma 2.3.6 anwenden und erhalten

$$|\mathcal{N}(\lambda, a) \Leftrightarrow \Phi(\lambda)| \leq C_1 \left( (\epsilon_p)^{n-d} \lambda^{\frac{n}{2m}} + R_p(\lambda) \right) \quad (2.106)$$

für genügend großes  $p$  und  $\lambda \geq \lambda_1(\epsilon_p)^{-2m}$  mit einer Konstanten  $\lambda_1 > 0$ .  $\square$

### 2.3.2 Neumann-Problem ( $V = H^m(\Omega)$ )

Der Beweis von Satz 2.1.5 für das NEUMANN-Problem verläuft ähnlich wie der Beweis für das DIRICHLET-Problem. Dieser braucht lediglich ein wenig modifiziert werden. Im vorliegenden Fall schreiben wir

$$\mathcal{N}(\lambda) = \mathcal{N}_1(\lambda; \Omega) \quad \text{und} \quad \mathcal{N}_1^*(\lambda; \omega) := \mathcal{N}^*(\lambda; H^m(\Omega), L^2(\omega)). \quad (2.107)$$

und erinnern uns an die Schreibweise  $\mathcal{N}_1(\lambda; \omega) = \mathcal{N}(\lambda; H^m(\Omega), L^2(\Omega), a)$  aus Definition 2.45. Zusätzlich zu den Voraussetzungen für das DIRICHLET-Problem nehmen wir an, daß das Gebiet  $\Omega$  die  $C'$ -Bedingung aus Definition 1.1.11 erfüllt, und daß  $\tilde{\mathcal{M}}^*(d; , ) < +\infty$  für ein  $d \in [n \Leftrightarrow 1, n]$  (siehe Voraussetzungen von Satz 2.1.5). Es gilt dann:

**Lemma 2.3.10 (Randabschätzung)** *Es existieren positive Konstanten  $\epsilon_0, \lambda_0$  und  $C_0$ , so daß für alle  $0 < \epsilon < \epsilon_0$  und alle  $\lambda \geq \lambda_0\epsilon^{-2m}$  gilt*

$$\mathcal{N}_1^*(\lambda; \tilde{\epsilon}) := \mathcal{N}^*(\lambda; H^m(\Omega), L^2(\omega)) \leq C_0\epsilon^{n-d}\lambda^{\frac{n}{2m}} \quad (2.108)$$

mit der inneren  $\epsilon$ -Umgebung  $\tilde{\epsilon} := \epsilon \cap \Omega$ .

*Beweis.* Wir wenden Lemma 2.2.7(b) an und erhalten, daß es Konstanten  $\lambda'_0, c'$  und  $C$  gibt, so daß:

$$\mathcal{N}_1^*(\lambda, \tilde{\epsilon}) \leq C|_{\epsilon+c'\lambda^{-1/2m}}|\lambda^{\frac{n}{2m}} = C|_{\epsilon+\delta}|\lambda^{\frac{n}{2m}}, \quad \forall \epsilon > 0 \quad \forall \lambda \geq \lambda'_0 \quad (2.109)$$

mit  $\delta = c'\lambda^{-1/2m}$ . Der Rest des Beweises verläuft analog zum Beweis von Lemma 2.3.3.

□

**Lemma 2.3.11 (Abschätzung der Zustandszahlfunktion)** Sei  $\{Q_\zeta\}_{\zeta \in \mathbb{Z}^n}$  eine Pflasterung des Gebietes  $\Omega$  im Sinne von Definition 2.3.4. Dann gibt es Konstanten  $C_1, p_1 > 0$  und ein  $\lambda_1 > 1$  derart, daß für alle natürlichen Zahlen  $p \geq p_1$  und alle  $\lambda \geq \lambda_1(\epsilon_p)^{-2m}$  gilt:

$$|\mathcal{N}(\lambda) \Leftrightarrow \Phi(\lambda)| \leq C_1 \left( (\epsilon_p)^{n-d} \lambda^{\frac{n}{2m}} + R_p(\lambda) \right), \quad (2.110)$$

wobei

$$R_p(\lambda) := \sum_{q=0}^p (\#I_q) (1 + (\epsilon_q)^{n-1} \lambda^{\frac{n-1}{2m}}) = S_p \lambda^{\frac{n-1}{2m}} + T_p \quad (2.111)$$

mit

$$S_p := \sum_{q=0}^p (\#I_q) (\epsilon_q)^{n-1} \quad \text{und} \quad T_p := \sum_{q=0}^p (\#I_q). \quad (2.112)$$

$S_p$  und  $T_p$  hängen offensichtlich nicht von  $\lambda$  ab.

*Beweis.* Sei  $p \geq 2$  und  $\lambda > 0$ . Wir wenden diesmal Lemma 1.3.7 mit dem Variationstriplet  $(H^m(\Omega), L^2(\Omega), a)$  und  $W_0 = H_0^m(\Omega'_p)$  an:

$$\mathcal{N}_1(\lambda; \Omega'_p) \leq \mathcal{N}(\lambda) \leq \mathcal{N}_1(\lambda; \Omega'_p) + \mathcal{N}^\bullet(\lambda; \Omega'_p) \quad (2.113)$$

mit

$$\mathcal{N}^\bullet(\lambda; \Omega'_p) := \mathcal{N}(\lambda; Z_\lambda, L^2(\Omega), a) \quad (2.114)$$

und

$$Z_\lambda := \{u \in H^m(\Omega) : a(u, v) = \lambda(u, v)_{L^2(\Omega)}, \forall v \in H_0^m(\Omega'_p)\}. \quad (2.115)$$

Mit  $\Phi(\lambda) := \Phi(\lambda; \Omega)$  können wir auch in diesem Fall abschätzen:

$$A_1 + A_2 \leq \mathcal{N}(\lambda) \Leftrightarrow \Phi(\lambda) \leq A_1 + A_2 + A_3, \quad (2.116)$$

wobei wir wieder

$$A_1 = \mathcal{N}_0(\lambda; \Omega'_p) \Leftrightarrow \Phi(\lambda; \Omega'_p) \quad , \quad A_2 = \Phi(\lambda; \Omega'_p) \Leftrightarrow \Phi(\lambda; \Omega) \quad \text{und} \quad A_3 = \mathcal{N}^\bullet(\lambda; \Omega'_p) \quad (2.117)$$

gesetzt haben. Wir können wieder  $\mathcal{A} = \mathcal{A}'$  annehmen, da wir das Lemma 2.3.9 sowohl für  $V = H_0^m(\Omega)$  als auch für  $V = H^m(\Omega)$  gezeigt haben. Es gelten daher die folgenden Abschätzungen der  $A_i$  ( $i = 1, 2, 3$ ):

$$|A_1| \leq CR_p(\lambda), \quad (\text{Lemma 2.2.2 (a) mit } W_Q = H^m(\Omega) \text{ anwenden}) \quad (2.118)$$

$$|A_2| \leq c'_1(\epsilon_p)^{n-d} \lambda^{\frac{n}{2m}} \quad (2.119)$$

$$A_3 \leq N_1^*(c\lambda; \tilde{c}_1\epsilon_p) + cR_p(\lambda) \leq C'_1(\epsilon_p)^{n-d} \lambda^{\frac{n}{2m}} + cR_p(\lambda), \quad (2.120)$$

wobei letztere wieder wegen [42, S. 181] gilt. Mit diesen Abschätzungen und (2.116) folgt nun unmittelbar die Behauptung von Lemma 2.3.11. □

Lemma 2.3.8 ist ebenfalls nach wie vor gültig, da aufgrund von  $\tilde{\mathcal{M}}^*(d; , ) < +\infty$  auch  $\mathcal{M}^*(d; , ) \leq \tilde{\mathcal{M}}^*(d; , )$  endlich ist:



**Lemma 2.3.12 (Abschätzung des Restterms)** *Es gibt positive Konstanten  $c_2, c_3$  und  $p_2$ —nur abhängig von  $\Omega, n$  und  $d$ —derart, daß für alle  $p \geq p_2$  gilt:*

(a)

$$\begin{aligned} S_p &\leq c_2 + c_3(\epsilon_p)^{-\Theta} = c_2 + c_3 2^{p\Theta} && \text{falls } \Theta \in (0, 1] \\ S_p &\leq c_2 + c_3 p && \text{falls } \Theta = 0 \end{aligned} \tag{2.121}$$

(b)

$$\begin{aligned} T_p &\leq c_2 + c_3(\epsilon_p)^{-d} = c_2 + c_3 2^{pd} && \text{falls } d \neq 0 \\ T_p &\leq c_2 + c_3 p && \text{falls } d = 0 \end{aligned} \tag{2.122}$$

mit den Ausdrücken  $S_p$  und  $T_p$  aus Lemma 2.3.11, sowie  $\Theta := d \Leftrightarrow (n \Leftrightarrow 1)$ .

Der restliche Beweis für das NEUMANN-Problem verläuft dann analog zum Beweis des Satzes für das DIRICHLET-Problems.  $\square$

# Kapitel 3

## Laplace-Operator und Dirichlet-Problem

Ziel dieses Kapitels ist es, das Spektrum des (negativen) LAPLACE-Operators auf einem beschränkten  $n$ -dimensionalen Gebiet mit fraktalem Rand bei DIRICHLET-Randbedingungen zu studieren. Daher sei  $\Omega \subset \mathbb{R}^n$  ( $n \geq 1$ ) eine beschränkte offene Menge, deren Rand  $\partial\Omega$  die MINKOWSKI-Dimension  $D \in (n-1, n)$  besitzt. Wir untersuchen in diesem Kapitel das folgende Eigenwertproblem:

$$\begin{aligned} \Leftrightarrow \Delta u &= \lambda u && \text{in } \Omega \\ u &= 0 && \text{auf } \partial\Omega, \end{aligned} \quad (3.1)$$

wobei  $\Delta := \sum_{k=1}^n \partial^2 / \partial x_k^2$  den  $n$ -dimensionalen LAPLACE-Operator bezeichnet. Wir verstehen das Problem (3.1) im Distributionssinne, d.h. mit  $H_0^1(\Omega)$  als dem zugehörigen Randwertraum von  $\Leftrightarrow \Delta$  bei DIRICHLET-Randbedingungen ist  $\lambda$  ein Eigenwert von (3.1), wenn es einen nichttrivialen Vektor  $u \in H_0^1(\Omega)$  gibt, so daß

$$a(u, v) = \lambda(u, v)_{L^2(\Omega)}, \quad \forall v \in H_0^1(\Omega) \quad (3.2)$$

im Distributionssinne erfüllt ist. Dabei ist

$$a(u, v) = \sum_{i=1}^n \int_{\Omega} \frac{\partial u}{\partial x_i} \overline{\frac{\partial v}{\partial x_i}} dx = (\nabla u, \nabla v) \quad (3.3)$$

die zu  $\Leftrightarrow \Delta$  gehörende Sesquilinearform. Die Sesquilinearform  $a$  ist aufgrund des Beispiels auf Seite 20 beschränkt, hermitesch und koerziv. Anwendung von Satz 1.2.3 aus Abschnitt 1.2.3 mit dem Variationstriplet  $(H_0^1(\Omega), L^2(\Omega), a)$  ergibt, daß das Spektrum von  $\Leftrightarrow \Delta$  diskret ist, und es aus einer abzählbar unendlichen Folge von positiven Eigenwerten  $\{\lambda_i\}_{i=1}^{\infty}$  endlicher Multiplizität besteht, wobei

$$0 < \lambda_1 \leq \lambda_2 \leq \dots \leq \lambda_i \leq \dots \quad \text{mit } \lambda_i \rightarrow +\infty \text{ für } i \rightarrow +\infty, \quad (3.4)$$

die sich nur im Unendlichen häufen.  $\mathcal{N}(\lambda)$  bezeichne die Zustandszahlfunktion bezüglich (3.1), d.h. für  $\lambda \geq 0$  gebe sie die Zahl der Eigenwerte des Problems (3.1) unter Berücksichtigung ihrer Multiplizität an, die kleiner oder gleich  $\lambda$  sind:

$$\mathcal{N}(\lambda) = \#\{i \geq 1 : \lambda_i \leq \lambda\}. \quad (3.5)$$

Aufgabe dieses Kapitel ist es nun, genauere Informationen über das asymptotische Verhalten der Zustandszahlfunktion für  $\lambda \rightarrow +\infty$ , insbesondere über den zweiten Term in der asymptotischen Entwicklung, zu gewinnen. Der erste Term ist bekanntlich durch den WEYLSchen Ausdruck

$$\Phi(\lambda) = \frac{\mathcal{B}_n}{(2\pi)^n} |\Omega|_n \lambda^{\frac{n}{2}} \quad (3.6)$$

gegeben, wobei  $\mathcal{B}_n = \pi^{n/2} / (\frac{n}{2})!$  das Volumen einer  $n$ -dimensionalen Einheitskugel im  $\mathbb{R}^n$  und  $|\Omega|_n$  das  $n$ -dimensionale LEBESGUESche Maß des Gebietes  $\Omega$  ( $|\Omega|_n = \int_{\Omega} dx$ ) bezeichnen.

Wir werden zunächst die Ergebnisse, die aus dem Satz von LAPIDUS folgen, angeben und anschließend eine explizite untere Schranke für die Zustandszahlfunktion bestimmen. Danach werden wir uns intensiv mit selbstähnlichen Gebieten, die jeweils aus einem genügend glatten Grundgebiet unterschiedlicher Skalierung bestehen, auseinandersetzen. Als konkretes Beispiel möge an dieser Stelle die in der Einleitung angeführte SIERPINSKI-Pfeilspitzenmembran dienen.

Es wird sich herausstellen, daß es sich dabei um Gebiete handelt, deren Zustandszahlfunktionen in der asymptotischen Entwicklung keinen zweiten Term proportional zu einer Konstanten enthalten, wie dies M. V. BERRY aufgrund heuristischer Überlegungen vermutet hat [3]. Es stellt sich vielmehr heraus, daß der zweite Term proportional zu einer beschränkten periodischen Funktion in  $\ln \lambda$  ist—wir bezeichnen sie an dieser Stelle wieder mit  $\mathcal{F}$ . Desweiteren ist die MINKOWSKI-Dimension statt der HAUSDORFF-Dimension zu verwenden, wie dies schon J. BROSSARD und R. CARMONA aufgrund Rechnungen anhand eines Beispiels vorgeschlagen haben [5]. Wir werden dieses Beispiel in Anhang B.2 behandeln.

Für die Zustandszahlfunktion der in Abschnitt 3.2 behandelte Klasse von Gebieten gilt:

$$\mathcal{N}(\lambda) = \Phi(\lambda) \Leftrightarrow \mathcal{F}(\ln \lambda) \lambda^{\frac{D}{2}} + O(\lambda^{\frac{n-1}{2}}), \quad \text{für } \lambda \rightarrow +\infty. \quad (3.7)$$

Es stellt sich heraus, daß der Graph der Funktion  $\mathcal{F}$  selbst wieder ein Fraktal ist. An dieser Stelle mögen die Abbildungen B.25 auf Seite 121 und B.17 auf Seite 117 als Anhaltspunkt dienen. Wir werden im Anschluß an die Herleitung von (3.7) (siehe Satz 3.2.9) die Funktion  $\mathcal{F}$ , bzw. mit  $\mathcal{F}$  assoziierte Funktionen in den Abschnitten 3.2.3f ausführlich diskutieren und insbesondere Abschätzungen für die MINKOWSKI-Dimension der Graphen der soeben erwähnten Funktionen beweisen (Sätze 3.2.21 und 3.2.23).

Konkrete Modellsysteme werden dann in Anhang B behandelt.

## 3.1 Abschätzung der Zustandszahlfunktion

### 3.1.1 Ergebnisse von Lapidus

Um den Satz von LAPIDUS anwenden zu können, setzen wir  $\mathcal{A} = \Leftrightarrow \Delta$ ,  $V = H_0^1(\Omega)$  und  $a(u, v) = \int_{\Omega} \nabla u \cdot \nabla v \, dx$ . Dann gilt aufgrund von Korollar 2.1.6 und wegen [28, S. 482]:

**Satz 3.1.1** Sei  $\Omega \subset \mathbb{R}^n$  ein beliebiges offenes und beschränktes Gebiet.  $D \in (n \Leftrightarrow 1, n]$  sei die MINKOWSKI-Dimension von  $\cdot$ , bezüglich  $\Omega$ . Dann gilt in Bezug auf das Eigenwertproblem (3.1) für alle  $d > D$  die folgende Restabschätzung der Zustandzahlfunktion  $\mathcal{N}$ :

$$\mathcal{N}(\lambda) = \frac{\mathcal{B}_n}{(2\pi)^n} |\Omega|_n \lambda^{\frac{n}{2}} + O(\lambda^{\frac{d}{2}}), \quad \text{für } \lambda \rightarrow +\infty. \quad (3.8)$$

Wenn der obere MINKOWSKI-Inhalt  $\mathcal{M}^*(D; \cdot)$  bezüglich  $\Omega$  endlich ist, dann gilt diese Gleichung mit  $d = D$ .

*Bemerkung.* Die Abschätzung (3.8) ist optimal für alle  $D \in (n \Leftrightarrow 1, n)$ . Dies zeigen u.a. die behandelten Modellsysteme im Anhang, sowie Satz 3.2.9 in Verbindung mit Korollar 3.2.13.

### 3.1.2 Verbesserung der Abschätzung

Wie schon eingangs erwähnt, ist es für das Eigenwertproblem (3.1) möglich eine explizite untere Schranke für die Zustandzahlfunktion anzugeben. Dies führt zu folgendem Satz:

**Satz 3.1.2**  $\Omega \subset \mathbb{R}^n$  ( $n \in \mathbb{N}$ ) sei ein offenes und beschränktes Gebiet. Der Rand des Gebietes  $\partial\Omega := \partial\Omega$  besitze bezüglich  $\Omega$  die MINKOWSKI-Dimension  $D \in (n \Leftrightarrow 1, n)$ . Der obere MINKOWSKI-Inhalt sei endlich, d.h.

$$\mathcal{M}^*(D; \cdot) = \limsup_{\epsilon \rightarrow 0^+} \epsilon^{-(n-D)} |\cdot \cap \Omega|_n < +\infty, \quad (3.9)$$

wobei  $\cdot_\epsilon = \{x \in \mathbb{R}^n : d(x, \cdot) < \epsilon\}$ . Mit  $\mathcal{K}_n(r) := \#\{(q_1, \dots, q_n) \in \mathbb{N}^n : \sum_{i=1}^n q_i^2 \leq r^2\}$  gilt die folgende Abschätzung der Zustandzahlfunktion  $\mathcal{N}$  des Eigenwertproblems (3.1):

$$\mathcal{N}(\lambda) \geq \Phi(\lambda) \Leftrightarrow 2^{n-D} n^{\frac{n-D}{2}} \mathcal{M}^*(D; \cdot) \pi^{-D} p_n \left( \frac{\ln \lambda - 2 \ln \pi}{2 \ln 2} \right) \lambda^{\frac{D}{2}} + o(\lambda^{\frac{D}{2}}), \quad \text{für } \lambda \rightarrow +\infty \quad (3.10)$$

mit (3.6) und der Funktion

$$p_n(x) = \sum_{i=-\infty}^{\infty} 2^{D(i-x)} \left( \frac{\mathcal{B}_n}{2^n} 2^{n(x-i)} \Leftrightarrow \mathcal{K}_n(2^{x-i}) \right). \quad (3.11)$$

*Bemerkungen.* Satz 3.1.2 wird in [13, S. 871] ohne Beweis angegeben. Im Gegensatz zu der hier gezeigten Abschätzung tritt dort ein  $\pi$  in der Definition von  $p_n$  auf. Dabei handelt es sich offensichtlich um einen Druckfehler. (Die Funktion  $p_n$  wäre andernfalls nämlich nicht beschränkt.) Desweiteren fehlt dort ein Faktor  $2^{n-D}$ .

Zum Beweis benötigen wir folgendes Lemma für die Abschätzung der Zustandzahlfunktion eines  $n$ -dimensionalen Würfels mit der Kantenlänge  $\epsilon$ :

**Lemma 3.1.3** Es gibt positive Konstanten  $c_{1,n}, c_{2,n}$  und  $c_n$ , so daß für die Zustandzahlfunktion  $\mathcal{N}(\lambda; Q)$  eines  $n$ -dimensionalen Würfels  $Q$  mit der Kantenlänge  $\epsilon$  gilt:

$$|\mathcal{N}(\lambda; Q) \Leftrightarrow \Phi(\lambda; Q)| \leq c_{1,n} + c_{2,n} \epsilon^{n-1} \lambda^{\frac{n-1}{2}} \leq c_n (1 + \epsilon^{n-1} \lambda^{\frac{n-1}{2}}), \quad \forall \lambda \geq 0. \quad (3.12)$$

Diese Abschätzung gilt sowohl für DIRICHLET-, als auch für NEUMANN-Randbedingungen, wobei die Konstanten  $c_{1,n}, c_{2,n}$  durch (3.21) gegeben sind. Sie hängen wie die Konstante  $c_n$  nur von der Dimension  $n$  ab.  $\Phi(\lambda; Q)$  ist durch (3.16) gegeben.

*Beweis.*  $\mathcal{N}_0(\lambda; Q)$  bzw.  $\mathcal{N}_1(\lambda; Q)$  sei die Zustandszahlfunktion von  $\Leftrightarrow\Delta$  bei DIRICHLET- bzw. NEUMANN-Randbedingungen eines  $n$ -dimensionalen Würfels mit der Kantenlänge  $\epsilon$ . Die Eigenwerte  $\lambda_m, m = (m_1, \dots, m_n)$  sind gegeben durch

$$\lambda_m = \left(\frac{\pi}{\epsilon}\right)^2 \sum_{i=1}^n m_i^2 \quad \text{mit} \quad \begin{cases} m_i \in \mathbb{N}^n \text{ bei Dirichlet-Randbedingungen,} \\ m_i \in \mathbb{N}_0^n \text{ bei Neumann-Randbedingungen.} \end{cases} \quad (3.13)$$

$S_\lambda := \{x \in \mathbb{R}^n : |x| \leq \epsilon\sqrt{\lambda}/\pi\}$  bezeichne die abgeschlossene Kugel in  $\mathbb{R}^n$  mit Radius  $\epsilon\sqrt{\lambda}/\pi$ . Einerseits gilt nun

$$\mathbb{N}^n \cap S_\lambda \subset \{x \in \mathbb{R}^n : m_i \leq x_i \leq m_i + 1; i = 1, \dots, n; m \in \mathbb{N}^n \cap S_\lambda\}, \quad (3.14)$$

andererseits gilt die Inklusion

$$\{x \in \mathbb{R}^n : m_i \Leftrightarrow 1 \leq x_i \leq m_i; i = 1, \dots, n; m \in \mathbb{N}_0^n \cap S_\lambda\} \subset \mathbb{N}_0^n \cap S_\lambda. \quad (3.15)$$

Mit dem Weylschen Ausdruck des Würfels  $Q$ ,

$$\Phi(\lambda; Q) = \frac{\mathcal{B}_n}{(2\pi)^n} \epsilon^n \lambda^{\frac{n}{2}} \quad (3.16)$$

folgt daher die Abschätzung

$$\mathcal{N}_0(\lambda; Q) \leq \Phi(\lambda; Q) \leq \mathcal{N}_1(\lambda; Q), \quad \forall \lambda \geq 0. \quad (3.17)$$

Wir betrachten nun die Differenz

$$\mathcal{N}_1(\lambda; Q) \Leftrightarrow \mathcal{N}_0(\lambda; Q) = \# \left\{ \bigcup_{k=0}^{n-1} M_k(\lambda) \right\} \leq \sum_{k=0}^{n-1} \binom{n}{k} \frac{\epsilon^k}{\pi^k} \lambda^{\frac{k}{2}}, \quad (3.18)$$

wobei  $M_k(\lambda) = \{m \in \mathbb{N}_0^n \cap S_\lambda : \text{genau } k \text{ der } n_i \text{ sind ungleich Null}\}$ , und die Abschätzung wegen  $\#M_k(\lambda) \leq \binom{n}{k} \frac{\epsilon^k}{\pi^k} \lambda^{k/2}$  folgt. Mit  $\epsilon^k \lambda^{k/2} \leq 1$  für  $k = 0, \dots, n \Leftrightarrow 1$  und  $\epsilon \lambda^{1/2} \leq 1$ , sowie  $\epsilon^k \lambda^{k/2} < \epsilon^{n-1} \lambda^{(n-1)/2}$  für  $k = 0, \dots, n \Leftrightarrow 1$  und  $\epsilon \lambda^{1/2} > 1$ , erhalten wir für alle  $n \geq 1$ :

$$\sum_{k=0}^{n-1} \binom{n}{k} \frac{\epsilon^k}{\pi^k} \lambda^{\frac{k}{2}} \leq \begin{cases} \sum_{k=0}^{n-1} \frac{\binom{n}{k}}{\pi^k} & \text{falls } \epsilon \lambda^{\frac{1}{2}} \leq 1 \\ \sum_{k=0}^{n-1} \frac{\binom{n}{k}}{\pi^k} \epsilon^{n-1} \lambda^{\frac{n-1}{2}} & \text{falls } \epsilon \lambda^{\frac{1}{2}} > 1 \end{cases} \quad (3.19)$$

und damit

$$\mathcal{N}_1(\lambda; Q) \Leftrightarrow \mathcal{N}_0(\lambda; Q) \leq c_{1,n} + c_{2,n} \epsilon^{n-1} \lambda^{\frac{n-1}{2}}, \quad \forall \lambda \geq 0 \quad (3.20)$$

mit den, nur von der Dimension  $n$  abhängigen Konstanten

$$c_{1,n} = c_{2,n} = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{\binom{n}{k}}{\pi^k}. \quad (3.21)$$

Mit Ungleichung (3.17) folgt unmittelbar die Behauptung des Lemmas.  $\square$

*Beweis von Satz 3.1.2.* Erinnern wir uns dazu an die Pflasterung des Gebietes  $\Omega$  aus Definition 2.3.4.  $\{Q_\zeta^p\}_{\zeta \in \mathbb{Z}^n}$  mit  $p \in \mathbb{N}_0$  sei eine Zerlegung des  $\mathbb{R}^n$  in kongruente nicht überlappende offene  $n$ -dimensionale Würfel mit Kantenlänge  $\epsilon_p := 2^{-p}$ , so daß  $\bigcup_{\zeta \in \mathbb{Z}^n} \overline{Q_\zeta^p} = \mathbb{R}^n$ . Die Würfel der  $p$ -ten Generation entstehen dabei durch Halbieren der Würfelseiten der  $p \leftrightarrow 1$ -sten Generation. Rekursiv werden die folgende Indexmenge  $I_p$  und offenen Teilmengen  $\Omega'_p, \omega_p \subset \Omega$  definiert (siehe hierzu auch Abbildung 3.1):

$$\begin{aligned} I_0 &:= \{\zeta \in \mathbb{Z}^n : Q_\zeta^0 \subset \Omega\} & I_p &:= \{\zeta \in \mathbb{Z}^n : Q_\zeta^p \subset \omega_{p-1}\} \\ \Omega'_0 &= \bigcup_{\zeta \in I_0} Q_\zeta^0 & \dots & \Omega'_p &= \Omega'_{p-1} \cup \left( \bigcup_{\zeta \in I_p} Q_\zeta^p \right) \\ \omega_0 &= \Omega \setminus \overline{\Omega'_0} & \omega_p &= \Omega \setminus \overline{\Omega'_p}. \end{aligned}$$

Aufgrund ihrer Konstruktion sind die Indexmengen  $I_q$  paarweise disjunkt, und es gilt:

$$\Omega'_p = \bigcup_{q=0}^p \left( \bigcup_{\zeta \in I_q} Q_\zeta^q \right), \quad \text{sowie} \quad \omega_p = \bigcup_{q=p+1}^{\infty} \left( \bigcup_{\zeta \in I_q} Q_\zeta^q \right). \quad (3.22)$$

Desweiteren gilt für alle  $q \geq 1$  und  $\delta_1 > 0$  aufgrund von Korollar 2.3.5:

$$\bigcup_{\zeta \in I_q} Q_\zeta^q \subset \omega_{q-1} \subset c_1 \epsilon_{q-1} \cap \Omega \quad \text{mit} \quad c_1 = \sqrt{n} + \delta_1. \quad (3.23)$$

Zur Zustandszahlfunktion  $\mathcal{N}_0(\lambda; \Omega'_p)$  des Gebietes  $\Omega'_p$  bei DIRICHLET-Randbedingungen auf dem Rand von  $\Omega'_p$  tragen nur diejenigen Würfel bei, deren kleinster Eigenwert kleiner oder gleich dem vorgegebenen  $\lambda$  ist. Der kleinste Eigenwert  $\lambda_{\min}$  ist gegeben durch:

$$\lambda_{\min} = \pi^2 \epsilon_p^{-2} \sum_{i=1}^n 1 = n \pi^2 2^{2p}. \quad (3.24)$$

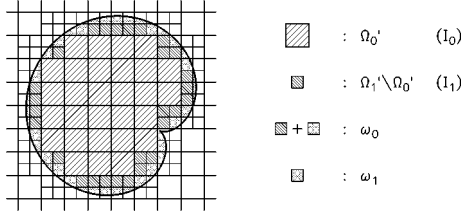


Abbildung 3.1: Plasterung des Gebietes  $\Omega$  durch Ausfüllung mit  $n$ -dimensionalen Würfeln von innen heraus.

Wir wählen daher zu beliebigem  $\lambda \geq 0$ :

$$p = p(\lambda) = \max\{q \geq 1 : \lambda_{\min} \leq \lambda\} = \max\{q \geq 1 : 2^i \leq \sqrt{\lambda/(n\pi^2)}\}. \quad (3.25)$$

Es gilt somit  $\mathcal{N}_0(\lambda; Q_\zeta^q) = 0$  für alle  $q > p$  und alle  $\zeta \in I_q$ . Aufgrund von

$$H_0^1(\Omega'_p) \subset H_0^1(\Omega), \quad \text{sowie} \quad H_0^1(\Omega'_p) = \bigoplus_{\zeta \in \cup_{q=0}^p I_q} H_0^1(Q_\zeta^q), \quad (3.26)$$

wobei ersteres wegen  $\Omega'_p \subset \Omega$  folgt, erhalten wir, wenn wir ein Monotonieprinzip und die Summationseigenschaft der Zustandszahlfunktion  $\mathcal{N}$  anwenden (Lemma 1.3.4(a) bzw. Lemma 1.3.5):

$$\mathcal{N}(\lambda) \geq \mathcal{N}_0(\lambda; \Omega'_p) = \sum_{q=0}^p \sum_{\zeta \in I_q} \mathcal{N}_0(\lambda; Q_\zeta^q). \quad (3.27)$$

Mit dem WEYLSchen Ausdruck

$$\Phi(\lambda) = \Phi(\lambda; \Omega'_p) + \Phi(\lambda; \omega_p) = \sum_{q=0}^p \sum_{\zeta \in I_q} \Phi(\lambda; Q_\zeta^q) + \Phi(\lambda; \omega_p), \quad (3.28)$$

wobei  $\Phi(\lambda, \cdot)$  den WEYLSchen Ausdruck des betreffende Gebiet bezeichnet, bekommen wir, wenn wir  $|Q_\zeta^q| = \epsilon^{-q} =: |Q^q|$  für alle  $\zeta \in I_q$  berücksichtigen, die folgende Abschätzung:

$$\mathcal{N}(\lambda) \Leftrightarrow \Phi(\lambda) \geq T(\lambda) \Leftrightarrow \Phi(\lambda; \omega_p) \quad \text{mit} \quad T(\lambda) = \sum_{q=0}^p (\#I_q) \mathcal{N}_0(\lambda; Q^q) \Leftrightarrow \Phi(\lambda; Q^q). \quad (3.29)$$

Als nächstes bestimmen wir eine Abschätzung für die Mächtigkeit der Indextmengen  $I_q$ . Aufgrund Voraussetzung (3.9) existiert für alle  $\delta_2 > 0$  ein  $\epsilon_0 > 0$ , so daß  $\epsilon^{-(n-D)} |_{\epsilon \cap \Omega}|_n \leq \mathcal{M}^*(D; , ) + \delta_2$  für alle  $\epsilon < \epsilon_0$ , so daß mit Inklusion (3.23) folgt:

$$(\#I_q)(\epsilon_q)^n \leq |_{\epsilon_1 \epsilon_{q-1} \cap \Omega}|_n \leq (\sqrt{n} + \delta_1)^{n-D} (\mathcal{M}^*(D; , ) + \delta_2) (\epsilon_{q-1})^{n-D} \quad (3.30)$$

für alle  $\epsilon < \epsilon_0$ , d.h. für alle  $q \geq q_0 = q_0(\delta_2)$ . Mit  $\mathcal{M}^\bullet := 2^{n-D} (\sqrt{n} + \delta_1)^{n-D} (\mathcal{M}^*(D; , ) + \delta_2)$  erhalten wir daher die folgende Abschätzung für die Kardinalität von  $I_q$ :

$$\#I_q \leq \mathcal{M}^\bullet (\epsilon_q)^{-D} = \mathcal{M}^\bullet 2^{qD}, \quad \forall q \geq q_0. \quad (3.31)$$

Wir können  $p > q_0$  annehmen, d.h. wir wählen  $\lambda$  genügend groß—genauer:  $\lambda > \lambda_0 = n\pi^2 2^{2q_0}$ , spalten  $T(\lambda)$  in zwei Teilsummen auf und beachten  $\mathcal{N}_0(\lambda; Q^q) \leq \Phi(\lambda; Q^q)$ :

$$\begin{aligned} T(\lambda) &\geq \sum_{q=0}^{q_0-1} (\#I_q) (N_0(\lambda; Q^q) \Leftrightarrow \Phi(\lambda; Q^q)) \\ &+ \mathcal{M}^\bullet \left( \sum_{q=q_0}^p 2^{qD} (N_0(\lambda; Q^q) \Leftrightarrow \Phi(\lambda; Q^q)) + \sum_{q=-\infty}^{-1} 2^{qD} (N_0(\lambda; Q^q) \Leftrightarrow \Phi(\lambda; Q^q)) \right) \Leftrightarrow A(\lambda), \end{aligned} \quad (3.32)$$

wobei für den Ausdruck  $A(\lambda)$  mit Lemma 3.1.3 die nachfolgende Abschätzung gilt:

$$\begin{aligned} |A(\lambda)| &= \left| \mathcal{M}^\bullet \sum_{q=-\infty}^{-1} 2^{qD} (N_0(\lambda; Q^q) \Leftrightarrow \Phi(\lambda; Q^q)) \right| \leq c_n \mathcal{M}^\bullet \sum_{q=1}^{\infty} (2^{-qD} + 2^{-q(D-(n-1))} \lambda^{\frac{n-1}{2}}) \\ &= c_n \mathcal{M}^\bullet \left( \frac{2^{-D}}{1 \Leftrightarrow 2^{-D}} + \frac{2^{-\Theta}}{1 \Leftrightarrow 2^{-\Theta}} \lambda^{\frac{n-1}{2}} \right) = O(\lambda^{\frac{n-1}{2}}), \quad \text{für } \lambda \rightarrow \infty. \end{aligned} \quad (3.33)$$

Hierbei haben wir  $\Theta := D \Leftrightarrow (n \Leftrightarrow 1)$  gesetzt. Daher erhalten wir:

$$T(\lambda) \geq \mathcal{M}^\bullet \sum_{q=-\infty}^p 2^{qD} (N_0(\lambda; Q^q) \Leftrightarrow \Phi(\lambda; Q^q)) + R(\lambda) + O(\lambda^{\frac{n-1}{2}}), \quad \text{für } \lambda \rightarrow +\infty \quad (3.34)$$

mit

$$R(\lambda) = \sum_{q=0}^{q_0-1} \left( (\#I_q \Leftrightarrow \mathcal{M}^\bullet 2^{qD}) (N_0(\lambda; Q^q) \Leftrightarrow \Phi(\lambda; Q^q)) \right). \quad (3.35)$$

Für  $R(\lambda)$  gilt mit Lemma 3.1.3 und wegen  $\#I_q \leq |\Omega|_n (\epsilon_q)^{-n}$ , das für alle  $q \geq 0$  erfüllt ist, die folgende Abschätzung:

$$\begin{aligned} |R(\lambda)| &\leq c_n \sum_{q=0}^{q_0-1} (|\Omega|_n (\epsilon_q)^{-n} + \mathcal{M}^\bullet 2^{qD}) (1 + (\epsilon_q)^{n-1} \lambda^{\frac{n-1}{2}}) \\ &= c_n |\Omega|_n \frac{2^{q_0 n} \Leftrightarrow 1}{2^n \Leftrightarrow 1} + c_n \mathcal{M}^\bullet \frac{2^{q_0 D} \Leftrightarrow 1}{2^D \Leftrightarrow 1} + c_n |\Omega|_n (2^{q_0} \Leftrightarrow 1) \lambda^{\frac{n-1}{2}} + c_n \mathcal{M}^\bullet \frac{2^{q_0 \Theta} \Leftrightarrow 1}{2^\Theta \Leftrightarrow 1} \lambda^{\frac{n-1}{2}} \end{aligned} \quad (3.36)$$

wieder mit  $\Theta = D \Leftrightarrow (n \Leftrightarrow 1)$ . Wir dividieren beide Seiten durch  $\lambda^{\frac{D}{2}}$  und erhalten

$$\begin{aligned} \left| \frac{R(\lambda)}{\lambda^{\frac{D}{2}}} \right| &\leq \left( c_n |\Omega|_n \frac{2^{q_0 n} \Leftrightarrow 1}{2^n \Leftrightarrow 1} + c_n \mathcal{M}^\bullet \frac{2^{q_0 D} \Leftrightarrow 1}{2^D \Leftrightarrow 1} \right) \lambda^{-\frac{D}{2}} \\ &+ \left( c_n |\Omega|_n (2^{q_0} \Leftrightarrow 1) + c_n \mathcal{M}^\bullet \frac{2^{q_0 \Theta} \Leftrightarrow 1}{2^\Theta \Leftrightarrow 1} \right) \lambda^{\frac{n-1-D}{2}} \rightarrow 0 \quad \text{für } \lambda \rightarrow \infty, \end{aligned} \quad (3.37)$$

da  $n \Leftrightarrow 1 < D < n$  und  $q_0 = q_0(\delta_2)$  fest. Es gilt somit  $R(\lambda) = o(\lambda^{D/2})$ , für  $\lambda \rightarrow +\infty$ . Für die Zustandszahlfunktion  $\mathcal{N}$  bedeutet dies:

$$\begin{aligned} \mathcal{N}(\lambda) \Leftrightarrow \Phi(\lambda) &\geq T(\lambda) \Leftrightarrow \Phi(\lambda; \omega_p) \\ &\geq \mathcal{M}^\bullet \sum_{q=-\infty}^p 2^{qD} (\mathcal{N}_0(\lambda; Q^q) \Leftrightarrow \Phi(\lambda; Q^q)) \Leftrightarrow \sum_{q=p+1}^{\infty} (\#I_q) \Phi(\lambda; Q^q) + o(\lambda^{\frac{D}{2}}) \\ &\geq \mathcal{M}^\bullet \left( \sum_{q=-\infty}^p 2^{qD} (\mathcal{N}_0(\lambda; Q^q) \Leftrightarrow \Phi(\lambda; Q^q)) \Leftrightarrow \sum_{q=p+1}^{\infty} 2^{qD} \Phi(\lambda; Q^q) \right) + o(\lambda^{\frac{D}{2}}) \\ &= \mathcal{M}^\bullet \sum_{q=-\infty}^{\infty} 2^{qD} (\mathcal{N}_0(\lambda; Q^q) \Leftrightarrow \Phi(\lambda; Q^q)) + o(\lambda^{\frac{D}{2}}), \quad \text{für } \lambda \rightarrow \infty, \end{aligned} \quad (3.38)$$

da  $\mathcal{N}_0(\lambda; Q^q) = 0$  für alle  $q > p$ . Sei nun  $\mathcal{K}_n(r) = \#\{(q_1, \dots, q_n) \in \mathbb{N}^n : \sum_{i=1}^n q_i^2 \leq r^2\}$ , d.h.  $\mathcal{K}_n(r)$  gebe die Zahl der Gitterpunkte (Vektoren mit ganzzahligen Komponenten) im positiven Quadranten einer  $n$ -dimensionalen Kugel im Ursprung mit Radius  $r$  an. Wegen

$$\mathcal{N}_0(\lambda; Q^q) = \mathcal{K}_n(\epsilon_q \sqrt{\lambda}/\pi) \quad \text{und} \quad \Phi(\lambda; Q^q) = \frac{\mathcal{B}_n}{(2\pi)^n} |Q^q| \lambda^{\frac{n}{2}} = \frac{\mathcal{B}_n}{(2\pi)^n} 2^{-nq} \lambda^{\frac{n}{2}}, \quad (3.39)$$

sowie der Substitution

$$2^x := \frac{\sqrt{\lambda}}{\pi}, \quad (3.40)$$



also  $\pi^{-D} \lambda^{D/2} = 2^{Dx}$  läßt sich die Abschätzung für  $\mathcal{N}(\lambda) \Leftrightarrow \Phi(\lambda)$  weiter umformen:

$$\mathcal{N}(\lambda) \Leftrightarrow \Phi(\lambda) \geq \mathcal{M}^\bullet \pi^{-D} \lambda^{D/2} \sum_{q=-\infty}^{\infty} 2^{D(q-x)} \left( \mathcal{K}_n(2^{x-q}) \Leftrightarrow \frac{\mathcal{B}_n}{2^n} 2^{n(x-q)} \right) + o(\lambda^{\frac{D}{2}}). \quad (3.41)$$

Wegen  $\mathcal{M}^\bullet = 2^{n-D} (\sqrt{n} + \delta_1)^{n-D} (\mathcal{M}^*(D; , ) + \delta_2) \rightarrow 2^{n-D} n^{\frac{n-D}{2}} \mathcal{M}^*(D; , )$  für  $\delta_1, \delta_2 \rightarrow 0^+$  und damit  $\lambda \rightarrow +\infty$  folgt mit der Funktion

$$p_n(x) = \sum_{q=-\infty}^{\infty} 2^{D(q-x)} \left( \frac{\mathcal{B}_n}{2^n} 2^{n(x-q)} \Leftrightarrow \mathcal{K}_n(2^{x-q}) \right) \quad (3.42)$$

und  $x = \ln(\sqrt{\lambda}/\pi)/\ln 2 = (\ln \lambda \Leftrightarrow 2 \ln \pi)/(2 \ln 2)$  die Behauptung des Satzes.  $\square$

*Bemerkungen.* Die Funktion  $p_n$  ist eine positive, beschränkte, 1-periodische Funktion. Die Beschränktheit folgt mit

$$p = \max\{q \in \mathbb{Z} : \sqrt{n} \leq 2^{x-q}\} = \left\lceil \frac{\ln 2^x \Leftrightarrow \ln \sqrt{n}}{\ln 2} \right\rceil, \quad (3.43)$$

da dann  $\mathcal{K}(2^{x-q})$  für alle  $q > p$  verschwindet und wegen  $0 \leq \mathcal{B}_n 2^{n(x-q-1)} \Leftrightarrow \mathcal{K}_n(2^{x-q}) \leq c_n \pi^{n-1} 2^{(x-q)(n-1)}$  (Lemma 3.10) dann

$$\begin{aligned} 0 \leq p_n(x) &= \sum_{q=-\infty}^p 2^{D(q-x)} \left( \frac{\mathcal{B}_n}{2^n} 2^{n(x-q)} \Leftrightarrow \mathcal{N}_n(2^{x-q}) \right) + \frac{\mathcal{B}_n}{2^n} \sum_{q=p+1}^{\infty} 2^{D(q-x)} 2^{n(x-q)} \\ &\leq c_n \pi^{n-1} 2^{-\Theta x} \sum_{q=-\infty}^p 2^{p\Theta} + \frac{\mathcal{B}_n}{2^n} 2^{x(n-D)} \sum_{q=p+1}^{\infty} 2^{q(D-n)} \\ &= c_n \pi^{n-1} \frac{2^{\Theta(p-x)}}{1 \Leftrightarrow 2^{-\Theta}} + \frac{\mathcal{B}_n}{2^n} \frac{2^{(n-D)(x-p-1)}}{1 \Leftrightarrow 2^{D-n}} \\ &\leq c_n \pi^{n-1} n^{-\frac{\Theta}{2}} \frac{1}{1 \Leftrightarrow 2^{-\Theta}} + \frac{\mathcal{B}_n}{2^n} n^{\frac{n-D}{2}} \frac{1}{1 \Leftrightarrow 2^{D-n}}, \end{aligned} \quad (3.44)$$

aufgrund von  $x \Leftrightarrow \ln \sqrt{n}/\ln 2 \Leftrightarrow 1 \leq p \leq x \Leftrightarrow \ln \sqrt{n}/\ln 2$  und mit  $\Theta = D \Leftrightarrow (n \Leftrightarrow 1)$ .

Der Graph der Funktion  $p_n$  ist fraktal. Dies deuten die Beispiele in den Abbildungen 3.2 und 3.3 an. Für die weitere Diskussion verweisen wir an dieser Stelle auf die nachfolgenden Abschnitte. Das Auftreten einer Funktion mit fraktalem Graph im zweiten Term der Abschätzung (3.10), führt zu der Frage, ob es tatsächlich Modellsysteme gibt, die in der asymptotischen Entwicklung der Zustandszahlfunktion einen Ausdruck enthalten, dessen Graph fraktal ist. Diese Fragestellung kann in der Tat bejaht werden, und mit ihr werden wir uns nun auseinandersetzen.

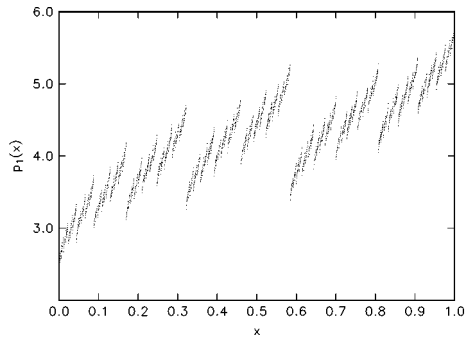


Abbildung 3.2: Funktion  $p_1$  für  $n = 1$  und  $D = 0.5$ .

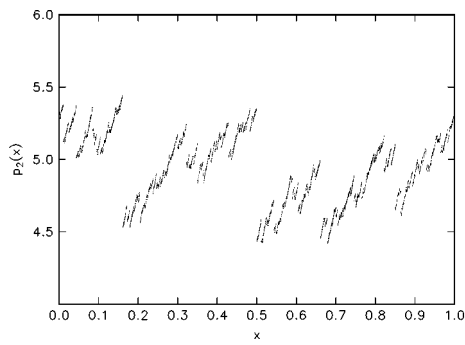


Abbildung 3.3: Funktion  $p_2$  für  $n = 2$  und  $D = 1.5$ .

## 3.2 Selbstähnliche Fraktale

Wir werden in diesem Abschnitt die Zustandszahlfunktion des Eigenwertproblems (3.1) für selbstähnliche  $n$ -dimensionale Gebiete mit fraktalem Rand untersuchen, die jeweils aus einem genügend glatten Grundgebiet unterschiedlicher Skalierung zusammengesetzt sind. Wir beginnen mit dem generischen Fall und betrachten dann als Spezialfall die Schwingungen einer CANTOR-ähnlichen Saite in den Abschnitten 3.2.5f. Konkrete Modellsysteme sind in Anhang B aufgeführt. Dort behandeln wir u.a. die Triadische CANTOR-Saite, das Gegenbeispiel von J. BROSSARD und R. CARMONA, sowie die schon aus der Einleitung bekannte SIERPINSKI-Pfeilspitzenmembran. Als dreidimensionale Beispiele betrachten wir den Würfelschwamm und den simplizialen Tetraederschwamm.

### 3.2.1 Vorbetrachtungen

Wir veranschaulichen die folgenden Ausführungen an der Sierpinski-Pfeilspitzenmembran. Diese besteht aus der disjunkten Vereinigung von  $3^{i-1}$  gleichseitigen Dreiecken mit der Seitenlänge  $2^{-i}$  ( $i \in \mathbb{N}$ ). Es handelt sich dabei um ein streng selbstähnliches Fraktal im Sinne von Definition 1.4.13, so daß der Rand die MINKOWSKI-Dimension  $D = \ln N / \ln \frac{1}{r}$  mit  $N = 3$  und  $r = 1/2$  besitzt. Es sei nun  $\omega$  ein gleichseitiges Dreieck mit der Seitenlänge 1 und  $\Omega$  die SIERPINSKI-Pfeilspitzenmembran;  $\mathcal{N}(\lambda; \cdot)$  bezeichne wie üblich die Zustandszahlfunktion des betreffenden Gebietes bezüglich des Eigenwertproblems (3.1). Dann muß aufgrund der Additivität der Zustandszahlfunktion (Lemma 1.3.5) und dem Skalenverhalten von  $\mathcal{N}$ —dies besagt  $\mathcal{N}(\lambda; rA) = \mathcal{N}(r^2\lambda; A)$  für ein beliebiges beschränktes Gebiet  $A$  mit  $r \in \mathbb{R}^+$ —a priori für die Zustandszahlfunktion  $\mathcal{N}(\lambda; \Omega)$  der SIERPINSKI-Pfeilspitzenmembran die Funktionalgleichung

$$\mathcal{N}(\lambda; \Omega) = N \mathcal{N}(\lambda; r\Omega) + n_0 N \mathcal{N}(\lambda; r\omega) = N \mathcal{N}(r^2\lambda; \Omega) + n_0 N \mathcal{N}(r^2\lambda; \omega) \quad (3.45)$$

mit  $n_0 = 1/3$  erfüllt sein (Abbildung 3.4). Das Skalenverhalten von  $\mathcal{N}$  folgt dabei aus der Eigenschaft, daß  $\lambda$  genau dann ein Eigenwert des Problems (3.1) bezüglich des Gebietes  $A$  darstellt, wenn  $r^{-2}\lambda$  ein entsprechender Eigenwert bezüglich  $rA$  ist. Um in Einklang mit den in Abschnitt 3.2.2 auftretenden Konstanten zu sein, haben wir auf der rechten Seite von (3.45) den Faktor  $n_0 N$  eingefügt, der bei der SIERPINSKI-Pfeilspitzenmembran gleich Eins ist.

(3.45) stellt eine inhomogene Funktionalgleichung mit der Inhomogenität  $n_0 \mathcal{N}(r^2\lambda; \omega)$  dar. Die Lösung setzt sich daher additiv zusammen aus der allgemeinen Lösung der homogenen und einer speziellen Lösung der inhomogenen Funktionalgleichung.

Wir setzen im folgenden voraus, daß die Zustandszahlfunktionen  $\mathcal{N}(\lambda; \Omega)$  und  $\mathcal{N}(\lambda; \omega)$  asymptotische Entwicklungen in  $\lambda$  besitzen, d.h.

$$\mathcal{N}(\lambda; \omega) \sim \sum_{\nu \in \sigma} a_\nu \lambda^\nu \quad \text{bzw.} \quad \mathcal{N}(\lambda; \Omega) \sim \sum_{\mu \in \Sigma} A_\mu \lambda^\mu. \quad (3.46)$$

Wir setzen diese Entwicklungen in die Funktionalgleichung (3.45) ein und erhalten

$$\sum_{\mu \in \Sigma} A_\mu (1 \Leftrightarrow N r^{2\mu}) \lambda^\mu = n_0 N \sum_{\nu \in \sigma} a_\nu r^{2\nu} \lambda^\nu. \quad (3.47)$$

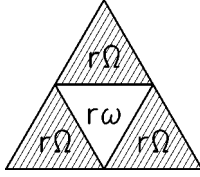


Abbildung 3.4: Veranschaulichung der Funktionalgleichung  $N(\lambda; \Omega) = N N(\lambda; r\Omega) + n_0 N N(\lambda; r\omega)$  anhand der SIERPINSKI-Pfeilspitzenmembran.

Als Lösung des homogenen Systems ( $\mu \in \Sigma$ ,  $\mu \notin \sigma$ ) bekommen wir

$$1 \Leftrightarrow N r^{2\mu} = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \mu = \frac{D}{2} \text{ mit } D = \ln N / \ln \frac{1}{r}. \quad (3.48)$$

Falls  $A_{D/2}$  eine von  $\lambda$  abhängige Funktion ist, muß gelten:  $A_{D/2}(r^2\lambda) = A_{D/2}(\lambda)$ , was einer logarithmischen Periodizität gleichkommt. Die Lösung des inhomogenen Systems lautet ( $\mu \in \Sigma \cap \sigma$ ):

$$A_\mu(1 \Leftrightarrow N r^{2\mu}) = n_0 N r^{2\mu} a_\mu \quad \Leftrightarrow \quad A_\mu = n_0 \frac{N r^{2\mu}}{1 \Leftrightarrow N r^{2\mu}} a_\mu. \quad (3.49)$$

Bekannt sind die Koeffizienten der Entwicklung von  $N(\lambda; \omega)$  für  $\nu = \frac{n}{2}$  und  $\nu = \frac{n-1}{2}$  (siehe Definition 3.2.1):

$$\mu = \frac{n}{2} \quad \Rightarrow \quad A_{n/2} = n_0 \frac{N r^n}{1 \Leftrightarrow N r^n} \Phi(1; \omega) = \Phi(1; \Omega) \quad (3.50)$$

$$\mu = \frac{n \Leftrightarrow 1}{2} \quad \Rightarrow \quad A_{(n-1)/2} = \Leftrightarrow n_0 \mathcal{C}_{n-1} \frac{N r^{n-1}}{1 \Leftrightarrow N r^{n-1}} = n_0 \mathcal{C}_{n-1} \frac{N r^{n-1}}{N r^{n-1} \Leftrightarrow 1}. \quad (3.51)$$

Auch  $A_{n/2}$  und  $A_{(n-1)/2}$  könnten von  $\lambda$  abhängige Funktionen sein und müßten dann wie  $A_{D/2}$  eine logarithmische Periodizität aufweisen. Dies ist aber, wie wir später sehen werden, nicht der Fall. Wir haben daher folgende Entwicklung der Zustandszahlfunktion für Gebiete mit (streng) selbstähnlichen Rand zu erwarten:

$$\mathcal{N}(\lambda; \Omega) \sim \Phi(\lambda; \Omega) + A_{\frac{D}{2}}(\lambda) \lambda^{\frac{D}{2}} + n_0 \mathcal{C}_{n-1} \frac{N r^{n-1}}{N r^{n-1} \Leftrightarrow 1} \lambda^{\frac{n-1}{2}}, \quad \text{für } \lambda \rightarrow +\infty, \quad (3.52)$$

wobei die Funktion  $A_{D/2}$  die Bedingung  $A_{D/2}(r^2\lambda) = A_{D/2}(\lambda)$  zu erfüllen hat. Diese Entwicklung steht in völligem Einklang mit den Ergebnissen aus Satz 3.2.9 und Korollar 3.2.10. Unabhängig von der Kenntnis des Satzes von LAPIDUS ist also ein zweiter Term der Ordnung  $O(\lambda^{D/2})$  zu erwarten. Aufgabe der nächsten Abschnitte wird es sein, die genaue Struktur von  $A_{D/2}$ , sowie dessen Eigenschaften, zu bestimmen.

### 3.2.2 Der generische Fall

Zur Vereinfachung der Schreibweise definieren wir zunächst eine geschweifte Klammer  $\{\cdot\}_{n,\omega}$ , sowie eine für den zweiten Term der Entwicklung der Zustandszahlfunktion bedeutsame (WEIERSTRASS-ähnliche) Funktion  $f_{n,\omega}$ , die wir in den Abschnitten 3.2.3f diskutieren werden. Wir schreiben die Differenz zwischen dem WEYLSchen Ausdruck und der Zustandszahlfunktion bezüglich des Gebietes  $\omega$ ,  $\Phi(\lambda;\omega) \Leftrightarrow \mathcal{N}(\lambda;\omega)$  als Funktion von  $x = \Phi(\lambda;\omega) = \Phi(1;\omega)\lambda^{n/2}$ , also  $\lambda = (\Phi(1;\omega))^{-2/n}x^{2/n}$  und definieren:

**Definition 3.2.1 (Geschweifte Klammer)** *Es sei  $\omega \subset \mathbb{R}^n$  ( $n \in \mathbb{N}$ ) ein beschränktes offenes Gebiet, so daß für die Zustandszahlfunktion  $\mathcal{N}(\lambda;\omega)$  des Gebietes bezüglich des Eigenwertproblems (3.1) die asymptotische Entwicklung*

$$\mathcal{N}(\lambda;\omega) = \Phi(\lambda;\omega) \Leftrightarrow \mathcal{C}_{n-1}\lambda^{\frac{n-1}{2}} + O(\lambda^\kappa), \quad \text{für } \lambda \rightarrow +\infty \quad (3.53)$$

mit dem WEYLSchen Ausdruck  $\Phi(\lambda;\omega) = \mathcal{B}_n/(2\pi)^n|\omega|_n\lambda^{n/2}$ , sowie den Konstanten  $\mathcal{C}_{n-1} = \frac{1}{4}\mathcal{B}_{n-1}/(2\pi)^{n-1}|\partial\omega|_{n-1}$  und  $0 \leq \kappa \leq \frac{n-1}{2}$  gilt. Dann definieren wir für alle  $x \geq 0$ :

$$\{x\}_{n,\omega} := x \Leftrightarrow [x]_{n,\omega} \quad \text{mit} \quad [x]_{n,\omega} := N((\Phi(1;\omega))^{-\frac{2}{n}}x^{\frac{2}{n}};\omega). \quad (3.54)$$

*Bemerkungen.* Für Gebiete mit  $C^\infty$ -Rand hat PHAM THE LAI Abschätzung (3.53) mit  $\kappa = \frac{n-1}{2}$  gezeigt [47, S. 5f]. Unter einer zusätzlichen Voraussetzung—die Mannigfaltigkeit  $\bar{\Omega}$  besitze nicht zu viele vielfach reflektierende geschlossene Geodäten—konnte V. JA. IVRII zeigen, daß (3.53) mit klein  $o(\lambda^{\frac{n-1}{2}})$  anstatt groß  $O(\lambda^\kappa)$  erfüllt ist [19, S.98f], d.h. ein Oberflächenterm existiert. Falls (3.53) nur mit  $\kappa = \frac{n-1}{2}$  gilt, so wird der Oberflächenterm verdeckt.

Eine Auflistung ausgewählter Gebiete  $\omega$ —wir bezeichnen sie als Grundgebiete—, für die eine obere Schranke der Konstanten  $\kappa$  bekannt ist, zeigt Tabelle 3.1 auf Seite 84.

Die geschweifte Klammer ist unabhängig von der Größe des gewählten Grundgebietes; es gilt  $\{x\}_{n,\alpha\omega} = \{x\}_{n,\omega} \forall \alpha \in \mathbb{R}^+ \forall x \geq 0$ . Aufgrund der Definition von  $\{\cdot\}_{n,\omega}$  folgt nämlich  $\{x\}_{n,\alpha\omega} = x \Leftrightarrow N((\Phi(1;\alpha\omega))^{-2/n}x^{2/n};\alpha\omega) = x \Leftrightarrow N(\alpha^2\alpha^{-2}(\Phi(1;\omega))^{-2/n}x^{2/n};\omega) = \{x\}_{n,\omega}$ .

Mit dieser Definition erfüllt die geschweifte Klammer die beiden folgenden Lemmata:

**Lemma 3.2.2** *Es existieren Konstanten  $C_1, C_2 > 0$ , so daß*

$$|\{x\}_{n,\omega} \Leftrightarrow \mathcal{C}_{n-1}(\Phi(1;\omega))^{-\frac{n-1}{n}}x^{\frac{n-1}{n}}| \leq C_1x^{\frac{2\kappa}{n}} + C_2, \quad \forall x \geq 0. \quad (3.55)$$

*Beweis.* Aufgrund von Gleichung (3.54) gilt

$$\begin{aligned} \{x\}_{n,\omega} &= x \Leftrightarrow \Phi((\Phi(1;\omega))^{-\frac{2}{n}}x^{\frac{2}{n}};\omega) + \mathcal{C}_{n-1}(\Phi(1;\omega))^{-\frac{n-1}{n}}x^{\frac{n-1}{n}} + O(x^{\frac{2\kappa}{n}}) \\ &= \mathcal{C}_{n-1}(\Phi(1;\omega))^{-\frac{n-1}{n}}x^{\frac{n-1}{n}} + O(x^{\frac{2\kappa}{n}}), \quad \text{für } \lambda \rightarrow +\infty. \end{aligned} \quad (3.56)$$

Daher gibt es die Konstanten  $C_1, x_0 > 0$ , so daß

$$|\{x\}_{n,\omega} \Leftrightarrow \mathcal{C}_{n-1}(\Phi(1;\omega))^{-\frac{n-1}{n}}x^{\frac{n-1}{n}}| \leq C_1x^{\frac{2\kappa}{n}}, \quad \forall x \geq x_0. \quad (3.57)$$

Da das Spektrum von  $\Leftrightarrow\Delta$  diskret ist, alle Eigenwerte eine endliche Multiplizität besitzen—der einzige Häufungspunkt ist  $\infty$ —und  $[\cdot]_{n,\omega}$  daher im Intervall  $[0, x_0]$  eine endliche Anzahl von Sprüngen endlicher Größe aufweist, ist  $\{\cdot\}_{n,\omega}$  im Intervall  $[0, x_0]$  beschränkt. Zusammen mit (3.57) folgt daher die Behauptung des Lemmas.  $\square$

**Lemma 3.2.3** *Die Funktion  $\{\cdot\}_{n,\omega} : x \mapsto \{x\}_{n,\omega}$  ist stetig für alle  $x > 0$  bis auf abzählbar unendlich viele Punkte und rechtsseitig stetig für alle  $x \geq 0$ .*

*Beweis.*  $[\cdot]_{n,\omega} : x \mapsto [x]_{n,\omega}$  ist wegen Definition 3.2.1 eine stückweise konstante Funktion und besitzt daher abzählbar unendlich viele Unstetigkeitsstellen.

Die rechtsseitige Stetigkeit von  $\{\cdot\}_{n,\omega}$  folgt unmittelbar aus der rechtsseitigen Stetigkeit von  $[\cdot]_{n,\omega} : x \mapsto [x]_{n,\omega}$  für alle  $x \geq 0$  aufgrund von (3.5).  $\square$

**Definition 3.2.4 (Funktion  $f_{n,\omega}$ )** *Mit  $\{\cdot\}_{n,\omega}$  als der geschweifte Klammer aus Definition 3.2.1, sowie  $N = 2, 3, \dots$  und  $r \in (0, 1)$ , wobei  $Nr^{n-1} > 1$ , definieren wir für alle  $\mu \geq 0$ :*

$$f_{n,\omega}(\mu) := \sum_{i=0}^{\infty} N^{-i} \{r^{-ni} \mu\}_{n,\omega}. \quad (3.58)$$

**Korollar 3.2.5** *Die Reihe in (3.58) ist wegen Lemma 3.2.2 für alle  $\mu \geq 0$  absolut konvergent, und es gilt*

$$f_{n,\omega}(\mu) = \mathcal{C}_{n-1}(\Phi(1; \omega))^{-\frac{n-1}{n}} \frac{Nr^{n-1}}{Nr^{n-1} \Leftrightarrow 1} \mu^{\frac{n-1}{n}} + O(\mu^{\frac{2\kappa}{n}}), \quad \text{für } \mu \rightarrow +\infty \quad (3.59)$$

mit den Konstanten  $\mathcal{C}_{n-1}$  und  $\kappa$  aus Definition 3.2.1.

*Beweis.* Wegen Lemma 3.2.2 gilt  $|\{r^{-ni} \mu\}_{n,\omega} \Leftrightarrow \mathcal{C}_{n-1}(\Phi(1; \omega))^{-\frac{n-1}{n}} r^{-(n-1)i}| \leq C_1 r^{-2\kappa i} + C_2$  für alle  $i \geq 0$ . Daher folgt:

$$\begin{aligned} |f_{n,\omega}(\mu) \Leftrightarrow \mathcal{C}_{n-1}(\Phi(1; \omega))^{-\frac{n-1}{n}} \sum_{i=0}^{\infty} (Nr^{n-1})^{-i} \mu^{\frac{n-1}{n}}| &\leq C_1 \sum_{i=0}^{\infty} (Nr^{2\kappa})^{-i} \mu^{\frac{2\kappa}{n}} + C_2 \sum_{i=0}^{\infty} N^{-i} \\ &= O(\mu^{\frac{2\kappa}{n}}), \quad \text{für } \mu \rightarrow +\infty, \end{aligned} \quad (3.60)$$

da  $Nr^{2\kappa} \geq Nr^{n-1} > 1$  laut Definition von  $f_{n,\omega}$  und wegen  $\kappa \leq \frac{n-1}{2}$ .  $\square$

*Bemerkungen.* Bei der Funktion  $f_{n,\omega}$  handelt es sich um eine WEIERSTRASS-ähnliche Funktion. Um dies zu sehen, betrachten wir  $f_{n,\omega}$  für  $n = 1$  mit dem Grundgebiet  $\omega = (0, 1)$  und schreiben kurz  $f := f_{1,(0,1)}$ . Dann gilt aufgrund der Definition der eckigen Klammer und mit  $\lambda_{i,(0,1)} = i^2 \pi^2$  ( $i \in \mathbb{N}$ ) als den Eigenwerten des LAPLACE-Operators für das Intervall  $(0, 1)$  bei DIRICHLET-Randbedingungen:

$$[x]_{1,(0,1)} = \mathcal{N}(\Phi(1; (0, 1))^{-1}; (0, 1)) = \#\{i \in \mathbb{N} : i^2 \pi^2 \leq \pi^2 x^2\} = [x], \quad (3.61)$$

wobei  $[\nu]$  die größte ganze Zahl einer reellen Zahl  $\nu$  bezeichnet (GAUSS-Klammer). Für  $x \geq 0$  gibt  $\{x\}_{1,(0,1)} = x \Leftrightarrow [x]_{1,(0,1)} =: \{x\}$  daher die Nachkommastellen des betreffenden

Argumentes an.  $\{\cdot\} : x \mapsto \{x\}$  ist eine 1-periodische Funktion. Ersetzen wir in  $f$  die geschweifte Klammer  $\{\cdot\}$  durch ihre FOURIER-Reihe [61, S.363],

$$\{x\} = \frac{1}{2} \Leftrightarrow \frac{1}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin(2\pi nx)}{n}, \quad (3.62)$$

so erhalten wir formal

$$f(\mu) = \frac{1}{2} \frac{N}{N \Leftrightarrow 1} \Leftrightarrow \frac{1}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{w_{r^{-n}}(2\pi n\mu)}{n} \quad (3.63)$$

mit der Standard-WEIERSTRASS-Funktion  $w$ , gegeben durch

$$w(t) = \sum_{i=0}^{\infty} N^{-i} \sin(r^{-i}t). \quad (3.64)$$

Diese Funktion besitzt die interessante Eigenschaft überall stetig, aber nirgends differenzierbar zu sein und wurde von K. WEIERSTRASS 1872 angegeben [4].

Neben der Funktion  $f_{n,\omega}$  spielt für die Zustandszahlfunktion der in diesem Abschnitt betrachteten Klasse von Gebieten eine weitere Funktion eine wichtige Rolle:

**Definition 3.2.6 (Funktion  $g_{n,\omega}$ )** Mit  $N = 2, 3, \dots$  und  $r \in (0, 1)$ , wobei  $Nr^{n-1} > 1$ , definieren wir für alle  $x \geq 0$ :

$$g_{n,\omega}(x) := \sum_{i=-\infty}^{\infty} N^{i-x} \{r^{n(i-x)}\}_{n,\omega}. \quad (3.65)$$

Über den Zusammenhang der Funktionen  $g_{n,\omega}$  und  $f_{n,\omega}$  gibt der nachfolgende Satz Auskunft:

**Satz 3.2.7** Für alle  $\lambda > 0$  gilt:

$$g_{n,\omega} \left( \frac{\ln \Phi(\lambda; \omega)}{\ln \frac{1}{r^n}} \right) = f_{n,\omega}(\mu) \mu^{-\frac{D}{n}} + \frac{Nr^n}{1 \Leftrightarrow Nr^n} \mu^{1-\frac{D}{n}}, \quad (3.66)$$

wobei

$$\mu = \Phi(r^{2I(\lambda)} \lambda; \omega) \quad \text{und} \quad I(\lambda) = \max\{i \in \mathbb{Z} : N(r^{2i} \lambda; \omega) > 0\} = \lceil \ln(\lambda_0/\lambda) / (2 \ln r) \rceil \quad (3.67)$$

mit  $\lambda_0$  als dem kleinsten Eigenwert des LAPLACE-Operators bezüglich des Gebietes  $\omega$  bei DIRICHLET-Randbedingungen.

*Beweis.* Es sei  $J(x) := \max\{i \in \mathbb{Z} : \mathcal{N}((\Phi(1; \omega))^{-2/n} r^{2(i-x)}; \omega) > 0\}$ . Dann können wir die Reihe in (3.65) in zwei Beiträge aufspalten und erhalten mit der Definition von  $f_{n,\omega}$ :

$$\begin{aligned} g_{n,\omega}(x) &= \sum_{i=-\infty}^{J(x)} N^{i-x} \{r^{n(i-x)}\}_{n,\omega} + \sum_{i=J(x)+1}^{\infty} N^{i-x} r^{n(i-x)} \\ &= N^{J(x)-x} \sum_{j=0}^{\infty} N^{-j} \{r^{n(J(x)-x-j)}\}_{n,\omega} + \frac{Nr^n}{1 \Leftrightarrow Nr^n} (Nr^n)^{J(x)-x} \\ &= N^{J(x)-x} f_{n,\omega}(r^{n(J(x)-x-j)}) + \frac{Nr^n}{1 \Leftrightarrow Nr^n} (Nr^n)^{J(x)-x}, \end{aligned} \quad (3.68)$$



wobei wir die neue Summationsvariable  $j = J(x) \Leftrightarrow i$  eingeführt haben. Um das Argument der Funktion  $f_{n,\omega}$  zu vereinfachen, setzen wir  $\mu := r^{n(J(x)-x)}$  und erhalten mit  $D := \ln N / \ln \frac{1}{r}$ :

$$g_{n,\omega}(x) = f_{n,\omega}(\mu)\mu^{-\frac{D}{n}} + \frac{Nr^n}{1 \Leftrightarrow Nr^n}\mu^{1-\frac{D}{n}}. \quad (3.69)$$

Das Argument in der Zustandszahlfunktion bei der Definition von  $J$  können wir ebenfalls vereinfachen, wenn wir  $(\Phi(1;\omega))^{-2/n}r^{-2x} =: \lambda$  setzen. Dann folgt nämlich wegen  $r^{-nx} = \Phi(\lambda;\omega)$ :

$$J\left(\frac{\ln \Phi(\lambda;\omega)}{\ln \frac{1}{r^n}}\right) = \max\{i \in \mathbb{Z} : \mathcal{N}(r^{2i}\lambda;\omega) > 0\} =: I(\lambda). \quad \square \quad (3.70)$$

*Bemerkungen.* Wir veranschaulichen uns den Zusammenhang zwischen  $\mu$  und  $\lambda$ . Es gilt

$$\mu = \Phi(r^{2I(\lambda)}\lambda;\omega) = r^{-n\{\ln(\lambda_0/\lambda)/\ln(2\ln r)\}}\Phi(\lambda_0;\omega) \quad (3.71)$$

Daher gilt für  $\mu$  die Abschätzung

$$\mu_{\min} := \Phi(\lambda_0;\omega) \leq \mu < \Phi(r^{-2}\lambda_0;\omega) =: \mu_{\max}. \quad (3.72)$$

Der Zusammenhang zwischen  $\mu$  und  $\lambda$  ist in Abbildung 3.5 dargestellt.

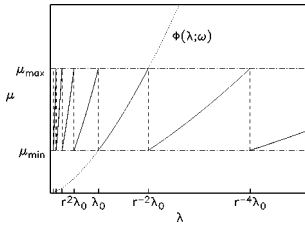


Abbildung 3.5:  $\mu = \Phi(r^{2I(\lambda)}\lambda;\omega)$ .

Wir formulieren nun einen Satz über die MINKOWSKI-Dimension der in diesem Abschnitt betrachteten Klasse von Gebieten:

**Satz 3.2.8 (Minkowskidimension)** *Es sei  $\omega \subset \mathbb{R}^n$  ( $n \in \mathbb{N}$ ) ein beschränktes offenes Gebiet im Sinne von Definition 3.2.1. Desweiteren seien  $N = 2, 3, \dots$  und  $r \in (0, 1)$  beliebig, aber fest, so daß  $Nr^{n-1} > 1$ .  $n_0 \in \mathbb{Q}$  sei so gewählt, daß  $n_0N^i \in \mathbb{N}$  für alle  $i \in \mathbb{N}$ . Sei nun  $\Omega \subset \mathbb{R}^n$  ein offenes Gebiet mit beschränktem LEBESGUESchen Maß, welches aus  $n_0N^i$  ( $i \in \mathbb{N}$ ) paarweise disjunkten Kopien des Gebietes  $\Omega_i = r^i\omega$  besteht:*

$$\Omega := \bigcup_{i \in \mathbb{N}} \biguplus_{\nu=1}^{n_0N^i} \Omega_i = \bigcup_{i \in \mathbb{N}} \biguplus_{\nu=1}^{n_0N^i} r^i\omega. \quad (3.73)$$

Dann ist der obere MINKOWSKI-Inhalt des Randes  $\partial\Omega$  bezüglich  $\Omega$  endlich, wobei

$$D = D(\partial\Omega, \Omega) = \frac{\ln N}{\ln \frac{1}{r}} \quad (3.74)$$

die Minkowskidimension des Randes bezüglich  $\Omega$  darstellt.

*Beweis.* Zur Bestimmung der Minkowskidimension des Randes  $\partial\Omega$  bezüglich  $\Omega$  sei mit  $\epsilon_0 = \min\{\epsilon > 0 : |\partial\omega_\epsilon \cap \omega| = |\omega|\}$  für beliebiges, aber genügend kleines  $\epsilon > 0$ :

$$\begin{aligned} i_0(\epsilon) &= \max\{i \geq 1 : |(\cdot, \cdot)_\epsilon \cap \Omega| \leq |\Omega_i|\} = \max\{i \geq 1 : |\partial\omega_{\epsilon/r^i} \cap \omega| \leq r^{ni}|\omega|\} \\ &= \max\{i \geq 1 : \epsilon \leq r^i\epsilon_0\} = \left\lfloor \frac{\ln \epsilon/\epsilon_0}{\ln r} \right\rfloor = \frac{\ln \epsilon/\epsilon_0}{\ln r} \Leftrightarrow \left\{ \frac{\ln \epsilon/\epsilon_0}{\ln r} \right\}. \end{aligned} \quad (3.75)$$

Dann gilt aufgrund

$$|(\cdot, \cdot)_\epsilon \cap \Omega| = \begin{cases} r^{ni}|\partial\omega_{\epsilon/r^i} \cap \omega| & \text{für } i \leq i_0(\epsilon) \\ r^{ni}|\omega| & \text{für } i > i_0(\epsilon) \end{cases} \quad (3.76)$$

für die innere  $\epsilon$ -Umgebung von  $\partial\Omega$ :

$$|(\cdot, \cdot)_\epsilon \cap \Omega| = n_0 \sum_{i=1}^{\infty} N^i |(\cdot, \cdot)_\epsilon \cap \Omega| = n_0 \sum_{i=1}^{i_0(\epsilon)} (Nr^n)^i |\partial\omega_{\epsilon/r^i} \cap \omega| + n_0 |\omega| \sum_{i>i_0(\epsilon)} (Nr^n)^i. \quad (3.77)$$

Zu  $\epsilon > 0$  beliebig, aber fest sei nun  $\{Q_\zeta\}_{\zeta \in \mathbb{Z}}$  eine Pflasterung des  $\mathbb{R}^n$  im Sinne von Definition 1.4.4 und  $K(\epsilon) = \{\zeta \in \mathbb{Z}^n : \overline{Q_\zeta} \cap \partial\omega \neq \emptyset\}$ . Dann folgt mit Lemma 1.4.5:

$$|\partial\omega_\epsilon \cap \omega| \leq |\partial\omega_\epsilon| \leq c_1 \#K(\epsilon) \epsilon^n, \quad \forall \epsilon \geq 0 \quad (3.78)$$

mit  $c_1 > 3^n$  beliebig, aber fest. Aufgrund  $\tilde{D}(\partial\omega) = D(\partial\omega) = n \Leftrightarrow 1$  und Lemma 1.4.5 folgt, daß es ein  $\epsilon_1 \in (0, 1)$ , sowie eine Konstante  $c_2 > \sqrt{n}$  gibt, so daß  $\#K(\epsilon) \leq c_2 \epsilon^{-(n-1)}$ ,  $\forall \epsilon \leq \epsilon_1$ . Zusammengefaßt bedeutet dies:  $|\partial\omega_\epsilon| \leq c\epsilon$ ,  $\forall \epsilon \leq \epsilon_1$  mit  $c = c_1 c_2$ , bzw.

$$|\partial\omega_{\epsilon/r^i} \cap \omega| \leq c\epsilon/r^i, \quad \forall \epsilon \leq r^i \epsilon_1. \quad (3.79)$$

Daher sei  $i_1(\epsilon) := \max\{i \geq 1 : \epsilon \leq r^i \epsilon_1\} = \lceil \ln(\epsilon/\epsilon_1)/\ln r \rceil$ . Wir können  $\epsilon_1 \leq \epsilon_0$  annehmen, so daß  $i_1(\epsilon) \leq i_0(\epsilon)$ ,  $\forall \epsilon \leq \epsilon_1$ . Wir erhalten daher die beiden Abschätzungen

$$\begin{aligned} |(\cdot, \cdot)_\epsilon \cap \Omega| &\geq n_0 |\omega| \frac{Nr^n}{1 \Leftrightarrow Nr^n} (Nr^n)^{i_0(\epsilon)} = n_0 |\omega| \frac{Nr^n}{1 \Leftrightarrow Nr^n} (\epsilon/\epsilon_0)^{n + \frac{\ln N}{\ln r}} (Nr^n)^{-\{ \cdot \}} \\ &\geq m_1 \epsilon^{n + \frac{\ln N}{\ln r}}, \quad \forall \epsilon \leq \epsilon_1 \end{aligned} \quad (3.80)$$

mit  $m_1 = n_0 |\omega| Nr^n / (1 \Leftrightarrow Nr^n) \epsilon_0^{-n - \ln N / \ln r}$  und

$$\begin{aligned} |(\cdot, \cdot)_\epsilon \cap \Omega| &= cn_0 \sum_{i=1}^{i_1(\epsilon)} (Nr^{n-1})^i \epsilon + n_0 |\omega| \sum_{i=i_1(\epsilon)+1}^{\infty} (Nr^n)^i \\ &= cn_0 \frac{(Nr^{n-1})^{i_1(\epsilon)} \Leftrightarrow 1}{Nr^{n-1} \Leftrightarrow 1} \epsilon + n_0 |\omega| \frac{Nr^n}{1 \Leftrightarrow Nr^n} (Nr^n)^{i_1(\epsilon)} \\ &\leq m_2 \epsilon^{n + \frac{\ln N}{\ln r}}, \quad \forall \epsilon \leq \epsilon_1 \end{aligned} \quad (3.81)$$

mit  $m_2 = cn_0Nr^{n-1}/(Nr^{n-1} \Leftrightarrow 1) + n_0|\omega|Nr^n/(1 \Leftrightarrow Nr^n)\epsilon_1^{-n-\ln N/\ln r}$ , da  $Nr^{n-1} > 1$  vorausgesetzt wurde. Es existieren daher die Konstanten  $m_1, m_2 > 0$  und ein  $\epsilon_1 > 0$ , so daß

$$m_1\epsilon^{d+\frac{\ln N}{\ln r}} \leq \epsilon^{-(n-d)}|_{\epsilon} \cap \Omega| \leq m_2\epsilon^{d+\frac{\ln N}{\ln r}}, \quad \forall \epsilon \leq \epsilon_1. \quad (3.82)$$

Es sei  $d > \ln N/\ln \frac{1}{r}$ . Dann folgt:

$$\mathcal{M}^*(d; , ) = \limsup_{\epsilon \rightarrow 0^+} \epsilon^{-(n-d)}|_{\epsilon} \cap \Omega| \leq m_2 \limsup_{\epsilon \rightarrow 0^+} \epsilon^{d+\frac{\ln N}{\ln r}} = 0. \quad (3.83)$$

Umgekehrt sei  $d < \ln N/\ln \frac{1}{r}$ . In diesem Fall gilt

$$\mathcal{M}_*(d; , ) = \liminf_{\epsilon \rightarrow 0^+} \epsilon^{-(n-d)}|_{\epsilon} \cap \Omega| \geq m_2 \liminf_{\epsilon \rightarrow 0^+} \epsilon^{d+\frac{\ln N}{\ln r}} = +\infty. \quad (3.84)$$

Daher folgt aufgrund Definition 1.4.1(a):

$$D = D(, ) = \ln N/\ln \frac{1}{r}, \quad (3.85)$$

und es gilt  $0 < m_1 \leq \mathcal{M}_*(D; , ) \leq \mathcal{M}^*(D; , ) \leq m_2 < +\infty$ .  $\square$

*Bemerkung.* Die Voraussetzungen von Satz 3.1.1 (Satz von LAPIDUS für den LAPLACE-Operator bei DIRCHLET-Randbedingungen) sind daher erfüllt. d.h. für die Zustandszahlfunktion  $\mathcal{N}$  bezüglich  $\Omega$  gilt  $\mathcal{N}(\lambda) = \Phi(\lambda) + O(\lambda^{D/2})$ , für  $\lambda \rightarrow +\infty$ .

**Satz 3.2.9 (Zustandszahlfunktion)** *Die Voraussetzungen von Satz 3.2.8 seien erfüllt. Dann gilt mit  $D = \ln N/\ln \frac{1}{r}$  für die Zustandszahlfunktion  $\mathcal{N}(\lambda; \Omega)$  bezüglich des Eigenwertproblems (3.1) für alle  $\lambda > 0$  die Identität*

$$\mathcal{N}(\lambda; \Omega) = \Phi(\lambda; \Omega) \Leftrightarrow n_0 (\Phi(1; \omega))^{\frac{D}{n}} g_{n,\omega} \left( \frac{\ln \Phi(\lambda; \omega)}{\ln \frac{1}{r^n}} \right) \lambda^{\frac{D}{2}} + n_0 f_{n,\omega}(\Phi(\lambda; \omega)), \quad (3.86)$$

wobei die Funktion  $g_{n,\omega}$  durch Definition 3.2.6, die Funktion  $f_{n,\omega}$  durch Definition 3.2.4 gegeben ist.

**Korollar 3.2.10** *Es gilt wegen Korollar 3.2.5:*

$$f_{n,\omega}(\Phi(\lambda; \omega)) = \mathcal{C}_{n-1} \frac{Nr^{n-1}}{Nr^{n-1} \Leftrightarrow 1} \lambda^{\frac{n-1}{2}} + O(\lambda^\kappa), \quad \text{für } \lambda \rightarrow \infty \quad (3.87)$$

mit den Konstanten  $\mathcal{C}_{n-1}$  und  $\kappa$  aus Definition 3.2.1.

**Korollar 3.2.11** *Die Zustandszahlfunktion (3.86) erfüllt die Funktionalgleichung*

$$\mathcal{N}(\lambda; \Omega) = N \mathcal{N}(r^2\lambda; \Omega) + n_0 N \mathcal{N}(r^2\lambda; \omega), \quad \forall \lambda > 0. \quad (3.88)$$

*Bemerkungen.* Die Beschränktheit von  $|\Omega|_n$  gilt genau dann, wenn  $Nr^n < 1$ , da mit  $n_0 \neq 0$  die geometrische Reihe  $\sum_{i=1}^{\infty} |\Omega_i|_n = n_0|\omega| \sum_{i=1}^{\infty} (Nr^n)^i$  genau dann konvergent ist, wenn  $Nr^n < 1$ .

Wie man leicht sieht, ist  $g_{n,\omega} : x \mapsto g_{n,\omega}(x)$  eine in  $x$  1-periodische Funktion, die nicht konstant ist. Daher ist  $\mathcal{F} : \lambda \mapsto g_{n,\omega}(\ln \Phi(\lambda; \omega) / \ln(1/r^n))$  eine in  $\ln \lambda$  periodische Funktion, und es existiert *kein* zweiter Term der asymptotischen Entwicklung im Sinne von Konstante  $\times \lambda^{D/2}$ . Wir können den gewonnenen zweiten Term jedoch als zweiten Term einer *schwach* asymptotischen Entwicklung verstehen in Anlehnung an die Schreibweise  $\Phi(\lambda) \Leftrightarrow \mathcal{N}(\lambda) \approx \lambda^{\frac{D}{2}}$ .

Konkrete Modellsysteme behandeln wir in Anhang B. Abbildungen der Zustandzahlfunktionen zu diesen Modellsystemen mit eingezeichneter Näherung aus Gleichung (3.86) sind in Anhang B.8 ab Seite 110 zusammengestellt. Abbildungen der Funktionen  $f_{n,\omega}$  und  $g_{n,\omega}$  folgen dann in Anhang B.9.

*Beweis von Satz 3.2.9.* Aufgrund der Summationseigenschaft und dem Skalenverhalten von  $\mathcal{N}$  folgt für die Zustandzahlfunktion des Gebietes  $\Omega$ :

$$\mathcal{N}(\lambda; \Omega) = n_0 \sum_{i=1}^{\infty} N^i \mathcal{N}(\lambda; r^i \omega) = n_0 \sum_{i=1}^{\infty} N^i \mathcal{N}(r^{2i} \lambda; \omega). \quad (3.89)$$

Mit  $\lambda_0$  als dem kleinsten Eigenwert des LAPLACE-Operators bezüglich des Gebietes  $\omega$  bei DIRICHLET-Randbedingungen setzen wir für alle  $\lambda > \lambda_0/r^2$ :  $I = I(\lambda) = \max\{i \in \mathbb{N} : N(r^{2i} \lambda; \omega) > 0\}$ . Wenn wir dann  $\mathcal{N}(r^{2i} \lambda; \omega) = 0$  für alle  $i > I(\lambda)$  anwenden und die Äquivalenz  $\Phi(r^{2i} \lambda; \omega) = y \Leftrightarrow r^{2i} \lambda = (\Phi(1; \omega))^{-2/n} y^{2/n}$ , sowie Definition 3.2.1 beachten, bekommen wir für die Zustandzahlfunktion:

$$\mathcal{N}(\lambda; \Omega) = n_0 \sum_{i=1}^{I(\lambda)} N^i \mathcal{N}(r^{2i} \lambda; \omega) = n_0 (S_2(\lambda) \Leftrightarrow S_1(\lambda)) \quad (3.90)$$

mit den beiden Summen

$$S_1(\lambda) = \sum_{i=1}^{I(\lambda)} N^i \{\Phi(r^{2i} \lambda; \omega)\}_{n,\omega} \quad \text{und} \quad S_2(\lambda) = \sum_{i=1}^{I(\lambda)} (Nr^n)^i \Phi(\lambda; \omega). \quad (3.91)$$

Wir führen nun die neue Summationsvariable  $j = I \Leftrightarrow i$  eine und erhalten mit der Substitution  $\mu := \Phi(r^{2I} \lambda; \omega) = r^{nI} \Phi(1; \omega) \lambda^{\frac{n}{2}}$ , also  $N^I = r^{-ID} = (\Phi(1; \omega))^{D/n} \mu^{-D/n} \lambda^{D/2}$ :

$$S_1(\lambda) = N^I \sum_{j=0}^{I-1} N^{-j} \{r^{-nj} \mu\}_{n,\omega} = (\Phi(1; \omega))^{\frac{D}{n}} f_{n,\omega}^I(\mu) \mu^{-\frac{D}{n}} \lambda^{\frac{D}{2}}, \quad (3.92)$$

wobei  $f_{n,\omega}^I(\mu)$  durch die ersten  $I$  Summanden der Funktion  $f_{n,\omega}$ , also

$$f_{n,\omega}^I(\mu) = \sum_{i=0}^{I-1} N^{-i} \{r^{-ni} \mu\}_{n,\omega} \quad (3.93)$$

gegeben ist. Es gilt offensichtlich  $I(\lambda) \rightarrow +\infty$  für  $\lambda \rightarrow +\infty$ . Daher schätzen wir die Differenz zwischen der Funktion  $f_{n,\omega}$  aus Definition 3.2.4 und  $f_{n,\omega}^I$  mit Lemma 3.2.2 ab:

$$|f_{n,\omega}(\mu) \Leftrightarrow f_{n,\omega}^I(\mu)| \leq \sum_{i=I}^{\infty} N^{-i} (C_1 r^{-(n-1)i} \mu^{\frac{n-1}{n}} + C_2) = O\left(\frac{1}{(Nr^{n-1})^I} + \frac{1}{N^I}\right) \rightarrow 0, \quad (3.94)$$

für  $\lambda \rightarrow +\infty$ , da  $\mu < \mu_{\max}$  und  $Nr^{n-1} > 1$  laut Voraussetzung. Das asymptotische Verhalten von  $f_{n,\omega}^I(\mu)$  für  $\lambda \rightarrow +\infty$  wird daher durch  $f_{n,\omega}(\mu)$  beschrieben. Wir ersetzen  $f_{n,\omega}^I$  durch  $f_{n,\omega}$ :

$$S_1(\lambda) = (\Phi(\lambda; \omega))^{\frac{D}{n}} f_{n,\omega}(\mu) \mu^{-\frac{D}{n}} \lambda^{\frac{D}{2}} \Leftrightarrow A(\lambda) \quad (3.95)$$

mit

$$\begin{aligned} A(\lambda) &= N^I \sum_{i=I}^{\infty} N^{-i} \{r^{-ni} \mu\}_{n,\omega} = \sum_{i=I}^{\infty} N^{I-i} \{r^{n(I-i)} \Phi(\lambda; \omega)\}_{n,\omega} \\ &= \sum_{j=0}^{\infty} N^{-j} \{r^{-nj} \Phi(\lambda; \omega)\}_{n,\omega} = f_{n,\omega}(\Phi(\lambda; \omega)), \end{aligned} \quad (3.96)$$

wegen der Definition von  $\mu$ . Eine Umformung des Ausdrucks  $S_2(\lambda)$  ergibt mit  $(Nr^n)^I = r^{I(n-D)} = (\Phi(1; \omega))^{\frac{D}{n}-1} \mu^{1-\frac{D}{n}} \lambda^{\frac{D-n}{2}}$ :

$$S_2(\lambda) = \frac{(Nr^n)^{I+1} \Leftrightarrow Nr^n}{1 \Leftrightarrow Nr^n} \Phi(\lambda; \omega) = \frac{Nr^n}{1 \Leftrightarrow Nr^n} \Phi(\lambda; \omega) + (\Phi(1; \omega))^{\frac{D}{n}} \frac{Nr^n}{1 \Leftrightarrow Nr^n} \mu^{1-\frac{D}{n}} \lambda^{\frac{D}{2}}, \quad (3.97)$$

so daß wir für die Zustandszahlfunktion erhalten:

$$\begin{aligned} \mathcal{N}(\lambda; \Omega) &= n_0 \frac{Nr^n}{1 \Leftrightarrow Nr^n} \Phi(\lambda; \omega) \Leftrightarrow n_0 (\Phi(1; \omega))^{\frac{D}{n}} \left( f_{n,\omega}(\mu) \mu^{-\frac{D}{n}} + \frac{Nr^n}{1 \Leftrightarrow Nr^n} \mu^{1-\frac{D}{n}} \right) \lambda^{\frac{D}{2}} \\ &\quad + n_0 f_{n,\omega}(\Phi(\lambda; \omega)). \end{aligned} \quad (3.98)$$

Die Behauptung des Satzes folgt, da  $|\Omega|_n = \sum_{i=1}^{\infty} (Nr^n)^i |\omega|$  ( $Nr^n < 1$ ) und wegen Satz 3.2.7. Den so erhaltenen zweiten Term für die Zustandszahlfunktion verstehen wir aufgrund Korollar 3.2.10 als den zweiten Term der (schwach) asymptotischen Entwicklung von  $N$ .  $\square$

Mit der Abschätzung für die geschweifte Klammer (Lemma 3.2.2), sowie  $Nr^{n-1} > 1$  folgen unmittelbar:

**Lemma 3.2.12** *Die Funktion  $f_{n,\omega}$  ist auf dem Intervall  $[\mu_{\min}, \mu_{\max})$  beschränkt, wobei  $\mu_{\min}$  und  $\mu_{\max}$  durch (3.72) gegeben sind.*

**Korollar 3.2.13** *Der Koeffizient des zweiten Terms in der asymptotischen Entwicklung ist für alle  $\lambda > 0$  beschränkt.*

### 3.2.3 Diskussion der Funktion $f_{n,\omega}$

Wir werden uns nun mit einigen wichtigen Eigenschaften der Funktion  $f_{n,\omega}$ , insbesondere ihrer Funktionalgleichung, sowie der linearen Selbstähnlichkeit und der MINKOWSKI-Dimension ihres Graphen auseinandersetzen. Über die lineare Selbstähnlichkeit des Graphen von  $f_{n,\omega}$  und ihre Funktionalgleichung gibt der nachfolgende Satz Auskunft:

**Satz 3.2.14 (Lineare Selbstähnlichkeit und Funktionalgleichung)**

(a) Der Graph der Funktion  $f_{n,\omega}$  ist auf dem Intervall  $[0, \mu_{\max})$  selbstähnlich bezüglich der linearen Abbildung

$$A = \begin{pmatrix} r^n & 0 \\ r^n & \frac{1}{N} \end{pmatrix}. \quad (3.99)$$

Hierbei ist  $\mu_{\max}$  durch (3.72) gegeben.

(b) Die Funktion  $f_{n,\omega}$  erfüllt für alle  $\mu \geq 0$  die Funktionalgleichung

$$f_{n,\omega}(r^n \mu) = \{r^n \mu\}_{n,\omega} + \frac{1}{N} f_{n,\omega}(\mu). \quad (3.100)$$

*Beweis.* Dies folgt unmittelbar aus

$$f_{n,\omega}(r^n \mu) = \{r^n \mu\}_{n,\omega} + \sum_{i=1}^{\infty} N^{-i} \{r^{(1-i)n} \mu\}_{n,\omega} = r^n \mu + \frac{1}{N} f_{n,\omega}(\mu), \quad (3.101)$$

wobei die erste Identität für alle  $\mu \geq 0$ , die zweite für  $0 \leq \mu < \mu_{\max}$  gilt, da dann  $(\Phi(1; \omega))^{-2/n} (r^n \mu)^{2/n} < (\Phi(1; \omega))^{-2/n} (\Phi(\lambda_0; \omega))^{2/n} = \lambda_0$ , und  $[r^n \mu]_{n,\omega}$  wegen Definition 3.2.1 verschwindet.  $\square$

*Bemerkung.* Der Graph der Funktion  $f_{n,\omega}$  ist durch die alleinige Angabe seiner Funktionalgleichung (3.100) noch nicht eindeutig charakterisiert. Um dies zu sehen, betrachte die Funktion

$$\tilde{f}(\mu) = f_{n,\omega}(\mu) + A(\mu) \mu^{\frac{D}{n}}, \quad (3.102)$$

wobei  $A : \mathbb{R}_0^+ \rightarrow \mathbb{R}$  eine beliebige Funktion mit der Eigenschaft  $A(r^n \mu) = A(\mu)$ ,  $\forall \mu \geq 0$  darstellt. Dann erfüllt  $\tilde{f}$  ebenfalls die Funktionalgleichung (3.100):

$$\tilde{f}(r^n \mu) = \{r^n \mu\}_{n,\omega} + \frac{1}{N} f_{n,\omega}(\mu) + A(\mu) r^D \mu^{\frac{D}{n}} = \{r^n \mu\}_{n,\omega} + \frac{1}{N} \tilde{f}(\mu), \quad \forall \mu \geq 0, \quad (3.103)$$

wegen der Identität  $r^D = N^{-1}$ .

**Lemma 3.2.15** Sei  $f_{n,\omega}$  die Funktion aus Definition 3.2.4 und  $k \in \mathbb{N}$  beliebig. Dann gilt:

$$|f_{n,\omega}(\mu) \Leftrightarrow m_k \mu \Leftrightarrow b_k \mu^{\frac{n-1}{n}} + \sum_{i=0}^k N^{-i} [r^{-ni} \mu]_{n,\omega}| \leq d_k \mu^{\frac{2k}{n}} + c_k, \quad \forall \mu \geq 0 \quad (3.104)$$

mit

$$m_k = \frac{(Nr^n)^{-k} \Leftrightarrow Nr^n}{1 \Leftrightarrow Nr^n}, \quad b_k = \frac{C_{n-1}}{Nr^{n-1} \Leftrightarrow 1} (\Phi(1; \omega))^{-\frac{n-1}{n}} (Nr^{n-1})^{-k}, \quad (3.105)$$

$$d_k = \frac{C_1}{Nr^{2k} \Leftrightarrow 1} \frac{1}{(Nr^{2k})^k} \quad \text{und} \quad c_k = \frac{C_2}{N \Leftrightarrow 1} \frac{1}{N^k}, \quad (3.106)$$

wobei  $C_1, C_2 > 0$  die Konstanten aus Lemma 3.2.2 sind.

*Beweis.* Wir spalten die die ersten  $k + 1$  Summanden in (3.58) ab und schätzen die Restsumme mit Lemma 3.2.2 ab:

$$\begin{aligned} f_{n,\omega}(\mu) &= \sum_{i=0}^k N^{-i} \{r^{-ni} \mu\}_{n,\omega} + \mathcal{C}_{n-1} (\Phi(1; \omega))^{-\frac{n-1}{n}} \sum_{i=k+1}^{\infty} (Nr^{n-1})^{-i} \mu^{\frac{n-1}{n}} + R_k(\mu) \\ &= m_k \mu \Leftrightarrow \sum_{i=0}^k N^{-i} [r^{-ni} \mu]_{n,\omega} + b_k \mu^{\frac{n-1}{n}} + R_k(\mu), \end{aligned} \quad (3.107)$$

wobei

$$\begin{aligned} |R_k(\mu)| &= \left| \sum_{i=k+1}^{\infty} N^{-i} \left( \{r^{-ni} \mu\}_{n,\omega} \Leftrightarrow \mathcal{C}_{n-1} (\Phi(1; \omega))^{-\frac{n-1}{n}} (r^{-ni} \mu)^{\frac{n-1}{n}} \right) \right| \\ &\leq C_1 \sum_{i=k+1}^{\infty} (Nr^{2\kappa})^{-i} \mu^{\frac{2\kappa}{n}} + C_2 \sum_{i=k+1}^{\infty} N^{-i} \\ &= \frac{C_1}{Nr^{2\kappa} \Leftrightarrow 1} \frac{1}{(Nr^{2\kappa})^k} \mu^{\frac{2\kappa}{n}} + \frac{C_2}{N \Leftrightarrow 1} \frac{1}{N^k} \\ &=: d_k \mu^{\frac{2\kappa}{n}} + c_k. \quad \square \end{aligned} \quad (3.108)$$

**Definition 3.2.16 (Streifensystem)**

Sei  $k \in \mathbb{N}$  beliebig und  $\tilde{f}_{n,\omega}^k(\mu) = \sum_{i=0}^k N^{-i} [r^{-ni} \mu]_{n,\omega}$  die Summe aus Abschätzung (3.104).  $(a, b) \subset \mathbb{R}_0^+$  sei ein beliebiges beschränktes offenes Intervall. Die insgesamt  $i_{\max}$  Unstetigkeitsstellen der Funktion  $\tilde{f}_{n,\omega}^k$  im Intervall  $(a, b)$  seien der Größe nach geordnet und mit  $\{\mu_i^k\}_{i=1}^{i_{\max}}$  bezeichnet. Dann definieren wir mit  $\mu_0^k = a$  und  $\mu_{i_{\max}+1}^k = b$  für alle  $i = 1, \dots, i_{\max} + 1$ :

$$S_k^i := \{(x, y) \in [a, b) \times \mathbb{R} : \mu_{i-1} \leq x < \mu_i; |y \Leftrightarrow m_k x \Leftrightarrow b_k x^{\frac{n-1}{n}} + \tilde{f}_{n,\omega}^k(x)| \leq d_k b^{\frac{2\kappa}{n}} + c_k\}. \quad (3.109)$$

Hierbei sind  $m_k, b_k, d_k$  und  $c_k$  durch Lemma 3.2.15 gegeben.

$$S_k := \bigcup_{i=1}^{i_{\max}+1} S_k^i \quad (3.110)$$

bezeichnen wir dann als Streifensystem der  $k$ -ten Entwicklung auf dem Intervall  $[a, b)$  und  $S_k^i$  ( $i = 1, \dots, i_{\max}+1$ ) als Teilstreifen.

**Korollar 3.2.17** Es sei  $k \in \mathbb{N}$  und  $S_k$  ein Streifensystem der  $k$ -ten Entwicklung auf einem beschränkten Intervall  $(a, b) \subset \mathbb{R}_0^+$  im Sinne von Definition 3.2.16, sowie

$$G := \{(\mu, f_{n,\omega}(\mu)) : \mu \in (a, b)\} \quad (3.111)$$

der Graph der Funktion  $f_{n,\omega}$  auf dem Intervall  $(a, b)$ . Dann gilt:

$$G \subset S_k, \quad \forall k \in \mathbb{N}. \quad (3.112)$$

**Korollar 3.2.18** Es gilt  $S_{k+1} \subset S_k, \forall k \in \mathbb{N}$ .

*Beweis.* Zu  $k \in \mathbb{N}$  und  $(a, b) \subset \mathbb{R}_0^+$  beliebig sei  $S_k$  ein Streifensystem im Sinne von Definition 3.2.16. Sei nun  $(x, y) \in S_{k+1}$  beliebig. Dann gilt

$$|y \Leftrightarrow m_{k+1}x \Leftrightarrow b_{k+1}x^{\frac{n-1}{n}} + \tilde{f}_{n,\omega}^{k+1}(x)| \leq d_{k+1}b^{\frac{2\kappa}{n}} + c_{k+1}, \quad \forall x \in (a, b). \quad (3.113)$$

Die Behauptung folgt nun mit Lemma 3.2.2, da dann:

$$\begin{aligned} & |y \Leftrightarrow m_k x \Leftrightarrow b_k x^{\frac{n-1}{n}} + \tilde{f}_{n,\omega}^k(x)| \\ & \leq |y \Leftrightarrow m_{k+1}x \Leftrightarrow b_{k+1}x^{\frac{n-1}{n}} + \tilde{f}_{n,\omega}^{k+1}(x)| \\ & \quad + |(m_{k+1} \Leftrightarrow m_k)x + (b_{k+1} \Leftrightarrow b_k)x^{\frac{n-1}{n}} \Leftrightarrow (Nr^n)^{-(k+1)}x + N^{-(k+1)}\{r^{-n(k+1)}x\}_{n,\omega}| \\ & \leq d_{k+1}b^{\frac{2\kappa}{n}} + c_{k+1} + |(Nr^n)^{-(k+1)}x \Leftrightarrow \mathcal{C}_{n-1}(\Phi(1; \omega))^{-\frac{n-1}{n}}(Nr^{n-1})^{-(k+1)}x^{\frac{n-1}{n}} \\ & \quad \Leftrightarrow (Nr^n)^{-(k+1)}x + N^{-(k+1)}\{r^{-n(k+1)}x\}_{n,\omega}| \\ & = d_{k+1}b^{\frac{2\kappa}{n}} + c_{k+1} + |N^{-(k+1)}(\{r^{-n(k+1)}\}_{n,\omega} \Leftrightarrow \mathcal{C}_{n-1}(\Phi(1; \omega))^{-\frac{n-1}{n}}(r^{-n(k+1)})^{\frac{n-1}{n}})| \\ & \leq d_{k+1}b^{\frac{2\kappa}{n}} + c_{k+1} + N^{-(k+1)}(C_1 r^{-2\kappa(k+1)}x^{\frac{2\kappa}{n}} + C_2) \\ & \leq (d_{k+1} + C_1(Nr^{2\kappa})^{-(k+1)})b^{\frac{2\kappa}{n}} + c_{k+1} + C_2 N^{-(k+1)} \\ & = d_k b^{\frac{2\kappa}{n}} + c_k \quad \Rightarrow \quad (x, y) \in S_k. \quad \square \end{aligned} \quad (3.114)$$

**Korollar 3.2.19** Die Funktion  $f_{n,\omega}$  ist rechtsseitig stetig für alle  $\mu \geq 0$ .

*Beweis.* Zu beliebigen, aber festen  $x_0$  mit  $0 \leq x_0 \in (a, b) \subset \mathbb{R}_0^+$  existiert im Sinne von Definition 3.2.16 eine Folge  $\{S_k^{i_k}\}_{k=1}^\infty$  von Teilstreifen, so daß  $(x_0, f_{n,\omega}(x_0)) \in S_k^{i_k}$  für alle  $k \in \mathbb{N}$ . Desweiteren gilt  $(x, f_{n,\omega}(x)) \in S_k^{i_k}$  für alle  $x \in [\mu_{i_k-1}^k, \mu_{i_k}^k)$ . Daher folgt:

$$|f_{n,\omega}(x) \Leftrightarrow f_{n,\omega}(x_0)| \leq 2(d_k b^{\frac{2\kappa}{n}} + c_k), \quad \forall k \in \mathbb{N}, \forall x \in [\mu_{i_k-1}^k, \mu_{i_k}^k). \quad (3.115)$$

Die rechte Seite strebt für  $k \rightarrow +\infty$  gegen Null. Für  $x \rightarrow x_0^+$  kann die rechte Seite von (3.115) daher beliebig klein gemacht werden, was die rechtsseitige Stetigkeit von  $f_{n,\omega}$  beweist.  $\square$

### 3.2.4 Dimension des Graphen von $f_{n,\omega}$

Mit Korollar 3.2.17 ist es auf einfache Weise möglich, eine obere Schranke für die MINKOWSKI-Dimension des Graphen  $G$  zu bestimmen:

**Definition 3.2.20** Es sei  $G$  der Graph der Funktion  $f_{n,\omega}$  auf einem beliebigen Intervall  $(a, b) \subset \mathbb{R}_0^+$ . Dann bezeichnen wir mit  $\Sigma$  die Menge aller Punkte, die die Sprünge von  $f_{n,\omega}$  im Intervall  $(a, b)$  bilden.

#### Satz 3.2.21 (Dimension des zusammenhängenden Graphen, obere Schranke)

Es sei  $f_{n,\omega}$  die Funktion aus Definition 3.2.4. Dann gilt für die MINKOWSKI-Dimension  $\tilde{D}(G^z)$  des zusammenhängenden Graphen  $G^z = G \cup \Sigma$  der Funktion  $f_{n,\omega}$  auf jedem beschränkten Intervall  $(a, b) \subset \mathbb{R}_0^+$  die Abschätzung

$$\tilde{D}(G^z) \leq 2 \Leftrightarrow \frac{D \Leftrightarrow 2\kappa}{n \Leftrightarrow 2\kappa}, \quad (3.116)$$

wobei  $D = \ln N / \ln \frac{1}{r}$  und  $\kappa$  durch Definition 3.2.1 gegeben sind.



Wegen  $G \subset G^z$  und Lemma 1.4.2 haben wir als Korollar:

**Korollar 3.2.22** Für die MINKOWSKI-Dimension des Graph  $G$  der Funktion  $f_{n,\omega}$  auf jedem beschränkten Intervall  $(a, b) \in \mathbb{R}^n$  gilt Abschätzung (3.2.21).

*Beweis von Satz 3.2.21.* Für die Bestimmung der MINKOWSKI-Dimension des zusammenhängenden Graphen  $G^z$  nach Definition 1.4.1(b) müssen wir das (schwach) asymptotische Verhalten des zweidimensionalen LEBESGUESchen Maßes der  $\epsilon$ -Umgebung

$$G_\epsilon^z = \{x \in \mathbb{R}^2 : d(x, G^z) < \epsilon\} \quad (3.117)$$

für  $\epsilon \rightarrow 0^+$  untersuchen. Zu beliebigem  $k \in \mathbb{N}$  sei  $S_k$  das Streifensystem der  $k$ -ten Entwicklung auf dem Intervall  $(a, b)$  im Sinne von Definition 3.2.16. Dann gilt  $G \subset S_k$  und damit  $G_\epsilon \subset (S_k)_\epsilon$ ,  $\forall \epsilon > 0$ ,  $\forall k \in \mathbb{N}$ . Ferner sei  $J_k$  die Menge der Unstetigkeitsstellen der Funktion  $\tilde{f}_{n,\omega}^k : \mu \mapsto \sum_{i=0}^k N^{-i} [r^{-ni} \mu]_{n,\omega}$  im Intervall  $(a, b)$ . An der Stelle  $\mu_i^k$  befinde sich ein Sprung der Höhe  $\sigma_i^k$ ,  $i \in J_k$ . Die Länge des durch  $B : \mu \mapsto m_k \mu + b_k \mu^{\frac{n-1}{n}}$  definierten Bogens auf dem Intervall  $(a, b)$  sei  $l_k$ . Dann läßt sich die  $\epsilon$ -Umgebung des zusammenhängenden Graphen folgendermaßen abschätzen (siehe hierzu Abbildung 3.6):

$$|G_\epsilon^z| \gtrsim |S_k|_2 + 2l_k \epsilon + 2|\Sigma^k|_1 \epsilon + 2(d_k b^{\frac{2\kappa}{n}} + c_k + \epsilon) \epsilon. \quad (3.118)$$

mit  $\Sigma^k$  als der Menge aller Punkte, die die Sprünge von  $\tilde{f}_{n,\omega}^k$  im Intervall  $(a, b)$  bilden, und es gilt  $|\Sigma^k|_1 = \sum_{i \in J_k} \sigma_i^k$ . Für die Fläche des Streifensystems  $S_k$  gilt, da  $\kappa \geq 0$ :

$$|S_k| = 2(b \Leftrightarrow a)(d_k b^{\frac{2\kappa}{n}} + c_k) \approx (Nr^{2\kappa})^{-k} + N^{-k} \approx (Nr^{2\kappa})^{-k} \quad \text{für } k \rightarrow +\infty. \quad (3.119)$$

(Beachte die Definition von  $\approx$ , also die Kurzschreibweise für schwach asymptotisches Verhalten.) Die Länge  $l_k$  ist gegeben durch:

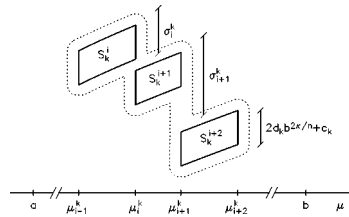


Abbildung 3.6: Streifensystem. Veranschaulichung von Abschätzung (3.118). Gepunktet eingezeichnet ist die  $\epsilon$ -Umgebung des Streifensystems einschließlich der  $\epsilon$ -Schläuche um die Sprungstellen.  $G_\epsilon^z$  ist enthalten in dieser  $\epsilon$ -Umgebung.

$$\begin{aligned}
|l_k| &= \int_{\mu=a}^{\mu=b} ds = \int_a^b (1 + (B'(\mu))^2)^{1/2} d\mu \leq \int_a^b \left(1 + (m_k + \frac{n-1}{n}b_k a^{-1/n})^2\right)^{1/2} d\mu \\
&\sim (b \Leftrightarrow a)(m_k + \frac{n-1}{n}b_k a^{-1/n}) \approx (Nr^n)^{-k}, \quad \text{für } k \rightarrow +\infty.
\end{aligned} \tag{3.120}$$

Abzuschätzen bleibt  $|\Sigma^k| = \sum_{i \in J_k} \sigma_i$ . Dies ist nichts anderes als die Gesamtsumme der Sprunghöhen von  $\tilde{f}_{n,\omega}^k$  im Intervall  $(a, b)$ . Zur Bestimmung dieser Summe müssen wir die Anzahl der Unstetigkeitsstellen von  $\{\cdot\}_{n,\omega}^\bullet : \mu \mapsto \{r^{-ni}\mu\}_{n,\omega} = r^{-ni}\mu \Leftrightarrow [r^{-ni}\mu]_{n,\omega}$  ( $i = 0, \dots, k$ ) im Intervall  $(a, b)$  kennen. Aufgrund Definition 3.2.1 gilt

$$[x]_{n,\omega} = N((\Phi(1; \omega))^{-\frac{2}{n}} x^{\frac{2}{n}}; \omega). \tag{3.121}$$

Mit  $\{\lambda_{j,\omega}\}_{j=1}^\infty$  als der Eigenwertfolge des Eigenwertproblems (3.1) bezüglich des Grundgebietes  $\omega$  tritt eine Unstetigkeitsstelle  $\mu_j$  von  $[\cdot]_{n,\omega} : \mu \mapsto [\mu]_{n,\omega}$  genau dann auf, wenn

$$\mu_j = \Phi(\lambda_{j,\omega}; \omega). \tag{3.122}$$

Gesucht ist daher die Anzahl der  $j \geq 1$  mit  $\mu_j \in (r^{-ni}a, r^{-ni}b)$ . Sei  $f_i$  die Anzahl der Eigenwerte im entsprechenden  $\lambda$ -Intervall:

$$f_i := \#\{j \in \mathbb{N} : r^{-ni}a < \Phi(\lambda_{j,\omega}; \omega) < r^{-ni}b\}. \tag{3.123}$$

Dann gilt für die Summe der Sprunghöhen:  $|\Sigma^k| = \sum_{i \in J_k} \sigma_i = \sum_{i=0}^k N^{-i} f_i$ , da Sprünge von  $\tilde{f}_{n,\omega}^k$  nur als Vielfache von  $N^{-i}$  ( $i = 0, \dots, k$ ) auftreten. Es gilt  $\Phi(\lambda_{j,\omega}; \omega) = j + O(j^{\frac{n-1}{n}})$ , für  $j \rightarrow +\infty$ . Damit folgt

$$f_i = (b \Leftrightarrow a)r^{-ni} + O(r^{-(n-1)i}), \quad \text{für } i \rightarrow +\infty. \tag{3.124}$$

Wegen des diskreten Spektrums und der endlichen Multiplizität eines jeden Eigenwertes bezüglich des Gebietes  $\omega$  folgt weiter:

$$|f_i \Leftrightarrow (b \Leftrightarrow a)r^{-ni}| \leq c_1 r^{-(n-1)i} + c_2, \quad \forall i \in \mathbb{N}_0 \tag{3.125}$$

mit geeigneten Konstanten  $c_1, c_2 > 0$ , die unabhängig von  $i$  sind. Wir erhalten daher:

$$\begin{aligned}
|\Sigma^k| &\leq (b \Leftrightarrow a) \sum_{i=0}^k \frac{1}{(Nr^n)^i} + c_1 \sum_{i=0}^k \frac{1}{(Nr^{n-1})^i} + c_2 \sum_{i=0}^k \frac{1}{N^i} \\
&\leq \frac{b \Leftrightarrow a}{1 \Leftrightarrow Nr^n} \frac{1}{(Nr^n)^k} + c_1 \frac{Nr^{n-1}}{Nr^{n-1} \Leftrightarrow 1} + c_2 \frac{N}{N \Leftrightarrow 1}.
\end{aligned} \tag{3.126}$$

Es existiert daher einer Konstante  $s_2 > 0$  und ein  $k_2 > 0$ , so daß  $|\Sigma^k| = \sum_{i \in J_k} \sigma_i \leq s_2 r^{k(D-n)}$  für alle  $k \geq k_2$ . Andererseits existiert wegen  $f_i \sim (b \Leftrightarrow a)r^{-ni}$ , für  $i \rightarrow +\infty$  eine Konstante  $s_1 > 0$  und ein  $k_1 > 0$ , so daß  $f_i \geq s_1/r^{ni}$  für alle  $i \geq k_1$ . Daher folgt  $|\Sigma^k| \geq N^{-k} f_k \geq s_1 (Nr^n)^{-k} = s_1 r^{k(D-n)}$  für alle  $k \geq k_1$ , und es gilt:

$$|\Sigma^k| \approx r^{k(D-n)}, \quad \text{für } k \rightarrow +\infty. \tag{3.127}$$

Für die  $\epsilon$ -Umgebung des zusammenhängenden Graphen  $G^z$  bedeutet dies: Es gibt eine Konstante  $C > 0$  und ein  $k_0$  derart, daß

$$|G_\epsilon^z| \leq C(r^{k(D-2\kappa)} + r^{k(D-n)}\epsilon), \quad \forall k \geq k_0. \tag{3.128}$$

Wähle nun zu  $\epsilon > 0$  dasjenige  $k > 0$  mit  $r^{k+1} \leq \epsilon^{\frac{1}{n-2\kappa}} < r^k$ . Dann existiert eine Konstante  $c_0 > 0$  und ein  $\epsilon_0 > 0$ , so daß

$$|G_\epsilon^z| \leq c_0 \epsilon^{\frac{D-2\kappa}{n-2\kappa}}, \quad \forall \epsilon \leq \epsilon_0. \quad (3.129)$$

Daher folgt für alle  $d > 2 \Leftrightarrow \frac{D-2\kappa}{n-2\kappa}$ :

$$\tilde{\mathcal{M}}^*(d; G^z) = \limsup_{\epsilon \rightarrow 0^+} \epsilon^{-(2-d)} |G_\epsilon^z| \leq c_0 \limsup_{\epsilon \rightarrow 0^+} \epsilon^{d-(2-\frac{D-2\kappa}{n-2\kappa})} = 0. \quad (3.130)$$

Mit Definition 1.4.1(b) folgt dann sofort die obere Schranke für die MINKOWSKI-Dimension des zusammenhängenden Graphen  $G^z$ , da  $\tilde{D}(G^z) = \inf\{d \geq 0 : \tilde{\mathcal{M}}^*(d; G^z) = 0\}$ .  $\square$

**Satz 3.2.23 (Dimension des zusammenhängenden Graphen, untere Schranke)**

Sei  $\{\Lambda_i\}_{i=1}^\infty$  die Eigenwertfolge bezüglich des Grundgebietes  $\omega$  ohne Berücksichtigung der Multiplizität und  $\Delta\Lambda_i := \Lambda_{i+1} \Leftrightarrow \Lambda_i$ . Falls Konstanten  $\Lambda_0, i_0 > 0$  und ein  $\alpha < 1$  existieren, so daß

$$\Delta\Lambda_i > \Lambda_0 \Lambda_i^\alpha, \quad \forall i \geq i_0, \quad (3.131)$$

dann gilt für die MINKOWSKI-Dimension  $\tilde{D}(G^z)$  des zusammenhängenden Graphen  $G^z$  der Funktion  $f_{n,\omega}$  auf jedem beschränkten Intervall  $(a, b) \subset \mathbb{R}_0^+$  die Abschätzung

$$\tilde{D}(G^z) \geq 1 + \frac{1}{1 \Leftrightarrow \alpha} \frac{n \Leftrightarrow D}{2} \quad \text{mit} \quad D = \ln N / \ln \frac{1}{r}. \quad (3.132)$$

*Beweis.* Zu  $k \in \mathbb{N}$  ( $k \geq i_0$ ) beliebig sei  $\{\tilde{\mu}_i^k\}_{i=1}^\infty$  die Folge der Unstetigkeitsstellen der Funktion  $F_k : \mu \mapsto [r^{-nk}\mu]_{n,\omega}$  im Intervall  $(a, b)$  und  $I_k$  die Menge der entsprechenden Indizes. Ferner sei

$$\delta\mu_k = \min\{\tilde{\mu}_{i+1}^k \Leftrightarrow \tilde{\mu}_i^k : i \in I_k\}. \quad (3.133)$$

Wegen  $[\mu]_{n,\omega} = N((\Phi(1;\omega))^{-2/n}\mu^{2/n}; \omega)$  tritt eine Unstetigkeitsstelle von  $F_k$  auf, wenn  $(\Phi(1;\omega))^{-2/n}\mu^{2/n} = \Lambda_i$  für ein  $i \in \mathbb{N}$ , d.h. die Unstetigkeitsstellen von  $F_k$  im Intervall  $(a, b)$  sind gegeben durch

$$\tilde{\mu}_i^k = r^{nk}\Phi(1;\omega)\Lambda_i^{\frac{n}{2}} = \Phi(r^{2k}\Lambda_i;\omega) \stackrel{!}{\in} (a, b), \quad i \in I_k. \quad (3.134)$$

Es folgt  $\delta\mu_k = r^{nk}\Phi(1;\omega) \min\{\Lambda_{i+1}^{\frac{n}{2}} \Leftrightarrow \Lambda_i^{\frac{n}{2}} : i \in I_k\}$ . Wegen  $\Delta\Lambda_i = \Lambda_{i+1} \Leftrightarrow \Lambda_i$  erhalten wir:

$$\begin{aligned} \Lambda_{i+1}^{\frac{n}{2}} \Leftrightarrow \Lambda_i^{\frac{n}{2}} &= \Lambda_i^{\frac{n}{2}} \left(1 + \frac{\Delta\Lambda_i}{\Lambda_i}\right)^{\frac{n}{2}} \Leftrightarrow \Lambda_i^{\frac{n}{2}} \geq \Lambda_i^{\frac{n}{2}} \left(1 + \frac{n}{2} \frac{\Delta\Lambda_i}{\Lambda_i}\right) \Leftrightarrow \Lambda_i^{\frac{n}{2}} \\ &= \frac{n}{2} \Delta\Lambda_i \Lambda_i^{\frac{n}{2}-1} > \frac{n}{2} \Lambda_0 \Lambda_i^{\alpha+\frac{n}{2}-1} \end{aligned} \quad (3.135)$$

laut Voraussetzung. Aufgrund  $\Phi(r^{2k}\Lambda_i;\omega) \in (a, b)$  gilt:

$$\Lambda_i^{\alpha+\frac{n}{2}} > (a^{\frac{2}{n}}(\Phi(1;\omega))^{-\frac{2}{n}})^{\alpha+\frac{n}{2}} r^{-k(2\alpha+n)} \quad \text{und} \quad \Lambda_i^{-1} > b^{-\frac{2}{n}}(\Phi(1;\omega))^{\frac{2}{n}} r^{2k}. \quad (3.136)$$

Es existiert daher eine Konstante  $M_0 > 0$  unabhängig von  $k$  und ein  $k_0 > 0$ , so daß

$$\delta\mu_k > M_0 r^{k(2-2\alpha)}, \quad \forall k \geq k_0. \quad (3.137)$$

Beim zusammenhängenden Graph  $G^z$  von  $f_{n,\omega}$  sind mindestens die Sprunghöhen an den Stellen  $\tilde{\mu}_i^k \in (a, b)$  vorhanden. (Es existieren nur fallende Sprünge.) Wegen (3.137) kann zu genügend kleinem  $\epsilon > 0$  ein  $k \geq k_0$  derart gewählt werden, daß

$$M_0 r^{k(2-2\alpha)} < 2\epsilon \leq \delta\mu_k. \quad (3.138)$$

Dann folgt, da sich die  $\epsilon$ -Schläuche an den Unstetigkeitsstellen  $\tilde{\mu}_i^k$  ( $i \in I_k$ ) nicht überlappen:

$$|G_\epsilon^z| = |(G \cup \Sigma)_\epsilon| \geq |\Sigma_\epsilon| \geq 2\epsilon f_k N^{-k} \quad (3.139)$$

mit  $f_k$  als der Zahl der Eigenwerte im entsprechenden  $\lambda$ -Intervall ((3.123) und (3.124)):

$$f_k = \#\{i > 0 : \Phi(r^{2k} \lambda_{i,\omega}; \omega) \in (a, b)\} \sim (b \Leftrightarrow a) r^{-nk}, \quad \text{für } k \rightarrow +\infty. \quad (3.140)$$

Es folgt  $|G_\epsilon^z| \gtrsim 2\epsilon N^{-k} (b \Leftrightarrow a) r^{-nk} \approx \epsilon r^{k(D-n)}$ . Mit (3.138) können wir weiter abschätzen:

$$M_0 r^{k(2-2\alpha)} < 2\epsilon \quad \stackrel{\alpha < 1}{\Leftrightarrow} \quad r^{-k} > (M_0/2)^{\frac{1}{2-2\alpha}} \epsilon^{\frac{1}{2\alpha-2}}. \quad (3.141)$$

Daher existiert eine Konstante  $m_1 > 0$  und ein  $\epsilon_0 > 0$  in der Weise, daß

$$|G_\epsilon^z| \geq m_1 \epsilon^{1 + \frac{1}{1-\alpha} \frac{n-D}{2}}, \quad \forall \epsilon \leq \epsilon_0. \quad (3.142)$$

Für alle  $d < 1 + \frac{1}{1-\alpha} \frac{n-D}{2}$  gilt daher:

$$\tilde{\mathcal{M}}^*(d; G^z) = \limsup_{\epsilon \rightarrow 0^+} \epsilon^{-(2-d)} |G_\epsilon^z| \geq m_1 \limsup_{\epsilon \rightarrow 0^+} \epsilon^{d - (1 + \frac{1}{1-\alpha} \frac{n-D}{2})} = +\infty, \quad (3.143)$$

so daß mit  $\tilde{D}(G^z) = \sup\{d \geq 0 : \tilde{\mathcal{M}}^*(d; G^z) = +\infty\}$  die Behauptung des Satzes folgt.  $\square$

**Korollar 3.2.24** Falls für das Spektrum des Grundgebietes  $\omega$  gilt:

$$\lambda_{i,\omega} = \lambda_{0,\omega} \nu_i \quad \text{mit } \nu_i \in \mathbb{N}, \quad \forall i \in \mathbb{N} \quad (3.144)$$

und einer Konstanten  $\lambda_{0,\omega}$ , wobei  $\{\lambda_{i,\omega}\}_{i=1}^\infty$  die Eigenwertfolge bezüglich des Grundgebietes unter Berücksichtigung der Multiplizität darstellt, dann folgt  $\alpha \geq 0$  und man hat

$$\tilde{D}(G^z) \geq 1 + \frac{n \Leftrightarrow D}{2}. \quad (3.145)$$

**Satz 3.2.25** Der zusammenhängende Graph  $G^z$  der „eindimensionalen“ Funktion  $f := f_{1,(0,1)}$  besitzt die MINKOWSKI-Dimension  $\tilde{D}(G^z) = 2 \Leftrightarrow D$ .

*Beweis.* Wegen Satz 3.2.21 folgt  $\tilde{D}(G^z) \leq 2 \Leftrightarrow D$ , da  $\kappa = 0$  im eindimensionalen Fall. Desweiteren gilt  $\Lambda_i = i^2 \pi^2$ . Daher hat man  $\Delta \Lambda_i = ((i+1)^2 \Leftrightarrow i^2) \pi^2 = (2i+1) \pi^2 \geq 2\pi \Lambda_i^{1/2}$  für alle  $i \geq 1$ . Wende daher Satz 3.2.23 mit den Konstanten  $\Lambda_0 = 2\pi$ ,  $i_0 = 1$  und  $\alpha = 1/2$  an.  $\square$

*Bemerkungen.* An dieser Stelle ist es angebracht, einige Grundgebiete anzuführen, für die ein  $\kappa$  bekannt ist, sowie die daraus resultierenden Abschätzungen für die MINKOWSKI-Dimension  $\tilde{D}(G^z)$  (siehe Tabelle 3.1).

n	Grundgebiet $\omega$	obere Schranke für $\kappa$	untere Schranke für $\tilde{D}(G^z)$	obere Schranke für $\tilde{D}(G^z)$	maximale Differenz
1	Intervall	0	$2 \Leftrightarrow D$	$2 \Leftrightarrow D$	0
2	Quadrat	$\frac{7}{22}$	$2 \Leftrightarrow \frac{D}{2}$	$\frac{37}{15} \Leftrightarrow \frac{11}{15}D$	$\frac{7}{30}$
3	Würfel	$\frac{2}{3}$	$\frac{5}{2} \Leftrightarrow \frac{D}{2}$	$\frac{14}{5} \Leftrightarrow \frac{3}{5}D$	$\frac{1}{10}$
4	4-dimensionaler Würfel	$1 + \epsilon$	$1 + \frac{4-D}{2}$	$1 + \frac{4-D}{2}$	0
$\geq 5$	$n$ -dimensionaler Würfel ( $n \geq 5$ )	$\frac{n-2}{2}$	$2 \Leftrightarrow \frac{n-D}{2}$	$2 \Leftrightarrow \frac{n-D}{2}$	0
2	Gleichseitiges Dreieck	$\frac{1}{3}$	$2 \Leftrightarrow \frac{D}{2}$	$\frac{5}{2} \Leftrightarrow \frac{3}{4}D$	$\frac{1}{4}$
2	Gleichschenkelig rechtwinkliges Dreieck	$\frac{1}{3}$	$2 \Leftrightarrow \frac{D}{2}$	$\frac{5}{2} \Leftrightarrow \frac{3}{4}D$	$\frac{1}{4}$
3	Simpliziales Tetraeder aus Lemma A.3.1	$\frac{3}{4}$	$\frac{5}{2} \Leftrightarrow \frac{D}{2}$	$3 \Leftrightarrow \frac{2}{3}D$	$\frac{1}{6}$
4	4-dimensionales simpliziales Tetraeder	$1 + \epsilon$	$1 + \frac{4-D}{2}$	$1 + \frac{4-D}{2}$	0
$\geq 5$	$n$ -dimensionales simpliziales Tetraeder ( $n \geq 5$ )	$\frac{n-2}{2}$	$2 \Leftrightarrow \frac{n-D}{2}$	$2 \Leftrightarrow \frac{n-D}{2}$	0
2	Kreis	$\frac{1}{3}$	1	$\frac{5}{2} \Leftrightarrow \frac{3}{4}D$	$\frac{3}{4}$

Tabelle 3.1: Auflistung einiger Grundgebiete  $\omega$ , für die eine obere Schranke der Konstanten  $\kappa$  aus Lemma 3.2.1 bekannt ist. Aufgeführt sind ebenfalls obere und untere Schranken für die MINKOWSKI-Dimension  $\tilde{D}(G^z)$  der zusammenhängenden Graphen  $G^z$  der zugehörigen Funktionen  $f_{n,\omega}$  aus Definition 3.2.4, wobei  $D = \ln N / \ln \frac{1}{r}$  gilt, sowie die maximale Differenzen der oberen und unteren Schranken, die aus  $n \Leftrightarrow 1 < D < n$  folgen.

Die Ergebnisse für das Intervall stammen aus Satz 3.2.25. Der Beweis von  $\kappa \leq 1/3$  für den Kreis ist in [23] zu finden. Die Beweise für die übrigen Gebiete sind in Anhang A zusammengestellt. Die oberen Schranken für  $\tilde{D}(G^z)$  folgen dann unmittelbar mit Satz 3.2.21. Bis auf den Kreis folgen die unteren Schranken mit Korollar 3.2.24. Für den Kreis hat man die (triviale) untere Schranke 1. Für den 4-dimensionalen Würfel und das 4-dimensionale simpliziale Gebiet hat man mit  $\kappa = 1 + \epsilon$ , wobei  $\epsilon > 0$  beliebig gewählt werden kann:

$$\tilde{D}(G^z) \leq 2 \Leftrightarrow \frac{D \Leftrightarrow 2(1 + \epsilon)}{4 \Leftrightarrow 2(1 + \epsilon)} = 1 + \frac{4 \Leftrightarrow D}{2} \frac{1}{1 \Leftrightarrow \epsilon} = 1 + \frac{4 \Leftrightarrow D}{2} + O(\epsilon), \quad \text{für } \epsilon \rightarrow 0. \quad (3.146)$$

Desweiteren folgt unmittelbar, daß für die betrachteten Fälle mit  $n \geq 5$  eine Abschätzung  $\kappa < \frac{n-2}{2}$  nicht stimmen kann. Für die Fälle mit  $n = 4$  kann im übrigen eine Abschätzung  $\kappa \leq 1$  nicht richtig sein [22, S. 157]. Das Problem des optimalen  $\kappa$ -Wertes für die angegebenen zwei- und dreidimensionalen Gebiete ist bis heute ungelöst.

Aufgrund Korollar 3.2.5 definieren wir:

**Definition 3.2.26 (Funktion  $F_{n,\omega}$ )** Seien  $N = 2, 3, \dots$ ,  $r \in (0, 1)$  mit  $Nr^{n-1} > 1$ . Dann definieren wir für alle  $\mu \geq 0$ :

$$F_{n,\omega}(\mu) := f_{n,\omega}(\mu) \Leftrightarrow \mathcal{C}_{n-1}(\Phi(1; \omega))^{-\frac{n-1}{n}} \frac{Nr^{n-1}}{Nr^{n-1} \Leftrightarrow 1} \mu^{\frac{n-1}{n}}. \quad (3.147)$$

**Satz 3.2.27** Die Funktion  $F_{n,\omega}$  erfüllt die Funktionalgleichung

$$F_{n,\omega}(r^n \mu) = \{r^n \mu\}_{n,\omega} \Leftrightarrow \mathcal{C}_{n-1}(\Phi(1; \omega))^{-\frac{n-1}{n}} Nr^{n-1} \mu^{\frac{n-1}{n}} + \frac{1}{N} F_{n,\omega}(\mu), \quad \forall \mu \geq 0, \quad (3.148)$$

und es gilt

$$F_{n,\omega}(r^n \mu) = r^n \mu \Leftrightarrow \mathcal{C}_{n-1}(\Phi(1; \omega))^{-\frac{n-1}{n}} Nr^{n-1} \mu^{\frac{n-1}{n}} + \frac{1}{N} F_{n,\omega}(\mu), \quad \forall \mu \in [0, \mu_{\max}). \quad (3.149)$$

*Beweis.* Wegen der Funktionalgleichung der Funktion  $f_{n,\omega}$  haben wir

$$\begin{aligned} F_{n,\omega}(r^n \mu) &= \{r^n \mu\}_{n,\omega} + \frac{1}{N} f_{n,\omega}(\mu) \Leftrightarrow \frac{1}{N} \mathcal{C}_{n-1}(\Phi(1; \omega))^{-\frac{n-1}{n}} \frac{Nr^{n-1}}{Nr^{n-1} \Leftrightarrow 1} \mu^{\frac{n-1}{n}} \\ &+ \mathcal{C}_{n-1}(\Phi(1; \omega))^{-\frac{n-1}{n}} \frac{Nr^{n-1}}{Nr^{n-1} \Leftrightarrow 1} \left( \frac{1}{N} \Leftrightarrow r^{n-1} \right) \mu^{\frac{n-1}{n}} \\ &= \{r^n \mu\}_{n,\omega} \Leftrightarrow \frac{1}{N} \mathcal{C}_{n-1}(\Phi(1; \omega))^{-\frac{n-1}{n}} Nr^{n-1} \mu^{\frac{n-1}{n}} + \frac{1}{N} F_{n,\omega}(\mu) \end{aligned} \quad (3.150)$$

für alle  $\mu \geq 0$ . Der zweite Teil der Behauptung folgt dann wegen  $\{r^n \mu\}_{n,\omega} = r^n \mu$ ,  $\forall \mu \in [0, \mu_{\max})$ .  $\square$

**Satz 3.2.28** Es sei  $(a, b) \subset \mathbb{R}_0^+$  ( $a \neq 0$ ) ein beschränktes offenes Intervall und  $G_f$  bzw.  $G_F$  die Graphen der Funktionen  $f_{n,\omega}$  bzw.  $F_{n,\omega}$  auf diesem Intervall. Dann gilt  $\tilde{D}(G_f) = \tilde{D}(G_F)$ . Entsprechendes gilt für die MINKOWSKI-Dimension der zusammenhängenden Graphen  $G_f^z$  und  $G_F^z$ .

*Beweis.* Wir betrachten die Abbildung

$$\phi : \begin{pmatrix} \mu \\ f_{n,\omega} \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} \mu' \\ F_{n,\omega} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mu \\ f_{n,\omega} \Leftrightarrow \mathcal{C}^\bullet \mu^{\frac{n-1}{n}} \end{pmatrix} \quad (3.151)$$

mit der Konstanten  $\mathcal{C}^\bullet = \mathcal{C}_{n-1}(\Phi(1; \omega))^{-\frac{n-1}{n}} N r^{n-1} / (N r^{n-1} \Leftrightarrow 1)$ , sowie deren Umkehrabbildung

$$\phi^{-1} : \begin{pmatrix} \mu' \\ F_{n,\omega} \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} \mu \\ f_{n,\omega} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mu' \\ F_{n,\omega} + \mathcal{C}^\bullet \mu'^{\frac{n-1}{n}} \end{pmatrix} \quad (3.152)$$

Dann gilt offensichtlich  $\phi(G_f) = G_F$ . Die Abbildungen  $\phi$  und  $\phi^{-1}$  sind offenbar stetig differenzierbar, und man hat die JAKOBI-Matrizen

$$\frac{\partial \phi(\mu', F_{n,\omega})}{\partial(\mu', F_{n,\omega})} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ \Leftrightarrow \frac{n-1}{n} \mathcal{C}^\bullet \mu'^{-\frac{1}{n}} & 1 \end{pmatrix}, \quad \text{sowie} \quad \frac{\partial \phi^{-1}(\mu, f_{n,\omega})}{\partial(\mu, f_{n,\omega})} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ \frac{n-1}{n} \mathcal{C}^\bullet \mu^{-\frac{1}{n}} & 1 \end{pmatrix}. \quad (3.153)$$

Es gilt daher  $|\phi'|^2 = |\partial \phi(\mu', F_{n,\omega}) / \partial(\mu, f_{n,\omega})|^2 < +\infty$ , sowie  $|(\phi^{-1})'|^2 < +\infty$ , da  $\mu \in (a, b)$  und  $a \neq 0$ . Somit ist Korollar 1.4.8 anwendbar, und es folgt der erste Teil der Behauptung.

Der zweite Teil der Behauptung folgt ebenfalls, da die Menge aller Punkte, die die Sprünge der Funktion  $f_{n,\omega}$  im Intervall  $(a, b)$  bilden durch die Abbildung  $\phi$  auf die entsprechende Menge der Funktion  $F_{n,\omega}$  abgebildet wird. Entsprechendes gilt für die Abbildung  $\phi'$ . Korollar 1.4.8 ist daher auch in diesem Fall anwendbar.  $\square$

**Satz 3.2.29** *Für die MINKOWSKI-Dimension des Graphen  $G_g$  der Funktion*

$$g_{n,\omega}(x) = f_{n,\omega}(\mu) \mu^{-\frac{D}{n}} + \frac{N r^n}{1 \Leftrightarrow N r^n} \mu^{1-\frac{D}{n}} \quad \text{mit} \quad \mu = \Phi(\lambda_0; \omega) r^{-n\{x - \ln \Phi(\lambda_0; \omega) / \ln r^n\}} \quad (3.154)$$

auf einem beliebigen beschränkten Intervall  $(a, b) \subset \mathbb{R}_0^+$  gilt:

$$\tilde{D}(G_g) = \tilde{D}(G_f) \quad \text{und} \quad \tilde{D}(G_g^z) = \tilde{D}(G_f^z). \quad (3.155)$$

Hierbei bezeichnen  $G_f$  den Graphen der Funktion  $f_{n,\omega}$  im entsprechenden  $\mu$ -Intervall und  $G_g^z$  bzw.  $G_f^z$  die zusammenhängenden Graphen der Funktionen  $g_{n,\omega}$  bzw.  $f_{n,\omega}$ .  $\lambda_0$  bezeichnet den kleinsten Eigenwert des LAPLACE-Operators bezüglich  $\omega$  bei DIRICHLET-Randbedingungen.

*Beweis.* Wegen  $g_{n,\omega}(x+1) = g_{n,\omega}(x)$  genügt es die Funktion  $g_{n,\omega}$  im Intervall  $(0, 1)$  zu betrachten. Schließlich kann man in (3.154) noch die geschweifte Klammer weglassen, da ein Berücksichtigen von endlich vielen Unstetigkeitsstellen von  $\{x \Leftrightarrow \ln \Phi(\lambda_0; \omega) / \ln r^n\}$  im Intervall  $(a, b)$  bei der Dimensionsbestimmung nach Definition 1.4.1(b) zu einem Term der Ordnung  $O(\epsilon)$  führt, der auf die Bestimmung der MINKOWSKI-Dimension keinen weiteren Einfluß hat. Wir können daher  $\mu = \Phi(\lambda_0; \omega) r^{-nx}$  und  $(a, b) \subset (0, 1)$  annehmen und betrachten die Abbildung

$$\phi : \begin{pmatrix} \mu \\ f_{n,\omega} \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} x \\ g_{n,\omega} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \ln(\mu / \Phi(\lambda_0; \omega)) / \ln \frac{1}{r^n} \\ f_{n,\omega} \mu^{-D/n} + \frac{N r^n}{1 - N r^n} \mu^{1-D/n} \end{pmatrix} \quad (3.156)$$

und deren Umkehrabbildung

$$\phi^{-1} : \begin{pmatrix} x \\ g_{n,\omega} \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} \mu \\ f_{n,\omega} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \Phi(\lambda_0; \omega) r^{-nx} \\ g_{n,\omega} (\Phi(\lambda_0; \omega))^{D/n} N^x \Leftrightarrow \frac{Nr^n}{1-Nr^n} \Phi(\lambda_0; \omega) r^{-nx} \end{pmatrix} \quad (3.157)$$

Durch (3.154) wird ein Intervall  $(a, b) \subset (0, 1)$  auf  $(\mu_{\min}, \mu_1) \cup (\mu_2, \mu_{\max})$  abgebildet, so daß für  $x \in (a, b)$  dann  $\mu \in (\mu_{\min}, \mu_{\max})$  gilt, wobei  $\mu_{\min}$  und  $\mu_{\max}$  durch (3.72) gegeben sind. Die Abbildungen  $\phi$  und  $\phi^{-1}$  sind stetig differenzierbar mit den beiden Jakobimatrizen

$$\frac{\partial \phi(x, g_{n,\omega})}{\partial (\mu, f_{n,\omega})} = \begin{pmatrix} (\ln \frac{1}{r^n})^{-1} \mu^{-1} & 0 \\ \Leftrightarrow \frac{D}{n} f_{n,\omega} \mu^{-\frac{D}{n}-1} + (1 \Leftrightarrow \frac{D}{n}) \frac{Nr^n}{1-Nr^n} \mu^{-\frac{D}{n}} & \mu^{-\frac{D}{n}} \end{pmatrix} \quad (3.158)$$

und

$$\frac{\partial \phi^{-1}(\mu, f_{n,\omega})}{\partial (x, g_{n,\omega})} = \begin{pmatrix} \Phi(\lambda_0; \omega) \ln \frac{1}{r^n} & 0 \\ g_{n,\omega} (\Phi(\lambda_0; \omega))^{\frac{D}{n}} N^x \ln N \Leftrightarrow \frac{Nr^n}{1-Nr^n} \Phi(\lambda_0; \omega) r^{-nx} \ln \frac{1}{r^n} & (\Phi(\lambda_0; \omega))^{\frac{D}{n}} N^x \end{pmatrix}. \quad (3.159)$$

Es gilt daher  $\phi(G_f) = G_g$  und  $\phi^{-1}(G_g) = G_f$ , und man hat  $|\phi'|^2 < +\infty$ , sowie  $|(\phi^{-1})'|^2 < +\infty$ , da für  $\mu \in (\mu_{\min}, \mu_{\max})$  und  $x \in (0, 1)$  alle Elemente in den Jakobimatrizen beschränkte sind, wegen  $\mu_{\min} = \Phi(\lambda_0; \omega) > 0$ . Mit Korollar 1.4.8 erhalten wir den ersten Teil der Behauptung.

Der zweite Teil der Behauptung folgt ebenfalls, da  $\Sigma_f$  (=Menge aller Punkte, die die Sprünge der Funktion  $f_{n,\omega}$  im Intervall  $(a, b)$  bilden) auf das entsprechende  $\Sigma_g$  der Funktion  $g_{n,\omega}$  durch  $\phi$  abgebildet wird. Umgekehrt wird  $\Sigma_g$  durch  $\phi^{-1}$  auf  $\Sigma_f$  abgebildet, d.h. es gilt  $\phi(\Sigma_f) = \Sigma_g$  bzw.  $\phi^{-1}(\Sigma_g) = \Sigma_f$ . Korollar 1.4.8 ist daher auch hier anwendbar.  $\square$

Abschließend diskutieren wir die Funktion  $p_n$  aus Satz 3.1.2. Denn zwischen den Funktionen  $g_{n,\omega}$  und  $p_n$  besteht ein enger Zusammenhang, wenn als Grundgebiet ein  $n$ -dimensionaler Würfel gewählt wird:

**Lemma 3.2.30** *Als Grundgebiet  $\omega$  werde ein  $n$ -dimensionaler Würfel  $Q$  der Kantenlänge 1 gewählt. Ferner sei  $r = 1/2$  und  $N = 2^D$ . Dann gilt:*

$$g_{n,Q}(x + \log_2 \mathcal{B}_n^{1/n}) = 2^{-D} \mathcal{B}_n^{D/n} p_n(x), \quad \forall x \geq 0 \quad (3.160)$$

*Beweis.* Aufgrund  $\mathcal{N}(\lambda; Q) = \mathcal{K}_n(\sqrt{\lambda}/\pi)$  und Definition 3.2.1 gilt offenbar für die geschweifte Klammer:  $\{x\}_{n,Q} = x \Leftrightarrow \mathcal{N}((\Phi(1; Q))^{-2/n} x^{2/n}; Q) = x \Leftrightarrow \mathcal{K}(2\mathcal{B}_n^{-1/n} x^{1/n})$  für alle  $x \geq 0$ . Mit Definition 3.2.6 folgt daher, wenn wir  $r = 1/2$  und  $N = 2^D$  setzen:

$$\begin{aligned} g_{n,Q}(x + \log_2 \mathcal{B}_n^{1/n}) &= \sum_{i=-\infty}^{\infty} 2^{D(x-i)} \mathcal{B}_n^{\frac{D}{n}} \{2^{n(x-i)} \mathcal{B}_n\}_{n,Q} \\ &= \sum_{q=-\infty}^{\infty} 2^{D(x-q)} 2^{-D} \mathcal{B}_n^{\frac{D}{n}} \{2^{n(x-q)} 2^{-n} \mathcal{B}_n\}_{n,Q} \\ &= 2^{-D} \mathcal{B}_n^{\frac{D}{n}} \sum_{q=-\infty}^{\infty} 2^{D(x-q)} (2^{-n} \mathcal{B}_n 2^{n(x-q)} \Leftrightarrow \mathcal{K}_n(2^{x-q})) \\ &= 2^{-D} \mathcal{B}_n^{\frac{D}{n}} p_n(x), \end{aligned} \quad (3.161)$$



aufgrund der Definition von  $p_n$ .  $\square$

Offensichtlich gilt für die MINKOWSKI-Dimension der Graphen der Funktionen  $p_n$  und  $g_{n,\omega}$  der folgende Satz:

**Satz 3.2.31** *Sei  $G_p$  der Graph der Funktion  $p_n$  auf einem beliebigen Intervall  $(a, b) \subset \mathbb{R}_0^+$  und  $G_g$  der Graph der Funktion  $g_{n,\omega}$  mit  $r = 1/2$  und  $N = 2^D$ , wobei  $D \in (n \Leftrightarrow 1, n)$  auf dem Intervall  $(a + \log_2 \mathcal{B}_n^{1/n}, b + \log_2 \mathcal{B}_n^{1/n})$ . Dann gilt  $\tilde{D}(G_p) = \tilde{D}(G_g)$ .*

*Bemerkung.* Abbildungen der Graphen der Funktionen  $f_{n,\omega}$ ,  $F_{n,\omega}$  und  $g_{n,\omega}$  zu den in Anhang B behandelten Modellsysteme sind in Anhang B.9 ab Seite 116 zusammengestellt.

### 3.2.5 Schwingungen Cantor-ähnlicher Saiten

Wir betrachten in diesem Abschnitt die einfachsten Modellsysteme, die man sich vorstellen kann. Dies sind schwingende Saiten mit fraktalem Rand. Mit  $H_0^1(\Omega)$  als dem zugehörigen Randwertraum von  $\Leftrightarrow\Delta$  bei DIRICHLET-Randbedingungen auf dem Rand  $\cdot = \partial\Omega$  sind die Eigenfunktionen  $\phi_i(x)$  einer Saite  $(a, b)$  gegeben durch

$$\phi_i(x) = \sin(\sqrt{\lambda_i}x) \quad \text{mit} \quad \lambda_i = \frac{i^2\pi^2}{(b \Leftrightarrow a)^2}, \quad i \in \mathbb{N} \quad (3.162)$$

als den zugehörigen Eigenwerten. Wir schreiben kurz  $f(\mu) := f_{1,(0,1)} = \sum_{i=0}^{\infty} N^{-i} \{r^{-i}\mu\}$ . Wegen  $0 \leq \{\nu\} < 1$  für alle  $\nu \geq 0$  folgt nun unmittelbar:

**Korollar 3.2.32** *Die Funktion  $f$  ist beschränkt, und es gilt die Abschätzung*

$$0 \leq f(\mu) < \frac{N}{N \Leftrightarrow 1}, \quad \forall \mu \geq 0. \quad (3.163)$$

Es stellt sich heraus, daß für den eindimensionalen Fall weitergehende Aussagen, insbesondere über den Graphen der Funktion  $f$ , möglich sind (vgl. hierzu Abschnitt 3.2.6).

Zuvor geben wir jedoch einen Satz über die MINKOWSKI-Dimension und die Zustandszahlfunktion CANTOR-ähnlichen Saite an, da wir in diesem Fall sehr einfach den unteren und oberen MINKOWSKI-Inhalt des Randes, sowie eine explizite Abschätzung für die Zustandszahlfunktion bestimmen können.

**Satz 3.2.33** *Es sei  $\Omega \subset \mathbb{R}$  ein beschränktes offenes Gebiet, welches aus  $n_i = n_0 N^i$  paarweise disjunkten Intervallen der Länge  $l_i = l_0 r^i$ ,  $i = 1, 2, \dots$  besteht, wobei  $N = 2, 3, \dots$ ,  $r \in (0, 1)$ . Desweiteren seien  $n_0 \in \mathbb{Q}$  und  $l_0 > 0$  so gewählt, daß  $\sum_{i=1}^{\infty} n_i l_i = 1$  und  $n_i \in \mathbb{N}$  für alle  $i \geq 1$ . Dann gilt:*

(a) *Der Rand  $\cdot = \partial\Omega$  ist im Sinne von Definition 1.4.1(a) nicht MINKOWSKI-meßbar und besitzt bezüglich  $\Omega$  den unteren bzw. oberen MINKOWSKI-Inhalt*

$$\mathcal{M}_*(D; \cdot) = \frac{a}{1 \Leftrightarrow D} \left( \frac{1 \Leftrightarrow D}{aD} \right)^D \left( \frac{2}{l_0} \right)^{1-D} \quad \text{bzw.} \quad \mathcal{M}^*(D; \cdot) = (a + 1) \left( \frac{2}{l_0} \right)^{1-D}, \quad (3.164)$$

wobei

$$a = \frac{1 \Leftrightarrow Nr}{Nr \Leftrightarrow r}, \quad \text{und} \quad D = D(, ) = \frac{\ln N}{\ln \frac{1}{r}} \quad (3.165)$$

die MINKOWSKI-Dimension von  $\Omega$ , bezüglich  $\Omega$  darstellt.

(b) Für die Zustandszahlfunktion  $\mathcal{N}$  bezüglich des Eigenwertproblems (3.1) gilt:

$$\left| N(\lambda) \Leftrightarrow \frac{\sqrt{\lambda}}{\pi} + n_0 l_0^D \left( f(\mu) \mu^{-D} + \frac{Nr}{1 \Leftrightarrow Nr} \mu^{1-D} \right) \pi^{-D} \lambda^{\frac{D}{2}} \right| < n_0 \frac{N}{N \Leftrightarrow 1}, \quad \forall \lambda \geq 0, \quad (3.166)$$

mit  $\mu = r^{-\{x\}}$  und  $r^{-x} = l_0 \sqrt{\lambda} / \pi$ .

*Bemerkung.* Für  $N = 2, r = 1/3, n_0 = 1/2$  und  $l_0 = 1$  erhält man die in der Literatur häufig anzutreffende Standard-CANTOR-Saite (auch triadische CANTOR-Saite genannt) [41, S. 91]. (Siehe hierzu auch Anhang B.1.)

*Beweis.* (a) Zur Bestimmung der MINKOWSKI-Dimension sei  $l_1/2 > \epsilon > 0$  beliebig und  $i_0(\epsilon) = \max\{i \geq 1 : 2\epsilon \leq l_i\} = \lfloor \ln \frac{2\epsilon}{l_0} / \ln r \rfloor = \ln \frac{2\epsilon}{l_0} / \ln r \Leftrightarrow \{\ln \frac{2\epsilon}{l_0} / \ln r\} =: \ln \frac{2\epsilon}{l_0} / \ln r \Leftrightarrow \{\hat{\epsilon}\}$ , für die innere  $\epsilon$ -Umgebung von  $\Omega$ , bezüglich  $\Omega$ :

$$|\epsilon \cap \Omega| = 2n_0 \sum_{i=1}^{i_0} N^i \epsilon + n_0 l_0 \sum_{i=i_0+1}^{\infty} (Nr)^i = 2n_0 N \frac{N^{i_0} \Leftrightarrow 1}{N \Leftrightarrow 1} \epsilon + n_0 l_0 \frac{Nr}{1 \Leftrightarrow Nr} (Nr)^{i_0}. \quad (3.167)$$

Aufgrund von  $\sum_{i=1}^{\infty} n_i l_i = n_0 l_0 \sum_{i=1}^{\infty} (Nr)^i = n_0 l_0 Nr / (1 \Leftrightarrow Nr) \stackrel{!}{=} 1$  folgt daher

$$\epsilon^{-(1-d)} |\epsilon \cap \Omega| = 2n_0 N \frac{N^{i_0} \Leftrightarrow 1}{N \Leftrightarrow 1} \epsilon^d + (Nr)^{i_0} \epsilon^{d-1}. \quad (3.168)$$

Wegen

$$N^{i_0} = N^{-\hat{\epsilon}} \exp \left( \ln N \frac{\ln \frac{2\epsilon}{l_0}}{\ln r} \right) = N^{-\hat{\epsilon}} \left( \frac{2}{l_0} \right)^{\frac{\ln N}{\ln r}} \epsilon^{\frac{\ln N}{\ln r}} \quad (3.169)$$

und

$$(Nr)^{i_0} = (Nr)^{-\hat{\epsilon}} \exp \left( (\ln N + \ln r) \frac{\ln \frac{2\epsilon}{l_0}}{\ln r} \right) = (Nr)^{-\hat{\epsilon}} \left( \frac{2}{l_0} \right)^{1 + \frac{\ln N}{\ln r}} \epsilon^{1 + \frac{\ln N}{\ln r}}. \quad (3.170)$$

folgt

$$\epsilon^{-(1-d)} |\epsilon \cap \Omega| = L(\epsilon) \epsilon^{d + \frac{\ln N}{\ln r}} \Leftrightarrow 2n_0 \frac{N}{N \Leftrightarrow 1} \epsilon^d \quad (3.171)$$

mit

$$L(\epsilon) = \left( n_0 l_0 \frac{N}{N \Leftrightarrow 1} N^{-\hat{\epsilon}} + (Nr)^{-\hat{\epsilon}} \right) \left( \frac{2}{l_0} \right)^{1 + \frac{\ln N}{\ln r}} \quad (3.172)$$

Aufgrund Definition 1.4.1(a) besitzt der Rand von  $\Omega$  daher bezüglich  $\Omega$  die MINKOWSKI-Dimension  $D = D(, ) = \ln N / \ln \frac{1}{r}$ , wie behauptet.

Da  $L(\epsilon)$  eine in  $\ln \epsilon$  periodische Funktion ist, sind die Ränder der betrachteten Gebiete nicht MINKOWSKI-messbar. Wir können aber den unteren und oberen MINKOWSKI-Inhalt bestimmen. Dazu müssen wir  $\mathcal{M}_*(D, G) = \liminf_{\epsilon \rightarrow 0^+} L(\epsilon)$  bzw.  $\mathcal{M}^*(D, G) = \limsup_{\epsilon \rightarrow 0^+} L(\epsilon)$

auswerten. Wir wählen  $\epsilon = \frac{l_0}{2} r^n r^\alpha$  mit  $n = 0, 1, 2, \dots$ , sowie  $0 \leq \alpha < 1$  als Parameter. Dann durchläuft  $\epsilon$  für  $n \rightarrow +\infty$  alle Werte größer Null, und es folgt

$$\{\ln \frac{2\epsilon}{l_0} / \ln r\} = \{\ln r^{\alpha+n} / \ln r\} = \{\alpha + n\} = \alpha \quad (3.173)$$

und damit  $\mathcal{M}_*(D, G) = \inf_{\alpha \in [0,1]} m(\alpha)$  bzw.  $\mathcal{M}^*(D, G) = \sup_{\alpha \in [0,1]} m(\alpha)$  mit

$$m(\alpha) = \left( aN^{-\alpha} + (Nr)^{-\alpha} \right) \left( \frac{2}{l_0} \right)^{1-D} \quad \text{und} \quad a = n_0 l_0 \frac{N}{N \Leftrightarrow 1} = \frac{1 \Leftrightarrow Nr}{Nr} \frac{N}{N \Leftrightarrow 1} = \frac{1 \Leftrightarrow Nr}{Nr \Leftrightarrow r}, \quad (3.174)$$

wegen  $\sum_{i=1}^{\infty} n_i l_i = 1$ . Wir suchen das Infimum bzw. Supremum der Funktion  $m$  im Intervall  $[0, 1)$ : Es gilt

$$m(\alpha = 0) = m(\alpha \rightarrow 1^-) = m(\alpha = 1) = (a + 1)(2/l_0)^{1-D}. \quad (3.175)$$

Daher verschwindet nach dem Satz von Rolle [60, S. 255] die Ableitung  $m'$  an mindestens einer Stelle  $\alpha_e \in (0, 1)$ ,  $m'(\alpha_e) = 0$ :

$$m'(\alpha_e) = \left( aN^{-\alpha_e} \ln \frac{1}{N} + (Nr)^{-\alpha_e} \ln \frac{1}{Nr} \right) (2/l_0)^{1-D} \stackrel{!}{=} 0. \quad (3.176)$$

Wir isolieren  $\alpha_e$  und erhalten mit  $D = \ln N / \ln \frac{1}{r}$ :

$$\alpha_e = \ln \left( \Leftrightarrow a \frac{\ln N}{\ln(Nr)} \right) / \ln \frac{1}{r} = \ln \left( \frac{aD}{1 \Leftrightarrow D} \right) / \ln \frac{1}{r} \in (0, 1). \quad (3.177)$$

Wir erhalten somit für die Ableitung  $m'$ :

$$m'(\alpha) = N^{-\alpha} \left( a \frac{\ln N}{\ln(Nr)} + r^{-\alpha} \right) \ln \frac{1}{Nr} = N^{-\alpha} (r^{-\alpha_e} \Leftrightarrow r^{-\alpha}) \ln(Nr). \quad (3.178)$$

Aufgrund von  $m'(\alpha) < 0$  für  $\alpha < \alpha_e$  und  $m'(\alpha) > 0$  für  $\alpha > \alpha_e$  befindet sich an der Stelle  $\alpha = \alpha_e$  ein Minimum, so daß mit  $N^{-\alpha_e} = \left( \frac{aD}{1-D} \right)^{-D}$  und  $(Nr)^{-\alpha_e} = \left( \frac{aD}{1-D} \right)^{1-D}$ , sowie  $\mathcal{M}_*(D; , ) = m(\alpha_e)$  folgt:

$$\begin{aligned} \mathcal{M}_*(D; , ) &= \left( a \left( \frac{1 \Leftrightarrow D}{aD} \right)^D + \left( \frac{1 \Leftrightarrow D}{aD} \right)^{D-1} \right) \left( \frac{2}{l_0} \right)^{1-D} \\ &= \left( a + \frac{aD}{1 \Leftrightarrow D} \right) \left( \frac{1 \Leftrightarrow D}{aD} \right)^D \left( \frac{2}{l_0} \right)^{1-D}. \end{aligned} \quad (3.179)$$

Der obere MINKOWSKI-Inhalt ergibt sich dann mit  $\mathcal{M}^*(D; , ) = m(\alpha = 0) = m(\alpha \rightarrow 1^-)$ .

(b) Die Aussage des zweiten Teils folgt, wenn wir als Grundgebiet ein Intervall der Länge  $l_0$  wählen,  $\omega = (0, l_0)$ , und Satz 3.2.9, sowie Korollar 3.2.32 anwenden.  $\square$

### 3.2.6 Diskussion der Funktion $f$

Über die uns schon bekannten Eigenschaften der Funktion  $f$  gibt der nachfolgende Satz Auskunft:

**Satz 3.2.34**

(a)

Der Graph der Funktion  $f : [0, \frac{1}{r}) \rightarrow [0, \frac{N}{N-1})$  ist selbstähnlich bezüglich der linearen Abbildung

$$A = \begin{pmatrix} r & 0 \\ r & \frac{1}{N} \end{pmatrix} \quad (3.180)$$

(b)  $f$  erfüllt die Funktionalgleichung

$$f(r\mu) = \{r\mu\} + \frac{1}{N}f(\mu), \quad \forall \mu \geq 0. \quad (3.181)$$

(c) Der zusammenhängende Graph der Funktion  $f$  besitzt auf jedem beschränkten Intervall  $(a, b) \in \mathbb{R}_0^+$  die MINKOWSKI-Dimension

$$\tilde{D}(G^z) = 2 \Leftrightarrow D = 2 \Leftrightarrow \ln N / \ln \frac{1}{r}. \quad (3.182)$$

*Bemerkung.* Die Dimension des Randes von  $\Omega$  spiegelt sich in dem Graph von  $f$  wider. Wegen  $0 < D < 1$  gilt  $1 < \tilde{D}(G^z) < 2$ , und es gibt daher keine Beschränkung für die möglichen Werte für  $\tilde{D}(G^z) \in (1, 2)$ . Desweiteren gilt: Je fraktaler der Rand des betrachteten Gebietes ist, d.h.  $\Theta = 2 \Leftrightarrow D \rightarrow 2^-$ , desto weniger fraktal ist der Graph von  $f$ , da dann  $\tilde{D}(G^z) \rightarrow 1^+$ .

Darüberhinaus besitzt der Graph der Funktion  $f$  noch weitergehende Eigenschaften, die wir im folgenden diskutieren werden.

**Satz 3.2.35 (Approximative Kongruenz des Graphen von  $f$ )** Es sei  $r = p/q \in \mathbb{Q}$  mit  $p, q \in \mathbb{N}$  und  $\text{ggT}(p, q) = 1$ . Ferner seien  $k \in \mathbb{N}_0$ ,  $l, m \in \mathbb{N}$  und  $I \geq l$ . Dann gilt mit  $d = mp^{I+k}q^{-l}$ :

$$f(\mu + d) = f(\mu) + C_l + R_I, \quad \forall \mu \in [0, \min_{i=0, \dots, l-1} r^i(1 \Leftrightarrow \{r^{-i}d\})] \quad (3.183)$$

mit

$$C_l = \sum_{i=0}^{l-1} N^{-i} \{r^{-i}d\} = \text{const.} \quad \text{und} \quad R_I = R_I(\mu + d) \Leftrightarrow R_I(\mu), \quad (3.184)$$

wobei

$$R_I = \sum_{i=I+1}^{\infty} N^{-i} \{r^{-i}\mu\} \quad \text{mit} \quad |R_I| < \frac{1}{N} \Leftrightarrow \frac{1}{N^I}. \quad (3.185)$$

*Bemerkungen.* Dies erklärt den optischen Eindruck des Graphen von  $f$ : Es treten immer wieder ähnliche Strukturen auf, was einer approximativen Kongruenz gleichkommt. Zur approximativen Kongruenz siehe Abbildung 3.7.

*Beweis.* Mit  $d = mp^{I+k}q^{-l}$  gilt für alle  $I \geq l$ :

$$\begin{aligned} f_I(\mu + d) &= \sum_{i=0}^I N^{-i} \{r^{-i}\mu + mq^{i-l}p^{I+k-i}\} = \sum_{i=0}^{l-1} N^{-i} \{r^{-i}\mu + r^{-i}d\} + \sum_{i=l}^I N^{-i} \{r^{-i}\mu\} \\ &= f_I(\mu) + \sum_{i=0}^{l-1} N^{-i} (\{r^{-i}\mu + r^{-i}d\} \Leftrightarrow \{r^{-i}\mu\}). \end{aligned} \quad (3.186)$$

Wir wenden die Identität  $\{\nu + x\} \Leftrightarrow \{\nu\} = \{x\}$  an, die für alle  $\nu \in [0, 1 \Leftrightarrow \{x\})$  und  $x \geq 0$  erfüllt ist. (Wegen  $\nu \in [0, 1 \Leftrightarrow \{x\})$  gilt nämlich  $[x] \leq \nu + x < 1 \Leftrightarrow \{x\} + x = 1 + [x]$ , also  $0 \leq \nu + x \Leftrightarrow [x] < 1$ , was  $\{\nu + x\} = \{\nu + x \Leftrightarrow [x]\} = \nu + x \Leftrightarrow [x] = \{\nu\} + \{x\}$  zur Folge hat.)

$$f(\mu + d) = f_I(\mu + d) + R_I(\mu + d) = f_I(\mu) + C_l + R_I(\mu + d) = f(\mu) + C_l + R_I. \quad \square \quad (3.187)$$

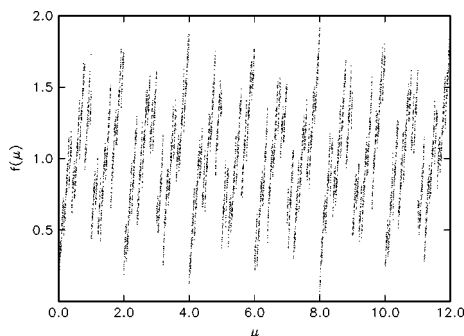


Abbildung 3.7: Approximative Periodizität der Funktion  $f$  mit  $N = 2$ ,  $r = 2/5$ .

Aus der approximativen Kongruenz läßt sich als Spezialfall eine approximative Periodizität herleiten:

**Korollar 3.2.36 (Approximative Periodizität des Graphen der Funktion  $f$ )**

Sei  $r = p/q \in \mathbb{Q}$  mit  $p, q \in \mathbb{N}$  und  $\text{ggT}(p, q) = 1$ . Dann erfüllt der Graph der Funktion  $f$  mit  $I \in \mathbb{N}$  eine approximative Periodizität:

$$f(\mu + p^I) = f(\mu) + R_I, \quad \forall \mu \geq 0, \quad \text{mit} \quad |R_I| < \frac{1}{N \Leftrightarrow 1} \frac{1}{N^I}. \quad (3.188)$$

*Beweis.* Wir wenden Satz 3.2.35 mit  $k = 0$ ,  $m = q$  und  $l = 1$ , also  $d = p^I$  an:

$$f(\mu + p^I) = f(\mu) + C_l + R_I, \quad \forall \mu \in [0, 1 \Leftrightarrow \{d\}) = [0, 1), \quad (3.189)$$

wobei in diesem Fall  $C_l$  verschwindet. Diese Identität gilt sogar für alle  $\mu \geq 0$ , da in diesem Fall  $\{\mu + d\} \Leftrightarrow \{\mu\} = 0$  für alle  $\mu \geq 0$  (siehe Beweis von Satz 3.2.35).  $\square$

*Bemerkungen.* Zur approximativen Periodizität siehe Abbildung 3.7.

Für reelles  $r \in (0, 1)$  gilt eine analoge approximative Kongruenz. In diesem Fall ist  $d > 0$  beliebig und  $\mu_{\max}$  wird im allgemeinen sehr kleine Werte annehmen, was aber auch bei rationalen  $r$  möglich ist. Je weiter man den Bereich von  $r$  einschränkt, desto mehr Aussagen lassen sich über den Graph von  $f$  machen.

**Satz 3.2.37 (Exakte Kongruenzeigenschaft der Funktion  $f$ )** Falls  $1/r \in \mathbb{N}$ , so ist  $f$  1-periodisch in  $\mu$ , und der Graph von  $f$  erfüllt für alle  $n \in \mathbb{N}_0$  mit  $0 \leq n \leq 1/r \Leftrightarrow 1$  und alle  $\mu \in [0, 1 \Leftrightarrow nr)$  die exakte Kongruenzeigenschaft

$$f(\mu + nr) = f(\mu) + nr. \quad (3.190)$$

*Beweis.* Die 1-Periodizität der Funktion  $f$  für  $1/r \in \mathbb{N}$  ist offensichtlich. Die zweite Behauptung folgt unmittelbar mit den Eigenschaften der geschweiften Klammer und der Funktionalgleichung von  $f$ , da dann

$$\begin{aligned} f(\mu + nr) &= \{\mu + nr\} + \sum_{i=1}^{\infty} N^{-i} \{r^{-i}\mu + nr^{1-i}\} = \{\mu + nr\} + \frac{1}{N} f(\mu/r) \\ &= f(\mu) + \{\mu + nr\} \Leftrightarrow \{\mu\} = f(\mu) + nr \end{aligned} \quad (3.191)$$

für alle  $\mu \in [0, 1 \Leftrightarrow \{nr\}) = [0, 1 \Leftrightarrow nr)$ , da  $0 \leq n \leq \frac{1}{r} \Leftrightarrow 1$  vorausgesetzt wurde.  $\square$

**Satz 3.2.38 (Nichtlineare Selbstähnlichkeit der Funktion  $g$ )** Der Graph der Funktion

$$g(x) = f(\mu)\mu^{-D} + \frac{Nr}{1 \Leftrightarrow Nr} \mu^{1-D} \quad \text{mit} \quad \mu = r^{-\{x\}} \quad (3.192)$$

und  $1/r \in \mathbb{N}$  ist für alle  $x \in [0, 1)$  selbstähnlich bezüglich der nichtlinearen Abbildung

$$\begin{aligned} x &\mapsto x' = \frac{\ln(r^{1-x} + 1 \Leftrightarrow r)}{\ln \frac{1}{r}} \\ g(x) &\mapsto g(x') = \left( N^{x-1} g(x) + \frac{Nr \Leftrightarrow r}{1 \Leftrightarrow Nr} \right) (r^{1-x} + 1 \Leftrightarrow r)^{-D} \end{aligned} \quad (3.193)$$

*Beweis.* Für  $x \in [0, 1)$  gilt  $\mu = r^{-x}$ . Eine affine Transformation  $\mu \rightarrow \mu' = r\mu + 1 \Leftrightarrow r$  entspricht dann mit  $\mu' = r^{-x'}$  wegen  $r^{-x'} = \mu' = r\mu + 1 \Leftrightarrow r = r^{1-x} + 1 \Leftrightarrow r$  einer nichtlinearen Transformation  $x \rightarrow x' = \ln(r^{1-x} + 1 \Leftrightarrow r) / \ln \frac{1}{r}$ . Für alle  $x \in [0, 1)$  gilt dann  $x' \in [0, \ln(2 \Leftrightarrow r) / \ln \frac{1}{r}) \subset [1, 2)$ , wegen  $r \in (0, 1)$ . Mit dem nichtlinearen Zusammenhang (3.192) zwischen den Funktionen  $f$  und  $g$ , sowie der Funktionalgleichung der Funktion  $f$  erhalten wir

$$g(x') = f(\mu')\mu'^{-D} + \frac{Nr}{1 \Leftrightarrow Nr} \mu'^{1-D} = \left( N (f(r\mu') \Leftrightarrow r\mu') + \frac{Nr}{1 \Leftrightarrow Nr} \mu'^{1-D} \right) \mu'^{-D}, \quad (3.194)$$

wenn wir  $r\mu' \in [0, 1)$  beachten. Wir werten nun  $f(r\mu')$  durch zweifaches Anwenden der Funktionalgleichung aus und berücksichtigen  $\{m\mu'\} = \mu' \Leftrightarrow 1$ , da  $\mu' \in [1, 2)$ , sowie  $\frac{1}{r} \Leftrightarrow 1 \in \mathbb{N}$  und die 1-Periodizität von  $f$ :

$$f(r\mu') = \{r\mu'\} + \frac{1}{N} \{\mu'\} + \frac{1}{N^2} f(\mu'/r) = r\mu' + \frac{1}{N} (\mu' \Leftrightarrow 1) + \frac{1}{N^2} f(\mu). \quad (3.195)$$

Wir erhalten die nichtlineare Selbstähnlichkeit der Funktion  $g$ :

$$\begin{aligned}
g(x') &= \left( \mu' \Leftrightarrow 1 + \frac{1}{N} f(\mu) + \frac{Nr}{1 \Leftrightarrow Nr} \mu' \right) \mu'^{-D} \\
&= \left( \mu' \Leftrightarrow 1 + \frac{1}{N} \left( g(x) \Leftrightarrow \frac{Nr}{1 \Leftrightarrow Nr} \mu^{1-D} \right) \mu^D + \frac{Nr}{1 \Leftrightarrow Nr} \mu' \right) \mu'^{-D} \\
&= \left( \frac{1}{1 \Leftrightarrow Nr} \mu' + \frac{1}{N} g(x) \mu^D \Leftrightarrow \frac{r}{1 \Leftrightarrow Nr} \mu \Leftrightarrow 1 \right) \mu'^{-D} \\
&= \left( \frac{1}{N} N^x g(x) + \frac{\mu' \Leftrightarrow r \mu}{1 \Leftrightarrow Nr} \Leftrightarrow 1 \right) \mu'^{-D}. \quad \square
\end{aligned} \tag{3.196}$$

*Bemerkung.* Zur linearen bzw. nichtlinearen Selbstähnlichkeit der Funktionen  $f$  bzw.  $g$  siehe Abbildungen 3.8 und 3.9.

**Satz 3.2.39** *Der Graph der Funktion  $f$  auf dem Intervall  $[0, 1)$  ist, falls  $1/r \in \mathbb{N}$  gewählt wird, invariant unter den affinen Transformationen  $w_i : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ , die definiert sind durch  $w_i \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + (i \Leftrightarrow 1)r \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ , ( $i = 1, \dots, 1/r$ ), also*

$$\begin{aligned}
w_1 \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} r & 0 \\ r & \frac{1}{N} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \\
w_2 \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} r & 0 \\ r & \frac{1}{N} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + r \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \\
&\vdots \\
w_{1/r} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} r & 0 \\ r & \frac{1}{N} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + (1 \Leftrightarrow r) \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}
\end{aligned} \tag{3.197}$$

Er läßt sich durch alleinige Angabe dieser affinen Transformationen auf dem Intervall  $[0, 1)$  eindeutig rekonstruieren.

*Bemerkungen.* Damit ist der Graph von  $f$  sogar für alle  $\mu \geq 0$  eindeutig bestimmt, da die Funktion  $f$  wegen Satz 3.2.37 für  $1/r \in \mathbb{N}$  1-periodisch in  $\mu$  ist.

*Beweis.* Die Invarianz des Graphen unter den angegebenen affinen Transformationen folgen unmittelbar aus der exakten Kongruenzeigenschaft des Graphen der Funktion  $f$  (Satz 3.2.37). Wegen  $w_1(0, f(0)) = (0, f(0)/N)$  gilt  $f(0) = f(0)/N$  und damit  $f(0) = 0$  aufgrund von  $N \geq 2$  und da  $f$  eindeutig. Wir definieren nun rekursiv die folgenden Mengen:

$$\begin{aligned}
R_1 &= \{w_i(0, 0) : i = 0, 1, \dots, \frac{1}{r} \Leftrightarrow 1\} \\
R_2 &= \{w_i(x, y) : (x, y) \in R_1, i = 0, 1, \dots, \frac{1}{r} \Leftrightarrow 1\} \\
&\vdots \\
R_m &= \{w_i(x, y) : (x, y) \in R_{m-1}, i = 0, 1, \dots, \frac{1}{r} \Leftrightarrow 1\},
\end{aligned} \tag{3.198}$$

mit  $m \in \mathbb{N}$  beliebig. Man kann dann leicht zeigen, daß  $R_m$  alle Punkte  $(x, f(x))$  enthält, deren  $x$ -Komponente die  $1/r$ -adische Darstellung  $x = \sum_{i=1}^m p_i r^i$  mit  $p_i \in \{0, \dots, 1/r \Leftrightarrow 1\}$  besitzen.

Für  $m = 1$  hat man  $R_1 = \{(0, 0), (r, f(r)), \dots, ((1 \Leftrightarrow r), f(1 \Leftrightarrow r))\}$ . Die  $x$ -Komponenten der Elemente aus  $R_1$  besitzen also die Darstellung  $x = r p_1$  mit  $p_1 \in \{0, \dots, \frac{1}{r} \Leftrightarrow 1\}$ . Der

Beweis erfolgt dann durch Induktion nach  $m$ . Sei  $(x, f(x)) \in R_m$  beliebig. Dann besitzt  $x$  die  $1/r$ -adische Darstellung  $x = \sum_{i=1}^m p_i r^i$  mit  $p_i \in \{0, \dots, 1/r \Leftrightarrow 1\}$ . Anwendung der Abbildung  $A = \begin{pmatrix} r & 0 \\ r & 1/N \end{pmatrix}$  ergibt dann  $A \begin{pmatrix} x \\ f(x) \end{pmatrix} = (rx + p_0 r, rx + f(x)/N)^T = (x', f(x'))$  mit  $p_0 \in \{0, \dots, 1/r \Leftrightarrow 1\}$  und  $x' = \sum_{i=1}^m p_i r^{i+1} + p_0 r = \sum_{i=1}^{m+1} p_{i-1} r^i = \sum_{i=1}^{m+1} p'_i r^i$ , wobei  $p'_i = p_{i-1}$  gesetzt wurde. Daher enthält  $R_{m+1}$  alle Punkte  $(x, f(x))$ , deren  $x$ -Komponente die  $1/r$ -adische Darstellung  $x = \sum_{i=1}^{m+1} p'_i r^i$  mit  $p'_i \in \{0, \dots, 1/r \Leftrightarrow 1\}$  besitzen, wie behauptet.

Für  $m \rightarrow +\infty$  hat man  $\sum_{i=1}^{\infty} p_i r^i \in [0, 1]$ , wegen  $p_i \leq 1/r \Leftrightarrow 1$ , und da jede reelle Zahl aus dem Intervall  $[0, 1)$  eine eindeutige  $1/r$ -adische Darstellung besitzt, folgt nun unmittelbar die Behauptung des Satzes.  $\square$



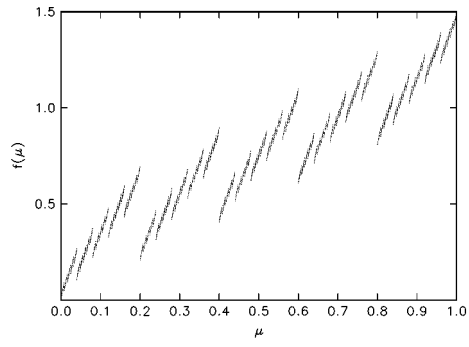


Abbildung 3.8: Lineare Selbstähnlichkeit der Funktion  $f$  mit  $N = 3$ ,  $r = 1/5$ .

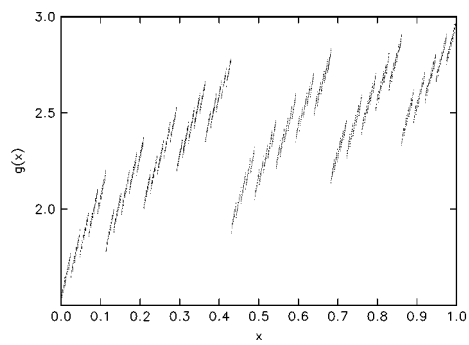


Abbildung 3.9: Nichtlineare Selbstähnlichkeit der Funktion  $g$  mit  $N = 3$ ,  $r = 1/5$ .

# Anhang A

## Behandlung einiger Grundgebiete

### A.1 $n$ -dimensionaler Würfel

**Lemma A.1.1** Sei  $\mathcal{N}(\lambda; Q)$  die Zustandzahlfunktion eines  $n$ -dimensionalen Würfels  $Q$  mit der Kantenlänge 1 bezüglich des LAPLACE-Operators bei DIRICHLET-Randbedingungen. Dann gilt:

$$\mathcal{N}(\lambda; Q) = \frac{\mathcal{B}_n}{(2\pi)^n} \lambda^{\frac{n}{2}} \Leftrightarrow \frac{n}{2} \frac{\mathcal{B}_{n-1}}{(2\pi)^{n-1}} \lambda^{\frac{n-1}{2}} + O(\lambda^\kappa), \quad \text{für } \lambda \rightarrow +\infty \quad (\text{A.1})$$

mit

$$\kappa = \begin{cases} 0 & \text{falls } n = 1 \\ 7/22 & \text{falls } n = 2 \\ 2/3 & \text{falls } n = 3 \\ 1 + \epsilon & \text{falls } n = 4 \text{ mit } \epsilon > 0 \text{ beliebig} \\ \frac{n-2}{2} & \text{falls } n \geq 5. \end{cases} \quad (\text{A.2})$$

Für den Beweis benötigen wir ein Lemma aus der Zahlentheorie, welches Aussagen über die Gitterpunkte in einem  $n$ -dimensionalen Ellipsoid macht [24, S. 132],[59, S. 301f],[20],[58]:

**Lemma A.1.2 (Gitterpunkte in einem  $n$ -dimensionalen Ellipsoid)** Es sei  $n \geq 1$  eine natürliche Zahl und

$$Q = \sum_{i,j=1}^n a_{ij} q_i q_j, \quad a_{ij} = a_{ji} \quad (\text{A.3})$$

eine positiv definit quadratische Form mit rationalen Koeffizienten und der Determinante  $\det Q = \det(a_{ij})$ . Ferner sei

$$A_Q(r) = \#\{(q_1, \dots, q_n) \in \mathbb{Z}^n : 0 \leq Q \leq r^2\} \quad (\text{A.4})$$

die Zahl der Gitterpunkte (Vektoren mit ganzzahligen Komponenten) im  $n$ -dimensionalen Ellipsoid  $Q \leq r^2$ , Dann bezeichnen wir

$$P_Q(r) = \frac{\mathcal{B}_n}{\sqrt{\det Q}} r^n \Leftrightarrow A_Q(r) \quad (\text{A.5})$$

als den sogenannten Gitterrest, wobei  $\mathcal{B}_n r^n / \sqrt{\det Q}$  das Ellipsoidvolumen darstellt, und es gilt:

$$P_Q = O(r^{2\kappa}) \quad \text{mit} \quad \kappa = \begin{cases} \frac{n}{2} \Leftrightarrow \frac{n}{n+1} & \text{falls } n = 1, 2, 3 \\ 1 + \epsilon & \text{falls } n = 4 \text{ mit } \epsilon > 0 \text{ beliebig} \\ \frac{n-2}{n} & \text{falls } n \geq 5. \end{cases} \quad (\text{A.6})$$

Hat man insbesondere  $a_{ij} = \delta_{ij}$  (Kronecker- $\delta$ ), so gilt die Abschätzung (A.6) mit  $\kappa = 7/22$ , falls  $n = 2$  (Gitterpunkte auf einer Kreisscheibe) und mit  $\kappa = 2/3$ , wenn  $n = 3$  (Gitterpunkte in einer Kugel).

*Beweis von Lemma A.1.1.* Die Eigenwerte  $\lambda_m$ ,  $m = (m_1, \dots, m_n) \in \mathbb{N}^n$  des LAPLACE-Operators für einen  $n$ -dimensionalen Würfel  $Q$  mit der Kantenlänge 1 bei DIRICHLET-Randbedingungen sind gegeben durch  $\lambda_m = \sum_{i=1}^n m_i^2 \pi^2$  mit  $m_i \in \mathbb{N}$  für alle  $i = 1, \dots, n$ . Daher gebe

$$\mathcal{K}_n(r) = \#\{(q_1, \dots, q_n) \in \mathbb{N}^n : \sum_{i=1}^n q_i^2 \leq r^2\} \quad (\text{A.7})$$

die Zahl der Gitterpunkte im positiven Quadranten in einer  $n$ -dimensionalen Kugel mit Radius  $r > 0$  um den Ursprung an. Mit  $A_n(r) = \#\{(q_1, \dots, q_n) \in \mathbb{Z}^n : \sum_{i=1}^n q_i^2 \leq r^2\}$  und  $P_n(r) = \mathcal{B}_n r^n \Leftrightarrow A_n(r)$  als dem Gitterrest folgt:

$$\begin{aligned} \mathcal{K}_n(r) &= \frac{\mathcal{B}_n}{2^n} r^n \Leftrightarrow n \frac{\mathcal{B}_{n-1}}{2^n} r^{n-1} + O(r^{n-2} + P_n(r) + P_{n-1}(r)) \\ &= \frac{\mathcal{B}_n}{2^n} r^n \Leftrightarrow n \frac{\mathcal{B}_{n-1}}{2^n} r^{n-1} + O(P_n(r)), \quad \text{für } r \rightarrow +\infty, \end{aligned} \quad (\text{A.8})$$

wegen  $P_n(r) = O(r^{2\kappa})$  und Lemma A.1.2. Die Behauptung folgt dann mit  $\mathcal{N}(\lambda; Q) = \mathcal{K}_n(\sqrt{\lambda}/\pi)$ .  $\square$

## A.2 Gleichseitiges Dreieck

**Lemma A.2.1** *Die Eigenwerte des LAPLACE-Operators bei DIRICHLET-Randbedingungen für ein gleichseitiges Dreiecks sind gegeben durch [49, S. 891f]:*

$$\lambda_{m,n} = \frac{16\pi^2}{27}(m^2 + n^2 \Leftrightarrow mn), \quad (m, n) \in \mathbb{Z}^2 \quad (\text{A.9})$$

mit den Nebenbedingungen

$$\begin{aligned} m + n &= 3k, \quad \text{für ein } k = \pm 1, \pm 2, \dots \\ 2m &\neq n \\ 2n &\neq m. \end{aligned} \quad (\text{A.10})$$

Die Multiplizität eines jeden Eigenwertes ist dabei gegeben durch  $\frac{1}{6} \times$  Anzahl der Darstellungsmöglichkeiten in (A.9) unter Berücksichtigung der Nebenbedingungen (A.10). Der kleinste Eigenwert ist  $\lambda_0 = 9 \frac{16\pi^2}{27}$ ; man erhält ihn z.B. mit  $(m, n) = (3, 3)$ .

*Bemerkung.* Eine Verletzung der beiden letzten Nebenbedingungen würde eine triviale Wellenfunktion zur Folge haben.

**Korollar A.2.2** Für die Zustandzahlfunktion  $\mathcal{N}(\lambda; \omega)$  eines gleichseitigen Dreiecks  $\omega$  mit Kantenlänge 1 gilt die asymptotische Entwicklung

$$\mathcal{N}(\lambda; \omega) = \frac{\sqrt{3}}{16\pi} \lambda \Leftrightarrow \frac{3}{4\pi} \sqrt{\lambda} + O(\lambda^{\frac{1}{3}}), \quad \text{für } \lambda \rightarrow +\infty. \quad (\text{A.11})$$

*Beweis.* Wir setzen in (A.9)  $m = 3k \Leftrightarrow n$  mit  $k \in \pm\mathbb{N}$  und erhalten:

$$\lambda_{k,n} = \frac{16}{27} \pi^2 \left( (3k \Leftrightarrow n)^2 + n^2 \Leftrightarrow (3k \Leftrightarrow n)n \right) = \frac{16}{9} \pi^2 (3k^2 \Leftrightarrow 3kn + n^2), \quad (\text{A.12})$$

wobei  $k \in \pm\mathbb{N}$ ,  $n \in \mathbb{Z}$  und  $k \neq n$ , sowie  $n \neq 2k$  aufgrund der beiden letzten Nebenbedingungen in (A.10).

Sei nun  $\mathcal{M}_2(r) = \#\{(q_1, q_2) \in \mathbb{Z} : 3q_1^2 \Leftrightarrow 3q_1q_2 + q_2 \leq r^2\}$  und  $A_1(r) = \#\{q_1 \in \mathbb{Z} : q_1^2 \leq r^2\}$ . Dann folgt:

$$\mathcal{N}(\lambda; \omega) = \frac{1}{6} \left( \mathcal{M}_2\left(\frac{3}{4} \frac{\sqrt{\lambda}}{\pi}\right) \Leftrightarrow 3A_1\left(\frac{3}{4} \frac{\sqrt{\lambda}}{\pi}\right) \right) + O(1) = \frac{1}{6} \mathcal{M}_2\left(\frac{3}{4} \frac{\sqrt{\lambda}}{\pi}\right) \Leftrightarrow \frac{3}{4\pi} \sqrt{\lambda} + O(1), \quad (\text{A.13})$$

für  $\lambda \rightarrow +\infty$ , da  $A_1(r) = 2r + O(1)$ , für  $r \rightarrow +\infty$ . Wir können nun Lemma A.1.2 mit  $n = 2$ , der Quadratischen Form  $Q = \sum_{i,j=1}^n a_{ij} q_i q_j$ , wobei  $(a_{ij}) = \begin{pmatrix} 3 & -3/2 \\ -3/2 & 1 \end{pmatrix}$  und  $\det Q = 3/4$ , anwenden und erhalten dann mit

$$\mathcal{M}_2(r) = \frac{2}{3} \sqrt{3} \pi r^2 + O(r^{\frac{2}{3}}), \quad \text{für } r \rightarrow +\infty \quad (\text{A.14})$$

unmittelbar die Behauptung des Korollars.  $\square$

## A.3 Simpliziale Gebiete

**Lemma A.3.1** Es sei  $\omega$  das unregelmäßige offene Tetraeder, welches durch die vier Eckpunkte  $(0, 0, 0)$ ,  $(1, 0, 0)$ ,  $(1/2, 1/2, 0)$  und  $(1/2, 1/2, 1/2)$  gebildet wird, also

$$\omega = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : 0 < z < y, y < z, y < 1 \Leftrightarrow x\}. \quad (\text{A.15})$$

Dann sind die Eigenwerte des LAPLACE-Operators bei DIRICHLET-Randbedingungen gegeben durch

$$\lambda_{n_1 n_2 n_3} = (n_1^2 + n_2^2 + n_3^2) \pi^2, \quad (n_1, n_2, n_3) \in \mathbb{Z}^3 \quad (\text{A.16})$$

mit den Nebenbedingungen

$$n_1 + n_2 = 2k \quad \text{für ein } k \in \mathbb{Z} \quad , \quad n_1 + n_3 = 2l \quad \text{für ein } l \in \mathbb{Z}, \quad (\text{A.17})$$

$$n_i \neq 0, \quad i = 1, 2, 3 \quad , \quad n_i \neq n_j \quad \text{für } i \neq j \quad , \quad n_i \neq \Leftrightarrow n_j \quad \text{für } i \neq j. \quad (\text{A.18})$$

Die Multiplizität eines jeden Eigenwertes ist dabei gegeben durch  $\frac{1}{48} \times$  Anzahl der Darstellungsmöglichkeiten in (A.16) unter Berücksichtigung der Nebenbedingungen. Der kleinste Eigenwert ist  $\lambda_0 = 35\pi^2$ ; man erhält ihn z.B. mit  $(n_1, n_2, n_3) = (1, 3, 5)$ .

*Beweis.* Wir verwenden das Verfahren aus [49], welches dort verwendet wurde, um die Eigenwerte eines gleichseitigen Dreiecks zu bestimmen. Dazu zerlegen wir den Einheitswürfel  $(0, 1) \times (0, 1) \times (0, 1)$  in 24 disjunkte Kopien von  $\omega$ , indem wir 12 Ebenen einfügen, wobei 6 dieser Ebenen orthogonal zu den Diagonalen der Würfelseiten stehen; die übrigen 6 durch die diagonal gegenüberliegenden Würfelseiten verlaufen. Einen derartigen Würfel setzen wir nun periodisch in alle drei Raumrichtungen fort. Wir führen nun vier Spiegelungsoperatoren ein, die eine Spiegelung an den vier Flächen, die  $\omega$  begrenzen, beschreiben (siehe hierzu auch Abbildung A.1):

$$\begin{aligned}
 R_1 : (x_1, x_2, x_3) &\mapsto (x_1, x_2, x_3) && \text{(Spiegelung an der } xy\text{-Ebene)} \\
 R_2 : (x_1, x_2, x_3) &\mapsto (x_2, x_1, x_3) && \text{(Spiegelung an der Ebene,} \\
 &&& \text{die den positiven Oktanten halbiert)} \\
 R_3 : (x_1, x_2, x_3) &\mapsto (x_1, x_3, x_2) && \text{(Spiegelung an der Ebene,} \\
 &&& \text{die im Winkel von } 45^\circ \text{ zur } xy\text{-Ebene steht)} \\
 R_4 : (x_1, x_2, x_3) &\mapsto (1 \Leftrightarrow x_2, 1 \Leftrightarrow x_1, x_3) && \text{(Spiegelung an der Ebene senkrecht} \\
 &&& \text{zur Ebene bei } R_2)
 \end{aligned}$$

Die Eigenwertgleichung (3.1) kann nun im Gebiet  $\tilde{\omega} = (0, 2) \times (0, 2) \times (0, 2)$  unter den Zusatzbedingungen  $R_i u = \Leftrightarrow u$  ( $i = 1, 2, 3, 4$ ) gelöst werden, da  $\tilde{\omega}$  die kleinste Elementarzelle ist, mit der man die Eigenlösungen auf dem Gebiet  $\omega$  unter Berücksichtigung der Spiegelungsoperationen periodisch fortsetzen kann. Wegen den Bedingungen  $R_i u = \Leftrightarrow u$  verschwinden derartige Eigenlösungen automatisch am Rand von  $\omega$ . Eigenfunktionen sind gegeben durch Linearkombinationen von

$$\tilde{u}(x) = \exp(ik \cdot x) \tag{A.19}$$

mit  $k = (k_1, k_2, k_3)$  aus dem dualen Gitter und  $x = (x_1, x_2, x_3)$ . Basisvektoren des realen

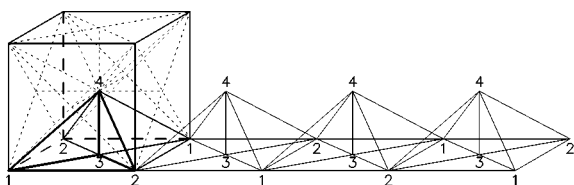


Abbildung A.1: Zerlegung des Würfels  $(0, 1) \times (0, 1) \times (0, 1)$  in 24 disjunkte simpliziale Tetraeder und periodische Fortpflanzung im  $\mathbb{R}^3$ . Aus Symmetriegründen genügt es, eine Raumrichtung zu betrachten. Unter Berücksichtigung der vier Spiegelungsoperationen lassen sich dann die Eigenlösungen auf dem Gebiet  $\omega$  mit der Periode 2 im ganzen Raum periodisch fortsetzen. Dies wird durch die Zahlen angedeutet.

Raums sind  $a_1 = (2, 0, 0)$ ,  $a_2 = (0, 2, 0)$  und  $a_3 = (0, 0, 2)$ . Zwischen diesen Vektoren und dem  $k$ -Raum besteht aufgrund der Gitterperiodizität die Beziehung

$$a_i \cdot k = 2n_i\pi, \quad i = 1, 2, 3; \quad n_i \in \mathbb{Z}, \quad \text{so daß} \quad k_i = n_i\pi, \quad i = 1, 2, 3 \quad (\text{A.20})$$

und

$$\lambda_{n_1 n_2 n_3} = |k|^2 \pi^2 = (n_1^2 + n_2^2 + n_3^2) \pi^2, \quad (n_1, n_2, n_3) \in \mathbb{Z}^3 \quad (\text{A.21})$$

folgt. Eigenfunktionen  $u$  zum Eigenwert  $\lambda$  haben die Gestalt

$$u(x) = \sum_n A_{n_1 n_2 n_3} \exp(i\pi(n_1 x_1 + n_2 x_2 + n_3 x_3)), \quad (\text{A.22})$$

wobei über alle  $n = (n_1, n_2, n_3)$  mit  $\lambda_{n_1 n_2 n_3} = \lambda$  zu summieren ist. Nebenbedingungen folgen nun aus den vier Spiegelungsbedingungen  $R_i u = \Leftrightarrow u$  ( $i = 1, 2, 3, 4$ ):

$$R_1 u = \sum_n A_{n_1 n_2 n_3} \exp(i\pi(n_1 x_1 + n_2 x_2 \Leftrightarrow n_3 x_3)) \stackrel{!}{=} u, \quad (\text{A.23})$$

so daß

$$A_{n_1 n_2 n_3} = \Leftrightarrow A_{n_1, n_2, -n_3} \quad (\text{A.24})$$

gelten muß. Der zweite Spiegelungsoperator führt auf

$$R_2 u = \sum_n A_{n_1 n_2 n_3} \exp(i\pi(n_1 x_2 + n_2 x_1 + n_3 x_3)) \stackrel{!}{=} u, \quad (\text{A.25})$$

also

$$A_{n_1 n_2 n_3} = \Leftrightarrow A_{n_2 n_1 n_3}. \quad (\text{A.26})$$

Für den Operator  $R_3$  erhalten wir analog

$$A_{n_1 n_2 n_3} = \Leftrightarrow A_{n_1 n_3 n_2}. \quad (\text{A.27})$$

Berücksichtigen wir Operator  $R_4$ , so erhalten wir aus

$$\begin{aligned} R_4 u &= \sum_n A_{n_1 n_2 n_3} \exp(i\pi(n_1(1 \Leftrightarrow x_2) + n_2(1 \Leftrightarrow x_1) + n_3 x_3)) \\ &= \sum_n A_{n_1 n_2 n_3} \exp(i\pi(n_1 + n_2)) \exp(i\pi(\Leftrightarrow n_1 x_2 \Leftrightarrow n_2 x_1 + n_3 x_3)) \stackrel{!}{=} u \end{aligned} \quad (\text{A.28})$$

die Bedingung

$$A_{n_1 n_2 n_3} = \Leftrightarrow A_{-n_2, -n_1, n_3} \exp(\Leftrightarrow i\pi(n_1 + n_2)). \quad (\text{A.29})$$

Daher folgt durch mehrfaches Anwenden von  $R_1$ ,  $R_2$  und  $R_3$ :

$$\begin{aligned} A_{n_1 n_2 n_3} &\stackrel{3}{=} \Leftrightarrow A_{n_1 n_3 n_2} \stackrel{1}{=} A_{n_1, n_3, -n_2} \stackrel{2}{=} \Leftrightarrow A_{n_3, n_1, -n_2} \stackrel{3}{=} A_{n_3, -n_2, n_1} \stackrel{1}{=} \Leftrightarrow A_{n_3, -n_2, -n_1} \\ &\stackrel{2}{=} A_{-n_2, n_3, -n_1} \stackrel{3}{=} \Leftrightarrow A_{-n_2, -n_1, n_3} \stackrel{4}{=} A_{n_1, n_2, n_3} \exp(i\pi(n_1 + n_2)) \end{aligned} \quad (\text{A.30})$$

bei Berücksichtigung von  $R_4$ . Dies hat die Bedingung  $\exp(i\pi(n_1 + n_2)) = 1$ , also

$$n_1 + n_2 = 2k \quad \text{für ein } k \in \mathbb{Z}. \quad (\text{A.31})$$

zur Folge. Analog erhält man

$$n_1 + n_3 = 2l \quad \text{für ein } l \in \mathbb{Z}, \quad \text{bzw.} \quad n_2 + n_3 = 2m \quad \text{für ein } m \in \mathbb{Z}, \quad (\text{A.32})$$

wobei letztere Bedingung in den beiden anderen Nebenbedingungen enthalten ist. Desweiteren gelten

$$A_{n_1 n_2 n_3} \stackrel{3,1}{=} A_{n_1, n_3, -n_2} \stackrel{3}{=} \Leftrightarrow A_{n_1, -n_2, n_3} \quad (\text{A.33})$$

$$A_{n_1 n_2 n_3} \stackrel{2}{=} \Leftrightarrow A_{n_2, n_1, n_3} \stackrel{3}{=} A_{n_2, n_3, n_1} \stackrel{1}{=} \Leftrightarrow A_{n_2, n_3, -n_1} \stackrel{3}{=} A_{n_2, -n_1, n_3} \stackrel{2}{=} \Leftrightarrow A_{-n_1, n_2, n_3} \quad (\text{A.34})$$

$$A_{n_1 n_2 n_3} \stackrel{3}{=} \Leftrightarrow A_{n_1 n_3 n_2} \stackrel{2}{=} A_{n_3 n_1 n_2} \stackrel{3}{=} \Leftrightarrow A_{n_3, n_2, n_1} \quad (\text{A.35})$$

Es folgen die Nebenbedingungen  $n_i \neq 0$  und  $n_i \neq n_j$  für  $i \neq j$ . Die restlichen Nebenbedingungen erhalten wir aus

$$A_{n_1 n_2 n_3} \stackrel{3,1,3}{=} \Leftrightarrow A_{n_1, -n_2, n_3} \stackrel{2}{=} A_{-n_2, n_1, n_3} \stackrel{3}{=} \Leftrightarrow A_{-n_2, n_3, n_1} \stackrel{1}{=} A_{-n_2, n_3, -n_1} \stackrel{3}{=} \Leftrightarrow A_{-n_2, -n_1, n_3} \quad (\text{A.36})$$

$$A_{n_1 n_2 n_3} \stackrel{1}{=} \Leftrightarrow A_{n_1, n_2, -n_3} \stackrel{2}{=} A_{n_2, n_1, -n_3} \stackrel{3}{=} \Leftrightarrow A_{n_2, -n_3, n_1} \stackrel{1}{=} A_{n_2, -n_3, -n_1} \stackrel{2}{=} \Leftrightarrow A_{-n_3, n_2, -n_1} \quad (\text{A.37})$$

$$A_{n_1 n_2 n_3} \stackrel{1}{=} \Leftrightarrow A_{n_1, n_2, -n_3} \stackrel{3}{=} A_{n_1, -n_3, n_2} \stackrel{1}{=} \Leftrightarrow A_{n_1, -n_3, -n_2} \quad (\text{A.38})$$

Eine Verletzung der soeben hergeleiteten Nebenbedingungen hätte eine triviale Eigenlösung zur Folge. Für die Multiplizität der Eigenwerte gilt:  $1/3! \cdot 1/2^3 = 1/48 \times \text{Anzahl der Darstellungsmöglichkeiten unter Berücksichtigung der Nebenbedingungen, wie behauptet.} \quad \square$

**Korollar A.3.2** Für die Zustandzahlfunktion des Gebietes  $\omega$  aus Lemma A.3.1 gilt:

$$\mathcal{N}(\lambda; \omega) = \frac{\lambda^{\frac{3}{2}}}{144\pi^2} \Leftrightarrow \frac{1 + 2\sqrt{2}}{64\pi} \lambda + O(\lambda^{\frac{3}{4}}), \quad \text{für } \lambda \rightarrow +\infty. \quad (\text{A.39})$$

*Beweis.* Sei  $N^*(\lambda)$  die Zahl der Eigenwerte kleiner oder gleich  $\lambda$ , die die Nebenbedingungen (A.17) erfüllen. Dann gilt:

$$N^*(\lambda) = \frac{1}{48} \#\{(q_1, q_2, q_3) \in \mathbb{Z}^3 : (q_1^2 + (2q_2 \Leftrightarrow q_1)^2 + (2q_3 \Leftrightarrow q_1)^2)\pi^2 \leq \lambda\} = \frac{1}{48} A_{Q_1}(\frac{\sqrt{\lambda}}{\pi}) \quad (\text{A.40})$$

mit der quadratischen Form  $Q_1 = 3q_1^2 + 4q_2^2 + 4q_3^2 \Leftrightarrow 4q_1q_2 \Leftrightarrow 4q_1q_3$  und  $A_{Q_1}(r)$  aus Lemma A.1.2. Es wird sich herausstellen, daß dies den Weylschen Term liefert. Den Oberflächen-term erhalten wir, wenn wir die übrigen Nebenbedingungen in (A.17) berücksichtigen.  $n_i = 0$   $i = 1, 2, 3$  liefert jeweils einen Term  $A_2(\frac{\sqrt{\lambda}}{2\pi})$  mit  $A_2(r)$  als der Zahl der Gitterpunkte auf einer Kreisscheibe, während  $n_i = n_j$  und  $n_i = \Leftrightarrow n_j$  für  $i \neq j$  jeweils einen Term  $A_{Q_2}(\frac{\sqrt{\lambda}}{\pi})$  mit der quadratischen Form  $Q_2 = 3q_1^2 + 4q_2^2 \Leftrightarrow 4q_1q_2$  liefern, so daß wir bei Berücksichtigung der Aussage über die Multiplizität eines jeden Eigenwertes für die Zustandzahlfunktion des Gebietes  $\omega$  erhalten:

$$\mathcal{N}(\lambda; \omega) = \frac{1}{48} \left( A_{Q_1}(\frac{\sqrt{\lambda}}{\pi}) \Leftrightarrow 3A_2(\frac{\sqrt{\lambda}}{2\pi}) \Leftrightarrow 6A_{Q_2}(\frac{\sqrt{\lambda}}{\pi}) + 9 \right). \quad (\text{A.41})$$

Die Aussage des Lemmas folgt, wenn wir

$$\det Q_1 = \det \begin{pmatrix} 3 & \Leftrightarrow 2 & \Leftrightarrow 2 \\ \Leftrightarrow 2 & 4 & 0 \\ \Leftrightarrow 2 & 0 & 4 \end{pmatrix} = 16, \quad \text{sowie} \quad \det Q_2 = \det \begin{pmatrix} 3 & \Leftrightarrow 2 \\ \Leftrightarrow 2 & 4 \end{pmatrix} = 8 \quad (\text{A.42})$$



beachten und Lemma A.1.2 anwenden. Das so gewonnene Ergebnis steht in völligem Einklang mit dem Ergebnis von V. Ja. Ivrii (siehe Definition 3.2.1 auf Seite 69), da  $|\omega| = 1/24$  und  $|\partial\omega| = (1 + 2\sqrt{2})/4$ .  $\square$

Vollkommen analog zu Lemma A.3.1 zeigt man für die Eigenwerte eines gleichseitig rechtwinkligen Dreiecks:

**Lemma A.3.3** *Sei  $\omega = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : 0 < y < x, y < 1 \Leftrightarrow x\}$  ein gleichschenkelig rechtwinkliges offenes Dreieck. Dann sind die Eigenwerte des LAPLACE-Operators bei DIRICHLET-Randbedingungen gegeben durch*

$$\lambda_{n_1 n_2} = (n_1^2 + n_2^2)\pi^2, \quad (n_1, n_2) \in \mathbb{Z}^2 \quad (\text{A.43})$$

mit den Nebenbedingungen

$$n_1 + n_2 = 2k \quad \text{für ein } k \in \mathbb{Z} \quad , \quad n_1 \neq 0 \quad , \quad n_2 \neq 0 \quad , \quad n_1 \neq n_2 \quad , \quad n_1 \neq \Leftrightarrow n_2. \quad (\text{A.44})$$

Die Multiplizität eines jeden Eigenwertes ist dabei gegeben durch  $\frac{1}{8} \times$  Anzahl der Darstellungsmöglichkeiten in (A.43) unter Berücksichtigung der Nebenbedingungen (A.44).

Als Korollar haben wir für die entsprechende Zustandzfunktion:

**Korollar A.3.4** *Es sei  $\omega$  das Gebiet aus Lemma A.3.3. Dann gilt:*

$$\mathcal{N}(\lambda; \omega) = \frac{\lambda}{16\pi} \Leftrightarrow \frac{1 + \sqrt{2}}{4\pi} \sqrt{\lambda} + O(\lambda^{\frac{1}{3}}), \quad \text{für } \lambda \rightarrow +\infty. \quad (\text{A.45})$$

*Bemerkung.* Wählt man als Grundgebiet  $\omega$  ein entsprechendes höherdimensionales simpliziales Gebiet ( $n \geq 4$ ), so führt dies auf ein analoges Gitterpunktproblem (Gitterpunkte in einem  $n$ -dimensionalen Ellipsoid), so daß Lemma A.1.2 ebenfalls anwendbar ist.

**Lemma A.3.5** *Es sei  $\omega$  das  $n$ -dimensionale simpliziale offene Gebiet ( $n \geq 4$ ), welches durch den Ursprung und die  $n$  Eckpunkte  $(1, 0, \dots, 0), (0, 1, 0, \dots, 0), \dots, (0, 0, \dots, 0, 1)$  gebildet wird. Dann gilt:*

$$\mathcal{N}(\lambda; \omega) = \frac{B_n}{(2\pi)^n} |\omega|_n \lambda^{\frac{n}{2}} \Leftrightarrow \frac{1}{4} \frac{B_{n-1}}{(2\pi)^{n-1}} |\partial\omega|_{n-1} \lambda^{\frac{n-1}{2}} + O(\lambda^{\frac{n-2}{2}}), \quad \text{für } \lambda \rightarrow +\infty. \quad (\text{A.46})$$

# Anhang B

## Modellsysteme

Wir behandeln hier zahlreiche Modellsysteme. Die Parameter  $N$ ,  $r$  und  $n_0$  sind in Tabelle B.1 auf Seite 110 aufgeführt. Abbildungen der zugehörigen Zustandszahlfunktionen sind in Abschnitt B.8, die der zugehörigen Funktionen  $f_{n,\omega}$ ,  $F_{n,\omega}$  und  $g_{n,\omega}$  in Abschnitt B.9 zu finden.

### B.1 Triadische Cantor-Saite

Als erstes Modellsystem betrachten wir das Schwingen einer triadischen CANTOR-Saite, d.h.  $\Omega$  sei das Komplement der triadischen CANTOR-Menge, also die Menge der reellen Zahlen aus  $[0, 1]$ , in deren triadischen Entwicklung mindestens eine 1 vorkommt [41, S. 91] (Abbildung B.1).  $\Omega$  besteht aus  $2^{i-1}$  Intervallen der Länge  $3^{-i}$  mit  $i \in \mathbb{N}$ .

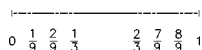


Abbildung B.1: Triadische CANTOR-Saite.

Wegen Satz 3.2.33 besitzt  $\partial\Omega = \partial\Omega$  bezüglich  $\Omega$  den unteren bzw. oberen MINKOWSKI-Inhalt

$$\mathcal{M}_*(D, \cdot) = \frac{1}{1 \Leftrightarrow D} \left( \frac{1 \Leftrightarrow D}{D} \right)^D 2^{1-D} \simeq 2.4950 \quad \text{bzw.} \quad \mathcal{M}^*(D, \cdot) = 2^{2-D} \simeq 2.5830. \quad (\text{B.1})$$

mit der MINKOWSKI-Dimension  $D = D(\cdot) = \ln 2 / \ln 3$ . Für die Zustandszahlfunktion  $N(\lambda)$  gilt die Abschätzung

$$|N(\lambda) \Leftrightarrow \Phi(\lambda) + \frac{1}{2}(f(\mu)\mu^{-D} + 2\mu^{1-D})\pi^{-D}\lambda^{\frac{D}{2}}| < 1, \quad \forall \lambda \geq 0, \quad (\text{B.2})$$

mit  $\mu = 3^{\{\ln \frac{\lambda}{\pi} / \ln 3\}}$ .

*Bemerkungen* Abbildung B.17 zeigt sehr deutlich die lineare Selbstähnlichkeit und die exakte Kongruenzeigenschaft der Funktion  $f$  für  $1/r \in \mathbb{N}$ . In Abbildung B.18 ist die Funktion  $g$ , also der nichtlinear verzerrte Graph von  $f$  dargestellt. Die nichtlineare Selbstähnlichkeit tritt bei genauerem Betrachten deutlich hervor.

## B.2 Brossard-Carmona-Gebiet

Dieses Gebiet besteht aus der disjunkten Vereinigung von  $4 \cdot 5^{i-1} a^{2i} = \frac{4}{5}(5a^2)^i$  Quadraten der Kantenlänge  $(3a)^{-i}$  mit  $a \in \mathbb{N}$  und  $i = 1, 2, \dots$  (Abbildung B.2).

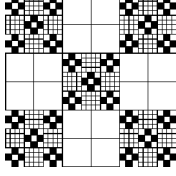


Abbildung B.2: BROSSARD-CARMONA-Gebiet für  $a = 2$ . Die MINKOWSKI-Dimension des Randes ist  $D = \ln 20 / \ln 3$ . Läßt man die zusätzliche Unterteilung der Quadrate fort ( $a = 1$ ), stimmen HAUSDORFF- und MINKOWSKI-Dimension überein.

Mit der MINKOWSKI-Dimension des Randes  $D = \ln(5a^2) / \ln(3a)$  gilt für die Zustandszahlfunktion:

$$\mathcal{N}(\lambda) = \frac{\lambda}{4\pi} \Leftrightarrow \frac{4}{5} \frac{\pi^{\frac{D}{2}}}{(2\pi)^D} \left( f_2(\mu) \mu^{-\frac{D}{2}} + \frac{5}{4} \mu^{1-\frac{D}{2}} \right) \lambda^{\frac{D}{2}} + \frac{4a}{5a \Leftrightarrow 3} \frac{\sqrt{\lambda}}{\pi} + O(\lambda^{\frac{7}{22}}), \quad (\text{B.3})$$

für  $\lambda \rightarrow +\infty$  mit

$$\mu = \frac{\lambda}{4\pi} (9a^2)^{\{\ln \frac{\lambda}{2\pi^2} / \ln(9a^2)\}}. \quad (\text{B.4})$$

*Bemerkungen.* Das hier vorgestellte Modellsystem ist ein leicht modifiziertes aus [5]. J. BROSSARD und R. CARMONA führen es dort an, um zu zeigen, daß der zweite Term der asymptotischen Entwicklung von  $\mathcal{N}$  keinen Term proportional  $\lambda^{H/2}$  enthält, wobei  $H$  die HAUSDORFF-Dimension des Randes darstellt. Diese ist nämlich unabhängig von der Wahl von  $a$  immer gleich

$$H = H(, ) = \frac{\ln 5}{\ln 3}. \quad (\text{B.5})$$

Die Autoren der soeben zitierten Arbeit schlugen aufgrund ihrer Überlegungen daher vor, die HAUSDORFF- durch die MINKOWSKI-Dimension zu ersetzen. Im Gegensatz zu dem expliziten Ausdruck, den wir für den zweiten Term erhalten haben, zeigen die erwähnten Autoren lediglich seine Größenordnung  $O(\lambda^{D/2})$ .

## B.3 Würfelschwamm

Der Würfelschwamm in Abbildung B.3 besteht aus  $7 \cdot 20^{i-1}$  paarweise disjunkte (offene) Würfel der Kantenlänge  $3^{-i}$  mit  $i \in \mathbb{N}$ . Für die Zustandszahlfunktion des Würfelschwamms gilt:

$$\mathcal{N}(\lambda) = \frac{\lambda^{\frac{3}{2}}}{6\pi^2} \Leftrightarrow \frac{7}{20} (6\pi^2)^{-\frac{D}{3}} \left( f_{3,\omega}(\mu) \mu^{-\frac{D}{3}} + \frac{20}{7} \mu^{1-\frac{D}{3}} \right) \lambda^{\frac{D}{2}} + \frac{15}{22\pi} \lambda^{\frac{1}{2}} + O(\lambda^{\frac{2}{3}}), \quad (\text{B.6})$$

für  $\lambda \rightarrow +\infty$  mit

$$\mu = \frac{3^{3/2}\pi}{2} 27^{\{\ln \frac{\lambda}{3\pi^2} / \ln 9\}}. \quad (\text{B.7})$$

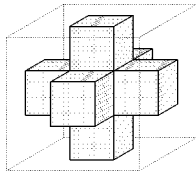


Abbildung B.3: Würfelschwamm. Dargestellt ist die erste Generations. Für seine Konstruktion denke man sich den gestrichelten Einheitswürfel in 27 kongruente paarweise disjunkte offene Würfel zerlegt. Das zapfenförmige Gebilde, welches aus 7 Würfel der Kantenlänge  $1/3$  besteht, verkleinere man um den Faktor  $1/3$  und plaziere es in die übrigen 20 kleinen Würfel. Dieses Verfahren setze man ab infinitio fort, bis der ganze Einheitswürfel ausgefüllt ist. Der Rand des Würfelschwamm besitzt die MINKOWSKI-Dimension  $D = \ln 20 / \ln 3$ .

## B.4 Sierpinski-Pfeilspitzenmembran

Die SIERPINSKI-Pfeilspitzenmembran in Abbildung B.4 besteht aus  $3^{i-1}$  gleichseitigen Dreiecken der Seitenlänge  $2^{-i}$ ,  $i = 1, 2, \dots$  [41, S. 152].

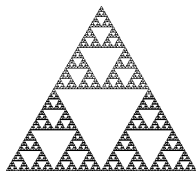


Abbildung B.4: SIERPINSKI-Pfeilspitzenmembran. Der Rand besitzt die MINKOWSKI-Dimension  $D = \ln 3 / \ln 2$ .

Die Zustandszahlfunktion der SIERPINSKI-Pfeilspitzenmembran ist gegeben durch

$$\mathcal{N}(\lambda) = \frac{\sqrt{3}}{16\pi} \lambda \Leftrightarrow \frac{1}{27} \left( \frac{\sqrt{3}}{\pi} \right)^{\frac{D}{2}} \left( f_{2,\omega}(\mu) + \mu^{-\frac{D}{2}} + 3\mu^{1-\frac{D}{2}} \right) \lambda^{\frac{D}{2}} + \frac{3}{4\pi} \sqrt{\lambda} + O(\lambda^{\frac{1}{3}}), \quad (\text{B.8})$$

für  $\lambda \rightarrow +\infty$  mit

$$\mu = \frac{\sqrt{3}\pi}{3} 4^{\{\ln \frac{3\lambda}{16\pi^2} / \ln 4\}}. \quad (\text{B.9})$$

## B.5 Simplicialer Dreiecksteppich

Für die Zustandszahlfunktion des simplicialen Dreiecksteppichs gilt:

$$\mathcal{N}(\lambda) = \frac{\lambda}{4\pi} \Leftrightarrow 5(16\pi)^{-\frac{D}{2}} \left( f_{2,\omega}(\mu)\mu^{-\frac{D}{2}} + \frac{4}{5}\mu^{1-\frac{D}{2}} \right) \lambda^{\frac{D}{2}} + 5(1 + \sqrt{2})\frac{\sqrt{\lambda}}{\pi} + (\lambda^{\frac{1}{3}}), \quad (\text{B.10})$$

für  $\lambda \rightarrow +\infty$  mit

$$\mu = \frac{5\pi}{8} 9^{\left\{ \ln \frac{\lambda}{10\pi^2} \ln 9 \right\}}. \quad (\text{B.11})$$

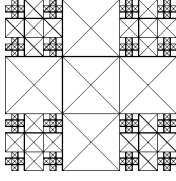


Abbildung B.5: Simplicialer Dreiecksteppich. Dargestellt sind die ersten drei Generationen. Der Rand besitzt die MINKOWSKI-Dimension  $D = \ln 4 / \ln 3$ .

## B.6 Simplicialer Tetraederschwamm

Der simpliciale Tetraederschwamm geht aus dem Würfelschwamm durch Zerlegen der einzelnen Würfel in je 24 simpliciale Tetraeder aus Lemma A.3.1 im Sinne von Abbildung A.1 hervor. Er besteht daher aus  $7 \cdot 24 \cdot 20^{i-1}$  paarweise disjunkte simpliciale Tetraeder, die im Verhältnis von  $3^{-i}$  mit  $i \in \mathbb{N}$  ähnlich zum Grundgebiet sind—dies ist das simpliciale Tetraeder aus Lemma A.3.1.

Für die Zustandszahlfunktion hat man

$$\mathcal{N}(\lambda) = \frac{\lambda^{\frac{3}{2}}}{6\pi} \Leftrightarrow \frac{42}{5} (144\pi^2)^{-\frac{D}{3}} \left( f_{3,\omega}(\mu)\mu^{-\frac{D}{3}} + \frac{20}{7}\mu^{1-\frac{D}{3}} \right) \lambda^{\frac{D}{2}} + \frac{21}{22\pi} (1 + 2\sqrt{2})\lambda + (\lambda^{\frac{3}{4}}), \quad (\text{B.12})$$

für  $\lambda \rightarrow +\infty$  mit

$$\mu = 35^{3/2} \frac{\pi}{144} 27^{\left\{ \ln \frac{\lambda}{35\pi^2} \ln 27 \right\}}. \quad (\text{B.13})$$

## B.7 Kartoffelteppich

Die Zustandszahlfunktion des Kartoffelteppich ist gegeben durch

$$\mathcal{N}(\lambda) = \frac{\lambda}{4} \Leftrightarrow \left( f_{2,\omega}(\mu)\mu^{-\frac{D}{2}} + 3\mu^{1-\frac{D}{2}} \right) \lambda^{\frac{D}{2}} + 5(1 + \sqrt{2})\frac{\sqrt{\lambda}}{4} + (\lambda^{\frac{1}{3}}), \quad (\text{B.14})$$

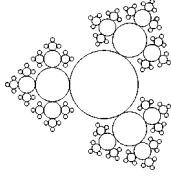


Abbildung B.6: Kartoffelteppich. Dargestellt sind die ersten fünf Generationen. Das Aussehen erinnert an die Querschnittsfläche einer verwachsenen Kartoffel. Im Vergleich zur SIERPINSKI-Pfeilspitzenmembran wurde das gleichseitige Dreieck durch einen Kreis ersetzt. Der Rand besitzt daher ebenfalls die MIN-KOWSKI-Dimension  $D = \ln 3 / \ln 2$ .

für  $\lambda \rightarrow +\infty$  mit

$$\mu = \frac{j_{0,1}^2}{4} \left\{ \ln \frac{\lambda}{j_{0,1}^2} / \ln 4 \right\}. \quad (\text{B.15})$$

Hierbei bezeichnet  $j_{0,1}$  die erste Nullstelle der Besselfunktion 1.Ordnung,  $j_{0,1} \simeq 2.405$ .

## B.8 Abbildungen der Zustandszahlfunktionen

In diesem Abschnitt stellen wir die Abbildungen für die Zustandszahlfunktionen der behandelten Modellsysteme zusammen. Die zugehörigen Parameter  $N$ ,  $r$  und  $n_0$ , sowie die sich daraus ergebende MINKOWSKI-Dimension  $D$  sind in der nachfolgenden Tabelle aufgeführt. Falls nichts anderes angegeben ist, so sind die ersten drei Terme der (schwach) asymptotischen Entwicklung der zugehörigen Zustandszahlfunktionen  $\mathcal{N}$  in den nachfolgenden Abbildungen mit eingezeichnet.

n	Gebiet $\Omega$	Grundgebiet $\omega$	$ \omega $	$ \partial\omega $	$\lambda_0$	$N$	$r$	$n_0$	$D$
1	Triadische CANTOR-Saite	Intervall	1	0	$\pi^2$	2	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{2}$	0.6309
2	BROSSARD-CARMONA-Gebiet	Quadrat	1	4	$2\pi^2$	5	$\frac{1}{3}$	$\frac{4}{5}$	1.4650
2	BROSSARD-CARMONA-Gebiet	Quadrat	1	4	$2\pi^2$	20	$\frac{1}{6}$	$\frac{4}{5}$	1.6720
3	Würfel-schwamm	Würfel	1	6	$3\pi^2$	20	$\frac{1}{3}$	$\frac{7}{20}$	2.7268
2	SIERPINSKI-Pfeilspitzenmembran	Gleichseitiges Dreieck	$\frac{\sqrt{3}}{4}$	3	$\frac{16}{3}\pi^2$	3	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	1.5850
2	Dreiecks-teppich	Gleichschenkl. rechtwinkliges Dreieck	$\frac{1}{4}$	$1 + \sqrt{2}$	$10\pi^2$	4	$\frac{1}{3}$	5	1.2619
3	Simplizialer Tetraeder-schwamm	Simpliziales Tetraeder aus Lemma A.3.1	$\frac{1}{24}$	$\frac{1+2\sqrt{2}}{4}$	$35\pi^2$	20	$\frac{1}{3}$	$\frac{42}{5}$	2.7268
2	Kartoffel-teppich	Kreis	$\pi$	$2\pi$	$j_{0,1}^2$	3	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{3}$	1.5850

Tabelle B.1: Auflistung der behandelten Modellsysteme. ( $j_{0,1}$  ist die erste Nullstelle der Besselfunktion erster Ordnung.)

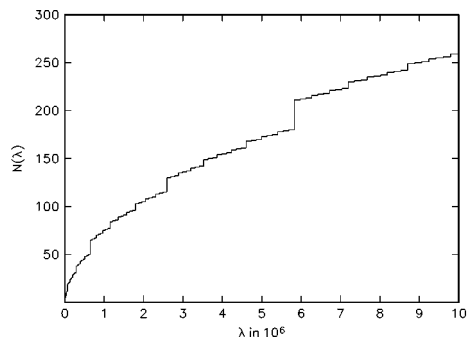


Abbildung B.7: Zustandszahlfunktion  $\mathcal{N}$  für die Triadische CANTOR-Saite.

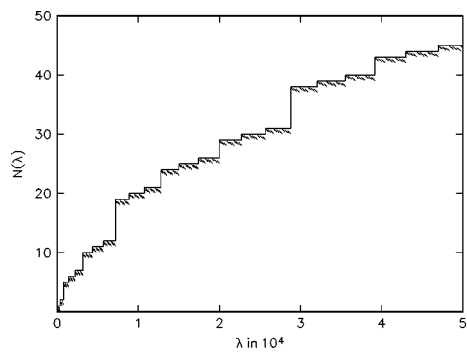


Abbildung B.8: Zustandszahlfunktion  $\mathcal{N}$  für die Triadische CANTOR-Saite mit eingezeichneter Näherung unter Verwendung der ersten zwei Terme.



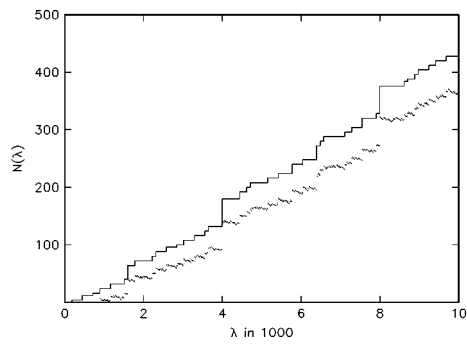


Abbildung B.9: Zustandszahlfunktion  $\mathcal{N}$  für das BROSSARD-CARMONA-Gebiet mit  $a = 1$  und eingezeichneter Näherung mit den ersten zwei Termen der Entwicklung.

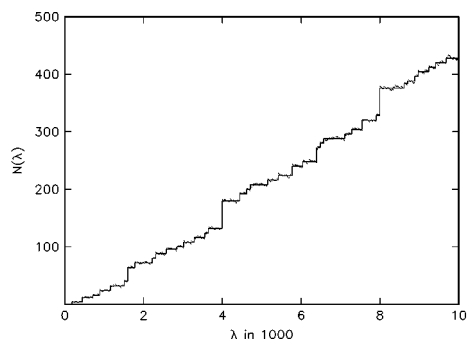


Abbildung B.10: Zustandszahlfunktion  $\mathcal{N}$  für das BROSSARD-CARMONA-Gebiet mit  $a = 1$ .

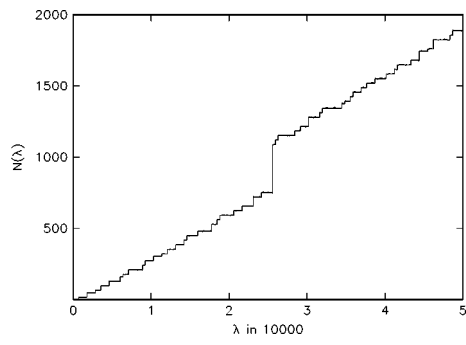


Abbildung B.11: Zustandszahlfunktion  $\mathcal{N}$  für das BROSSARD-CARMONA-Gebiet mit  $a = 2$ .

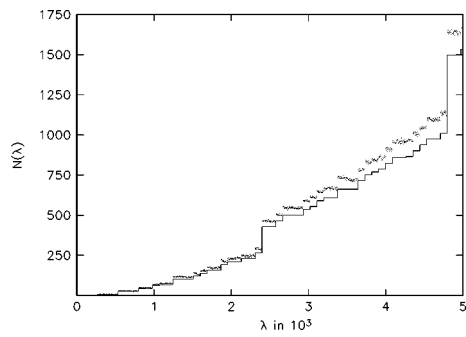


Abbildung B.12: Zustandszahlfunktion  $\mathcal{N}$  für den Würfelschwamm.

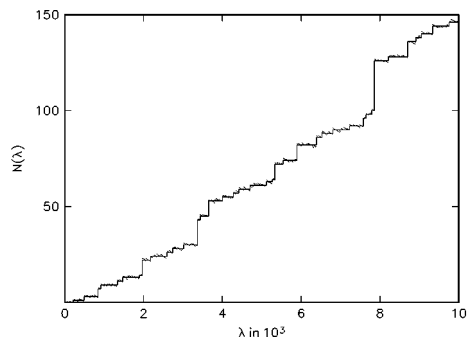


Abbildung B.13: Zustandszahlfunktion  $\mathcal{N}$  für die SIERPINSKI-Pfeilspitzenmembran.

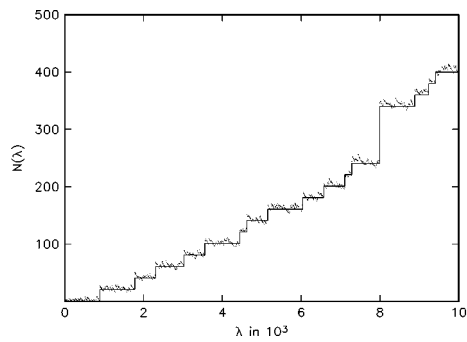


Abbildung B.14: Zustandszahlfunktion  $\mathcal{N}$  für den Dreiecksteppich.

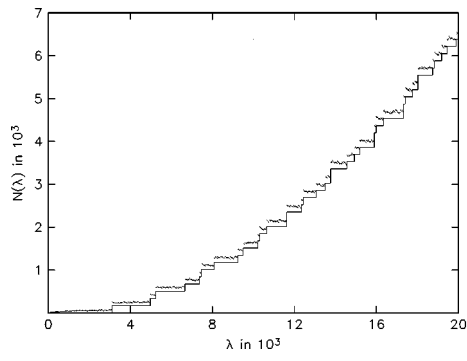


Abbildung B.15: Zustandszahlfunktion  $\mathcal{N}$  für den simplizialen Tetraederschwamm.

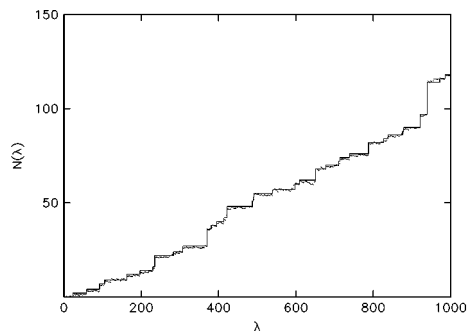


Abbildung B.16: Zustandszahlfunktion  $\mathcal{N}$  für den Kartoffelteppich.

## B.9 Abbildungen der Funktionen $f_{n,\omega}$ , $F_{n,\omega}$ und $g_{n,\omega}$

Wir stellen in diesem Abschnitt die Abbildungen der Funktionen  $f_{n,\omega}$ ,  $F_{n,\omega}$  und  $g_{n,\omega}$  zu den behandelten Modellsystemen zusammen. Zu den entsprechenden Parametern und die Minkowskidimension der zugehörigen (zusammenhängenden) Graphen siehe die nachfolgende Tabelle. Wegen Satz 3.2.28 und Satz 3.2.29 gelten die erhaltenen Abschätzungen für die MINKOWSKI-Dimension des zusammenhängenden Graphen der Funktion  $f_{n,\omega}$  ebenfalls für die zusammenhängenden Graphen der Funktionen  $F_{n,\omega}$  und  $g_{n,\omega}$ .

n	Grundgebiet $\omega$	N	r	$D = \frac{\ln N}{\ln \frac{1}{r}}$	untere Schranke für $\tilde{D}(G^z)$	obere Schranke für $\tilde{D}(G^z)$	$\mu_{\min}$
1	Intervall	2	$\frac{1}{3}$	0.6309	1.3691	1.3691	1
2	Quadrat	5	$\frac{1}{3}$	1.4650	1.2675	1.3924	$\frac{\pi}{2}$
3	Würfel	20	$\frac{1}{3}$	2.7268	1.1365	1.1639	$3^{2/3} \frac{\pi}{6}$
2	Gleichseitiges Dreieck	3	$\frac{1}{2}$	1.5850	1.2075	1.3113	$\frac{\sqrt{3}}{3} \pi$
2	Gleichschenlig rechtwinkliges Dreieck	4	$\frac{1}{3}$	1.2619	1.3691	1.5536	$\frac{5}{8} \pi$
3	Simpliziales Tetraeder aus Lemma A.3.1	20	$\frac{1}{3}$	2.7268	1.1365	1.1821	$35^{3/2} \frac{\pi}{144}$
2	Kreis	3	$\frac{1}{2}$	1.5850	1.0000	1.3113	$\frac{j_{0,1}^2}{4}$

Tabelle B.2: Auflistung der behandelten Funktionen  $f_{n,\omega}$ ,  $g_{n,\omega}$  und  $F_{n,\omega}$  mit Angabe von Abschätzungen für die MINKOWSKI-Dimension  $\tilde{D}(G^z)$  der zugehörigen zusammenhängenden Graphen  $G^z$ . In der letzten Spalte ist  $\mu_{\min}$  aufgeführt, also die untere Schranke für den verwendeten  $\mu$ -Bereich für die zugehörigen Zustandszahlfunktionen  $\mathcal{N}$ . ( $j_{0,1}$  ist die erste Nullstelle der Besselfunktion nullter Ordnung.)

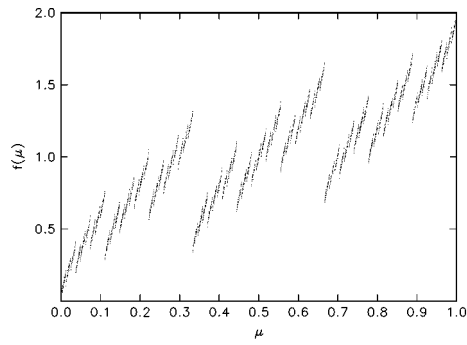


Abbildung B.17: Funktion  $f$  für die Triadische CANTOR-Saite.

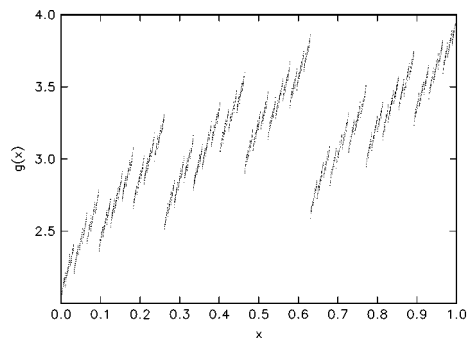


Abbildung B.18: Funktion  $g$  für die Triadische CANTOR-Saite.

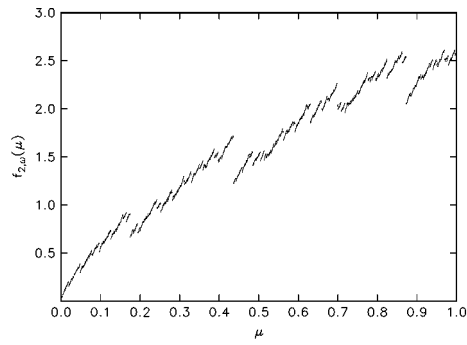


Abbildung B.19: Funktion  $f_{2,om}$  für das BROSSARD-CARMONA-Gebiet mit  $N = 5$  und  $r = 1/3$ .

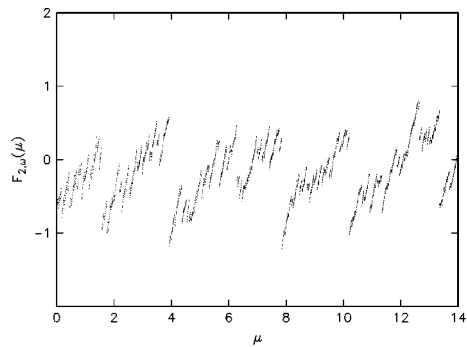


Abbildung B.20: Funktion  $F_{2,om}$  für das BROSSARD-CARMONA-Gebiet mit  $N = 5$  und  $r = 1/3$ .

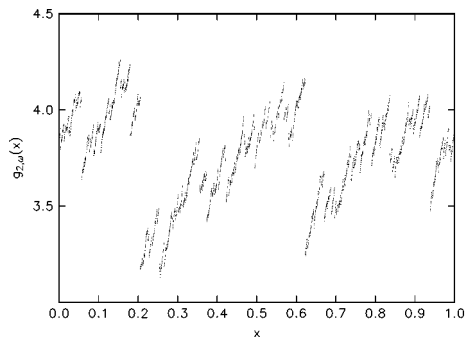


Abbildung B.21: Funktion  $g_{2,om}$  für das BROSSARD-CARMONA-Gebiet mit  $N = 5$  und  $r = 1/3$ .

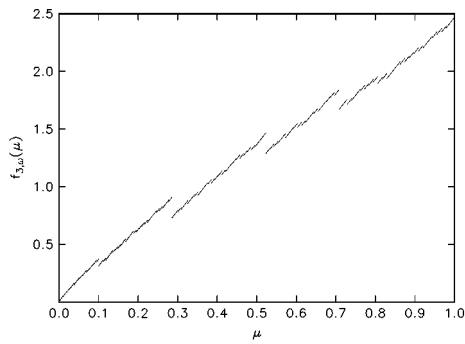


Abbildung B.22: Funktion  $f_{3,om}$  für den Würfelschwamm mit  $N = 20$  und  $r = 1/3$ .



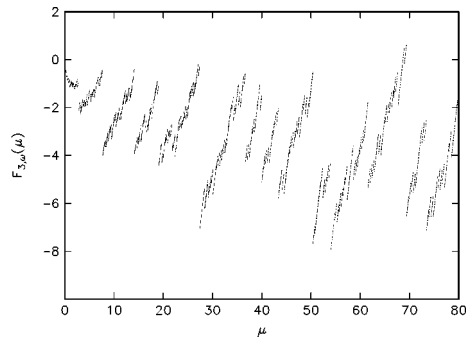


Abbildung B.23: Funktion  $F_{3,\omega}$  für den Würfelschwamm mit  $N = 20$  und  $r = 1/3$ .

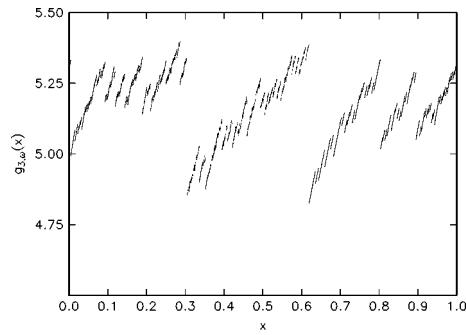


Abbildung B.24: Funktion  $g_{3,\omega}$  für den Würfelschwamm mit  $N = 20$  und  $r = 1/3$ .

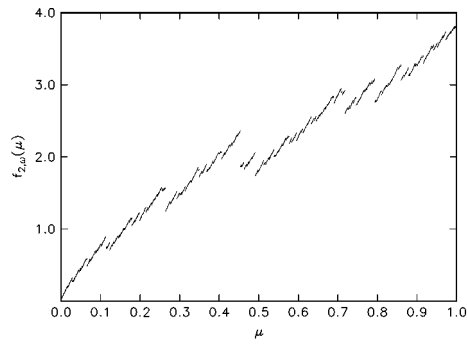


Abbildung B.25: Funktion  $f_{2,\omega}$  für die SIERPINSKI-Pfeilspitzenmembran mit  $N = 3$  und  $r = 1/2$ .

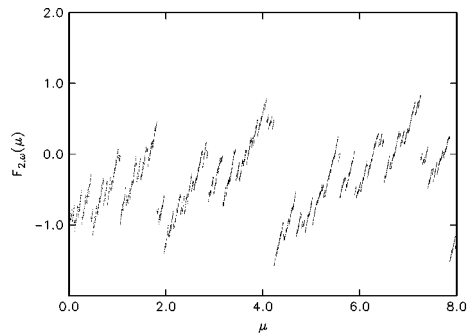


Abbildung B.26: Funktion  $F_{2,\omega}$  für die SIERPINSKI-Pfeilspitzenmembran mit  $N = 3$  und  $r = 1/2$ .

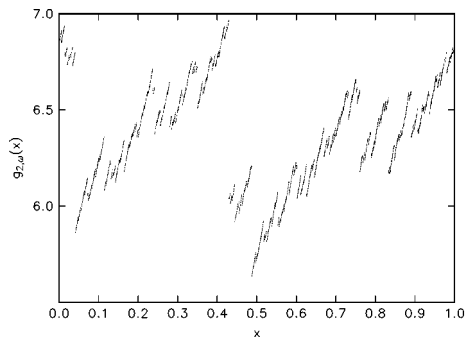


Abbildung B.27: Funktion  $g_{2,\omega}$  für die SIERPINSKI-Pfeilspitzenmembran mit  $N = 3$  und  $r = 1/2$ .

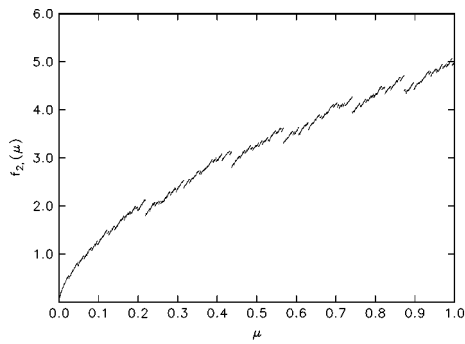


Abbildung B.28: Funktion  $f_{2,\omega}$  für den Dreiecksteppich mit  $N = 4$  und  $r = 1/3$ .

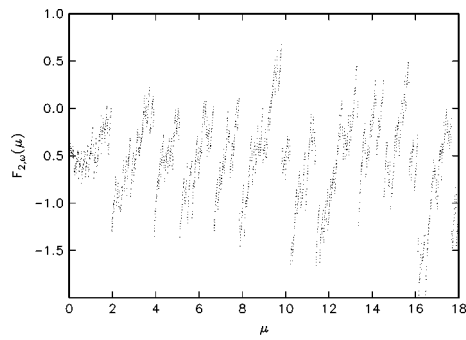


Abbildung B.29: Funktion  $F_{2,\omega}$  für den Dreiecksteppich mit  $N = 4$  und  $r = 1/3$ .

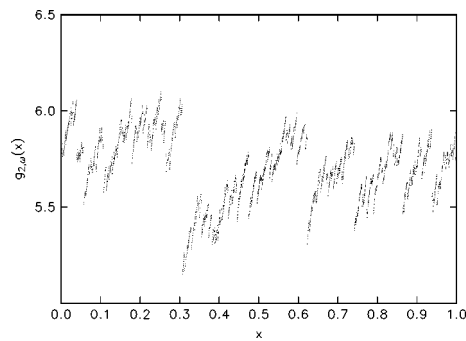


Abbildung B.30: Funktion  $g_{2,\omega}$  für den Dreiecksteppich mit  $N = 4$  und  $r = 1/3$ .

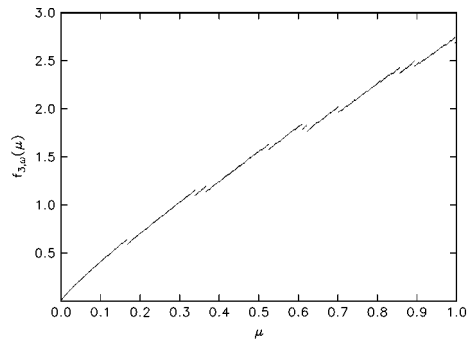


Abbildung B.31: Funktion  $f_{3,\omega}$  für den simplizialen Tetraederschwamm mit  $N = 20$  und  $r = 1/3$ .

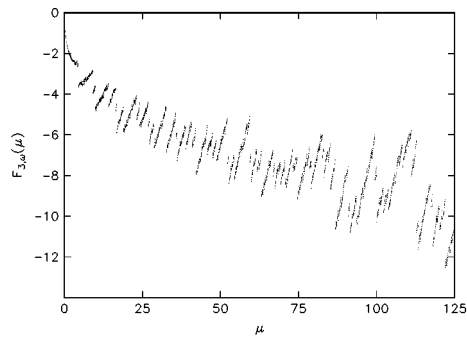


Abbildung B.32: Funktion  $F_{3,\omega}$  für den simplizialen Tetraederschwamm mit  $N = 20$  und  $r = 1/3$ .

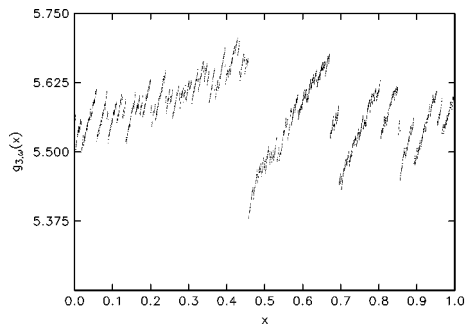


Abbildung B.33: Funktion  $g_{3,\omega}$  für den simplizialen Tetraederschwamm mit  $N = 20$  und  $r = 1/3$ .

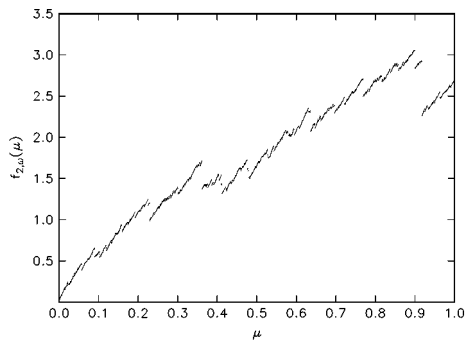


Abbildung B.34: Funktion  $f_{2,\omega}$  für den Kartoffelteppich mit  $N = 3$  und  $r = 1/2$ .

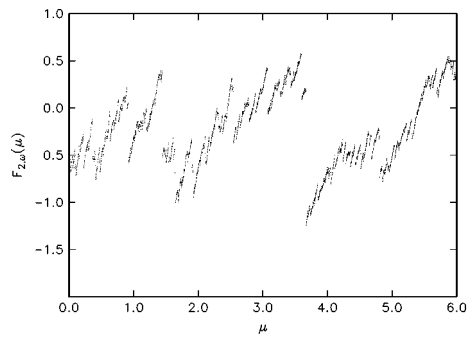


Abbildung B.35: Funktion  $F_{2,\omega}$  für den Kartoffelteppich mit  $N = 3$  und  $r = 1/2$ .

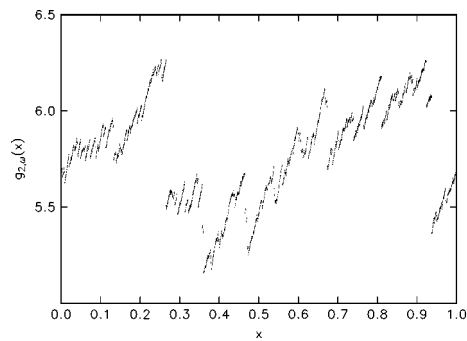


Abbildung B.36: Funktion  $g_{2,\omega}$  für den Kartoffelteppich mit  $N = 3$  und  $r = 1/2$ .

# Literaturverzeichnis

- [1] S. AGMON, *Lectures on elliptic boundary value problems*, Van Nostrand, Princeton, 1965.
- [2] H. P. BALTES, E. R. HILF, *Spectra of finite systems*, B. I.-Wissenschaftsverlag, Mannheim 1978.
- [3] M. V. BERRY, *Distribution of modes in fractal resonators* in: *Structural Stability in Physics*, Hrsg. W. GÜTTINGER und H. EIKEMEIER, Springer-Verlag, Berlin, 1979.
- [4] P. DU BOIS-REYMOND, *J. Reine Angew. Math.* **79** (1875), 21–37.
- [5] J. BROSSARD, R. CARMONA, *Can one hear the dimension of a fractal?*, *Comm. Math. Phys.* **104** (1986), 103–122.
- [6] D. E. EDMUNDS, W. D. EVANS, *Spectral theory and differential operators*, Oxford Univ. Press, Oxford 1987.
- [7] A. EL KOLLI, *Nième epaissuer dans les espace de Sobolev*, *J. Approx. Theory* **10** (1974), 268–294.
- [8] D. G. FIGUEIREDO, *Positive solutions of semilinear elliptic problemes*, in: *Lecture Notes in Mathematics* **957** Springer-Verlag, Berlin 1982, 34–87.
- [9] J. FLECKINGER, *Estimate of the number of eigenvalue for an operator of Schrödinger type*, *Proc. Roy. Soc. Edinburgh* **89A**, (1981), 355–361.
- [10] J. FLECKINGER, M. L. LAPIDUS, *Eigenvalues of elliptic boundary value problems with an indefinite weight function*, *Trans. Amer. Math. Soc.* **295** (1986), 305–324.
- [11] J. FLECKINGER, M. L. LAPIDUS, *Remainder estimates for the asymptotics of elliptic eigenvalue problems with indefinite weight*, *Arch. Rational Mech. Anal.* **98** (1987), 329–356.
- [12] J. FLECKINGER, G. MÉTIVIER, *Théorie spectrale de opérateurs uniformément elliptiques sur quelques ouverts irréguliers*, *C. R. Acad. Sci. Paris Série I* **276** (1973), 913–916.
- [13] J. FLECKINGER, D. G. VASIL'EV, *Tambour fractal: exemple d'une formule asymptotic à deux termes pour la fonction de comptage*, *C. R. Acad. Sci. Paris Série I* **311** (1990), 867–872.



- [14] F. FRICKER, *Einführung in die Gitterpunktlehre*, Birkhäuser, Basel 1982.
- [15] W. HACKBUSCH, *Theorie und Numerik elliptischer Differentialgleichungen*, Teubner-Verlag, Stuttgart 1986.
- [16] H. HEUSER, *Funktionalanalysis*, Teubner-Verlag, Stuttgart 1986.
- [17] J. E. HUTCHINSON, *Fractals and Self Similarity*, Indiana Univ. Math. J. **30** (1981), 713–747.
- [18] A. IVIĆ, *The RIEMANN Zeta-Function*, John Wiley & Sons, New York 1985.
- [19] V. JA. IVRII, *Second term of the spectral asymptotic expansion of the Laplace-Beltrami operator on manifolds with boundary*, Funct. Anal. Appl. **14** (1980), 98–106.
- [20] H. IWANIEC, C. J. MOZZOCHI, *On the divisor and circle problem*, J. Number Theory **29** No. 1 (1988), 60–93.
- [21] M. KAC, *Can one hear the shape of a drum?*, Amer. Math. Monthly (Slaught Memorial Papers Nr. 11) **73** (1966), 1–23. Nachdruck in: M. KAC, *Probability, number theory, and statistical physics: selected papers*, MIT Press, Cambridge 1979, 474–497.
- [22] E. KRÄTZEL, *Lattice Points*, Deutscher Verlag der Wissenschaften, Berlin 1988.
- [23] N. V. KUZNETSOV, B. V. FEDOSOV, *An asymptotic formula for the eigenvalues of a circular membrane*, Differential Equations **1** (1965), 1326–1329.
- [24] E. LANDAU, *Über Gitterpunkte in mehrdimensionalen Ellipsoiden*, Math. Zeitschr. **21** (1924), 126–132.
- [25] E. LANDAU *Ausgewählte Abhandlungen zur Gitterpunktlehre*, Deutscher Verlag der Wissenschaften, Berlin 1962.
- [26] M. L. LAPIDUS, *Valeurs propres du laplacien avec un poids qui change de signe*, C. R. Acad. Sci. Paris Série I **298** (1984), 265–268.
- [27] M. L. LAPIDUS, *Can one hear the shape of a fractal drum? Partial resolution of the Weyl-Berry conjecture*, in: P. Concus et al. *Geometric Analysis and Computer Graphics*, M.S.R.I. Publications **17**, Springer-Verlag, Berlin 1991, 119–126.
- [28] M. L. LAPIDUS, *Fractal drum, inverse spectral problems for elliptic operators and a partial resolution of the Weyl-Berry conjecture*, Trans. Amer. Soc. **325** (1991), 465–529.
- [29] M. L. LAPIDUS, *Hypothèse de Riemann, cordes fractales vibrantes et conjecture de Weyl-Berry modifiée*, C. R. Acad. Sci. Paris Série I **313** (1991), 19–24.
- [30] M. L. LAPIDUS, *Spectral and fractal geometry: From the Weyl-Berry conjecture for the vibrating of fractal drums to the Riemann Zeta-function* in: C. Bennewitz, *Differential Equations and Mathematical Physics*, Academic Press, New York 1992, 151–182.

- [31] M. L. LAPIDUS, J. FLECKINGER, *The vibration of a fractal drum*, in: Differential Equations, Lecture Notes in Pure and Appl. Math. **118** (1987), 423–436.
- [32] M. L. LAPIDUS, J. FLECKINGER-PELLÉ, *Tambour fractal: vers une résolution de la conjecture de Weyl-Berry pour les valeurs propres du laplacien*, C. R. Acad. Sci. Paris Série I **306** (1988), 171–175.
- [33] M. L. LAPIDUS, H. MAIER, *Hypothèse de Riemann, cordes fractales vibrantes et conjecture de Weyl-Berry modifiée*, C. R. Acad. Sci. Paris Série I **313** (1991), 19–24.
- [34] M. L. LAPIDUS, H. MAIER, *The Riemann hypothesis, inverse spectral problem for vibrating fractal strings and the modified Weyl-Berry conjecture*, Preprint, Univ. of Georgia, Athens 1991.
- [35] M. L. LAPIDUS, C. POMERANCE, *Fonction zeta de Riemann et conjecture de Weyl-Berry pour les tambours fractals*, C. R. Acad. Sci. Paris Série I **310** (1990), 343–348.
- [36] M. L. LAPIDUS, C. POMERANCE, *The RIEMANN Zeta-Function and the one-dimensional Weyl-Berry conjecture for fractal drums*, Preprint, Univ. of Georgia, Athens 1991.
- [37] J. L. LIONS, E. MAGENES, *Non-homogeneous boundary value problems and applications*, Bd. I, Springer-Verlag, Berlin, 1972.
- [38] G. G. LORENTZ, *Approximation of functions*, Holt, Reinhart & Winston, New York 1966.
- [39] O. MARTIO, M. VUORINEN, *Whitney cubes,  $p$ -capacity, and the Minkowski content*, Expos. Math. **5** (1987), 17–40.
- [40] H. P. MCKEAN, I. M. SINGER, *Curvature and the eigenvalues of the Laplacian*, J. Differential Geom. **1** (1967), 43–69.
- [41] B. B. MANDELBROT, *Die fraktale Geometrie der Natur*, Birkhäuser Verlag, Basel 1987.
- [42] G. MÉTIVIER, *Valeurs propres de problèmes aux limites elliptiques irréguliers*, Bull. Soc. Math. France, Mém. **51–52** (1977), 125–219.
- [43] M. A. NEUMARK, *Normierte Algebren*, Verlag Harri Deutsch, Thun und Frankfurt am Main 1990, Kap. I.
- [44] E. OTT et al. *Is the dimension of chaotic attractors invariant under coordinate change?*, J. Stat. Phys. **36** (1984), 687–697.
- [45] H.-O. PEITGEN, P. H. RICHTER *The beauty of fractals*, Springer-Verlag, Berlin 1986.
- [46] H.-O. PEITGEN, D. SAUPE (Hrsg.), *The science of fractal images*, Springer-Verlag, Berlin 1988.

- [47] PHAM THE LAI, *Meilleures estimations asymptotiques des restes de la fonction spectrale des valeurs propres relatifs an laplacian*, Math. Scand. **48** (1981), 5-38.
- [48] A. PINKUS, *n-width in approximation theory*, Springer-Verlag, New York 1985.
- [49] M. PINSKY, *The eigenvalues of an equilateral triangle*, SIAM J. Math. Anal. **11** (1980), 819-827
- [50] M. H. PROTTER, *Can one hear the shape of a drum? Revisited*, SIAM Rev. **29** (1987), 185-197.
- [51] M. REED, B. SIMON, *Methods of modern mathematical physics*, Bd. IV, Analysis of operators, Academic Press, New York 1978.
- [52] R. T. SEELEY, *A sharp asymptotic remainder estimate for the eigenvalues of the Laplacian in a domain of  $\mathbb{R}^n$* , Adv. in Math. **29** (1978), 244-269.
- [53] R. T. SEELEY, *An estimate near the boundary for the eigenvalues of the Laplace operator*, Amer. J. Math. **102** (1980), 869-902.
- [54] W.-H. STEEB, J. L. LOUW, *Chaos and Quantum Chaos*, World Scientific 1986.
- [55] C. TRICOT, *Two definitions of fractional dimension*, Math. Proc. Camb. Phil. Soc. **91** (1982), 57-74.
- [56] C. TRICOT, *Dimensions aux bord d'un ouvert*, Ann. Sci. Math. Quebec **11** (1987), 205-235.
- [57] H. URAKAWA, *Bounded domains which are isospectral but not congruent*, Ann. Sci. Ecole Normale Sup. (4) **15** (1982), 441-456.
- [58] I. M. VINOGRADOV, *Über die ganzen Gitterpunkte in der Kugel* (russisch), Izvestija Akad. Nauk SSSR, Ser. mat 27 (1963), 957-968.
- [59] A. WALFISZ, *Über Gitterpunkte in mehrdimensionalen Ellipsoiden*, Math. Zeitschr. **19** (1924), 300-307.
- [60] W. WALTER, *Analysis I, Grundwissen Mathematik Band 3*, Springer-Verlag, Berlin Heidelberg 1985.
- [61] W. WALTER, *Analysis II, Grundwissen Mathematik Band 4*, Springer-Verlag, Berlin Heidelberg 1990.
- [62] J. WEIDMANN, *Lineare Operatoren in Hilberträumen*, Teubner-Verlag, Stuttgart 1976.
- [63] H. F. WEINBERGER, *Variational methods for eigenvalue approximation*, CBMS Regional Conf. Ser. Appl. Math. Vol. 15, SIAM, Philadelphia 1974.
- [64] H. WEYL, *Das asymptotische Verteilungsgesetz der Eigenwerte linearer partieller Differentialgleichungen*, Math. Ann. **71** (1912), 441-479.
- [65] J. WLOKA, *Partielle Differentialgleichungen, Sobolevräume und Randwertaufgaben*, Teubner-Verlag, Stuttgart 1982.