

---

# Zur Theorie der Pseudobosonen

---

**Diplomarbeit**

**Jörg Bartke**  
**Fachbereich Physik**



**Mai 2003**



# Inhaltsverzeichnis

<b>I. Einleitung</b>	<b>5</b>
<b>II. Lineare Abbildung von Fermionenzuständen auf Pseudobosonenzustände</b>	<b>8</b>
<b>1. Fermion-Boson-Abbildung</b>	<b>8</b>
1.1. Der Multifermionenraum . . . . .	8
1.2. Der Pseudobosonenraum . . . . .	11
1.3. Definition der Abbildung . . . . .	13
<b>2. Operatoren im Pseudobosonenraum</b>	<b>18</b>
2.1. Hamiltonoperator im Multifermionenraum . . . . .	19
2.2. Abbildung des Hamiltonoperators auf den Pseudobosonenraum . . . . .	22
<b>3. Fazit Fermion-Boson-Abbildung</b>	<b>26</b>
<b>III. Das Luttinger-Modell</b>	<b>27</b>
<b>4. Das Luttinger-Modell in der ersten Quantisierung</b>	<b>27</b>
4.1. Der Hamiltonoperator . . . . .	27
4.2. Die Schrödingergleichung . . . . .	28
4.3. Alternative Herleitung der Lösung der Schrödingergleichung . . . . .	32
4.3.1. Einteilchenproblem ohne Wechselwirkung . . . . .	32
4.3.2. Vielteilchenproblem mit einer Teilchensorte ohne Wechselwirkung . . . . .	34
4.3.3. Vielteilchensystem mit beiden Teilchensorten ohne Wechselwirkung . . . . .	35
4.3.4. Vielteilchensystem mit beiden Teilchensorten mit Wechselwirkung . . . . .	36
<b>5. Quantenmechanische Größen des Luttinger-Modells</b>	<b>40</b>
5.1. Das Wechselwirkungspotential . . . . .	40
5.2. Erwartungswerte und Korrelationsfunktionen der Orte und Impulse . . . . .	41
5.2.1. Erwartungswerte der Ortskoordinaten . . . . .	42
5.2.2. Korrelationsfunktion der Ortskoordinaten . . . . .	44
5.2.3. Erwartungswerte der Impulse . . . . .	47
5.2.4. Korrelationsfunktion der Impulse . . . . .	48
5.3. Teilchendichten im Impulsraum . . . . .	50
5.3.1. Ein- und Zweiteilchendichte für $N=1$ und $M=1$ . . . . .	51
5.3.2. Ein- und Zweiteilchendichte für $N=2$ und $M=1$ . . . . .	55
<b>6. Thermodynamik des Luttinger-Modells</b>	<b>59</b>

---

6.1. Kanonische Zustandssumme . . . . .	59
6.2. Trunkiertes Luttinger-Modell . . . . .	60
6.3. Thermodynamische Zustandsgrößen des trunkierten Luttinger-Modells . . .	61
6.3.1. Zustandssumme für ein System mit Fermionen der Sorte 1 . . . . .	62
6.3.2. Zustandssumme für ein System mit Fermionen der Sorte 2 . . . . .	66
6.3.3. Zustandssumme für ein System mit beiden Fermionensorten . . . . .	67
6.3.4. Zustandssumme für ein System mit idealen Bosonen und Fermionen . . . . .	68
6.3.5. Innere Energie . . . . .	69
6.3.6. Freie Energie . . . . .	71
6.3.7. Spezifische Wärme . . . . .	72
6.3.8. Entropie . . . . .	74
<b>7. Fazit Luttinger-Modell</b>	<b>77</b>
<b>IV. Fermionen im eindimensionalen harmonischen Oszillator mit Wechselwirkung</b>	<b>79</b>
<b>8. Der Hamiltonoperator</b>	<b>79</b>
<b>9. Die kanonische Zustandssumme</b>	<b>81</b>
<b>10. Thermodynamische Zustandsgrößen</b>	<b>86</b>
10.1. Skalierte Zustandssumme . . . . .	86
10.2. Innere Energie . . . . .	86
10.3. Spezifische Wärme . . . . .	89
10.4. Entropie . . . . .	91
10.5. Spezifische Wärme in der Hochtemperaturentwicklung . . . . .	93
<b>11. Fazit Fermionen mit Wechselwirkung</b>	<b>94</b>
<b>V. Zusammenfassung und Ausblick</b>	<b>96</b>
<b>Literatur</b>	<b>99</b>

I.

## Einleitung

Es ist eine experimentelle Erkenntnis, daß die Natur nur durch Wellenfunktionen mit definiertem Symmetriecharakter richtig beschrieben werden kann. Dabei gibt es offenbar zwei Sorten von Teilchen, nämlich solche, die durch symmetrische Wellenfunktionen beschrieben werden und nach dem indischen Physiker Bose Bosonen genannt werden und solche die durch antisymmetrische Wellenfunktionen beschrieben werden und nach Fermi Fermionen heißen. Vielteilchenwellenfunktionen mit definierten Symmetrieeigenschaften sind Eigenfunktionen des Permutationsoperators

$$\pi_{ik}\psi(x_1, \dots, x_i, \dots, x_k, \dots, x_N) = \psi(x_1, \dots, x_k, \dots, x_i, \dots, x_N).$$

Falls der Hamiltonoperator invariant gegen eine Umnummerierung aller Teilchen ist, gilt

$$\left[ \tilde{H}, \pi_{ik} \right] = 0 \text{ für alle } i, k = 1, \dots, N \text{ mit } i \neq k$$

und es können Eigenzustände von  $\tilde{H}$  so konstruiert werden, daß sie auch Eigenzustände der Symmetrieeoperatoren sind. Der Vertauschungsoperator  $\pi_{ik}$  hat zwei mögliche Eigenwerte

$$\pi_{ik}\psi(x_1, \dots, x_i, \dots, x_k, \dots, x_N) = \lambda\psi(x_1, \dots, x_i, \dots, x_k, \dots, x_N),$$

nämlich  $\lambda = \pm 1$ . Wellenfunktionen zum Eigenwert  $\lambda = 1$  sind symmetrisch unter Vertauschung von Teilchen oder Zuständen, Wellenfunktionen zum Eigenwert  $\lambda = -1$  sind antisymmetrisch unter Vertauschung von Teilchen oder Zuständen. Es ist eine experimentelle Erfahrung, daß Vielteilchensysteme von Teilchen mit einem halbzahligen Spin gerade durch antisymmetrische Wellenfunktionen und Vielteilchensysteme von Teilchen mit einem ganzzahligen Spin durch symmetrische Wellenfunktionen beschrieben werden. Beide Teilchensorten, Fermionen und Bosonen gehorchen unterschiedlichen Statistiken, was sich in den unterschiedlichen maximalen Besetzungszahlen der Einteilchenzustände des Vielteilchen Problems ausdrückt. In einem System von Fermionen darf jeder Einteilchenzustand nur maximal einfach besetzt sein, da ansonsten die antisymmetrische Vielteilchenwellenfunktion verschwindet. In einem System von Bosonen, darf dagegen jeder Einteilchenzustand beliebig oft besetzt sein. Hieraus ergeben sich Unterschiede in der Abzählung der Zustände für die Zustandssumme, woraus die anderen thermodynamischen Zustandsgrößen abgeleitet werden können. Somit haben die Systeme völlig unterschiedliche thermodynamische Eigenschaften und es treten Effekte auf, die für die andere Teilchensorte nicht bekannt sind. So zum Beispiel für die Bosonen die Bose-Einstein Kondensation, ein von Albert Einstein bereits 1925 vorhergesagter Phasenübergang für ein ideales Bose Gas bei tiefen Temperaturen. Einer Forschungsgruppe aus Boulder (Colorado) ist es 1995 erstmals gelungen, ein Bose-Einstein Kondensat für Rubidiumatome experimentell

---

nachzuweisen [1]. Bereits kurz darauf wurden Bose-Einstein Kondensate mit Lithium [2] und Natrium [3] erzeugt. Eine sehr ausführliche Theorie zur Bose-Einstein Kondensation in magnetischen Fallen ist in [4] dargestellt.

Die Bose-Einstein Kondensation ist ein Phasenübergang, bei dem bei einer sehr niedrigen kritischen Temperatur der Grundzustand eines idealen Bosonen Systems makroskopisch besetzt wird. Die Phase des Systems, die sich in diesem Grundzustand befindet, nennt man Bose-Einstein Kondensat. In der Theorie wurden die Alkaliatome als perfekte Bosonen angenommen, deren innere Struktur vernachlässigt werden kann, da diese Atome aus einer geraden Anzahl gebundener Fermionen bestehen und einen ganzzahligen Gesamtspin haben. Dieses gilt jedoch nur näherungsweise, denn die Atome sind aus Fermionen zusammengesetzt, für die weiterhin das Pauli-Prinzip gilt. Mit idealen Bosonen wäre bei der Bose-Einstein Kondensation die mögliche Besetzungszahl des Grundzustandes unendlich groß, tatsächlich bleibt sie bei der Bose-Einstein Kondensation mit Atomen aber durch das Pauli-Prinzip beschränkt [5], sogar wenn man die Wechselwirkungen zwischen den Atomen vernachlässigt. Die Frage ist also: Warum verhalten sich Atome aus einer geraden Anzahl von Fermionen wie Bosonen und worin unterscheiden sich diese Pseudobosonen von echten idealen Bosonen?

Um diese Fragestellung zu behandeln, wird dazu als erstes in dieser Arbeit eine Fermion-Boson-Abbildung definiert, ähnlich wie sie auch in der Kernphysik [6, 7] benutzt wird, um Zustände eines Systems von  $2N$  Fermionen auf Zustände eines Systems von  $N$  Pseudobosonen abzubilden. In der Kernphysik wird eine solche Abbildung lediglich dazu benutzt, um Rechnungen für schwere Kerne zu vereinfachen, da die Bose-Einstein Statistik leichter zu handhaben ist, als die Fermi-Dirac Statistik. In der Theorie der Bose-Einstein Kondensation werden die Wechselwirkungen zwischen den Bosonen vernachlässigt. Mit der Fermion-Boson-Abbildung wird ein wechselwirkendes System von Fermionen untersucht und versucht den Hamiltonoperator dieses Systems in den Pseudobosonenraum zu übertragen, denn auch im Experiment lassen sich nicht immer die Wechselwirkungen zwischen den Teilchen vernachlässigen, wie sich an der Suprafluidität von  $^4\text{He}$  zeigt [8]. Es wird davon ausgegangen, daß die Suprafluidität von Helium eine durch die Wechselwirkung zwischen den Atomen verfälschte Bose-Einstein Kondensation ist, da die experimentellen Größen dieses Phasenüberganges stark von den aus der Bose-Einstein Statistik vorhergesagten abweichen. Bis heute existiert keine Theorie zur Bose-Einstein Kondensation von wechselwirkenden Bosonen.

Mit dem Luttinger-Modell [9, 10, 11] soll ein exakt lösbares Modell von wechselwirkenden Fermionen betrachtet werden, um die Bildung von Pseudobosonen an diesem System zu untersuchen. Die Luttinger-Flüssigkeiten, Systeme die dem Luttinger-Modell entsprechen, finden heute Anwendung in der Festkörperphysik, worauf hier nicht näher eingegangen werden soll. Eine ausführliche Einführung ist in [12, 13, 14] dargestellt. Hier ist nur die exakte Lösbarkeit dieses Systems von wechselwirkenden Fermionen von Interesse, die physikalische Interpretation der Größen des Systems ist zunächst zweitrangig. Es werden dabei

quantenmechanische Größen wie Korrelationsfunktionen und Teilchendichten bestimmt, um zu untersuchen, ob eine Paarbildung bei den Fermionen zu beobachten ist. Für die Betrachtung der thermodynamischen Zustandsgrößen wird das trunkeerte Luttinger-Modell eingeführt und untersucht, ob hier Ähnlichkeiten im Verhalten zu Systemen mit idealen Bosonen besteht.

Im letzten Teil wird dann noch ein System von wechselwirkenden Fermionen im eindimensionalen harmonischen Oszillator definiert. Dieses System wurde mit Rücksicht auf die Erfahrungen des trunkeerten Luttinger-Modells konstruiert und es werden die gleichen thermodynamischen Größen betrachtet.

## II.

# Lineare Abbildung von Fermionenzuständen auf Pseudobosonenzustände

## 1. Fermion-Boson-Abbildung

In diesem Kapitel wird eine Fermion-Boson-Abbildung besprochen, die die Zustände eines antisymmetrischen,  $2N$ -Teilchen Multifermionenhilbertraumes in einen symmetrischen,  $N$ -Teilchen Pseudobosonenhilbertraum abbildet. Die Fermionen werden in Paaren zu Pseudobosonen zusammengefaßt. Mit Hilfe dieser Abbildung soll ein in beiden Systemen äquivalenter Hamiltonoperator gefunden werden. Dabei soll untersucht werden, wie sich die physikalischen Größen des Systems, insbesondere die thermodynamischen Zustandsgrößen, unter der Transformation vom Multifermionenraum zum Pseudobosonenraum ändern.

### 1.1. Der Multifermionenraum

Um den Multifermionenraum einführen zu können, betrachten wir zunächst ein Einteilchensystem mit dem dazugehörigen Hilbertraum  $\mathcal{H}$ . Die Dimension von  $\mathcal{H}$  sei  $p$

$$\dim \mathcal{H} = p, \quad (1.1)$$

wobei  $p$  nicht endlich sein muß und somit auch ein unendlichdimensionaler Hilbertraum erlaubt ist.

Eine Basis von  $\mathcal{H}$  ist ein  $p$ -Tupel von Einteilchenzuständen

$$(|i\rangle)_{i \in I} = (|i_1\rangle, |i_2\rangle, |i_3\rangle, \dots, |i_p\rangle) \quad \text{mit } i_\nu \neq i_\mu \text{ für } \nu \neq \mu,$$

die durch ihre Quantenzahlen  $i_j$  bestimmt sind.  $I = \{i_1, i_2, i_3, \dots\}$  ist die Menge aller Quantenzahlen des Einteilchensystems und  $\mathcal{P}_n(I)$  die Menge aller  $n$ -elementigen Teilmengen von  $I$ .  $\mathcal{P}_n(I)$  ist also die Menge aller Auswahlmöglichkeiten von  $n$  Elementen aus  $I$ .



Sei nun  $\tilde{\alpha}_n \in \mathcal{P}_n(I)$ , so sollen im weiteren die geordneten  $n$ -Tupel, die aus  $\tilde{\alpha}_n$  hervorgehen, mit  $\alpha_n$  bezeichnet werden

$$\begin{aligned} \tilde{\alpha}_n &= \{i_1, i_2, \dots, i_n\} \in \mathcal{P}_n(I) \\ \Rightarrow \alpha_n &= (i_1, i_2, \dots, i_n) \quad \text{mit} \quad i_1 < i_2 < \dots < i_n, \end{aligned} \quad (1.2)$$

umgekehrt bezeichne  $\tilde{\alpha}_n$  bei gegebenen  $n$ -Tupel  $\alpha_n$ , die Menge der Elemente des Tupels.

In dem  $n$ -fachen Tensorprodukt von  $\mathcal{H}$

$$\mathcal{H}_n = \bigotimes_{i=1}^n \mathcal{H},$$

kann ein Zustand der Produktbasis des Systems

$$|\phi\rangle = |i_1\rangle \otimes |i_2\rangle \otimes \dots \otimes |i_n\rangle \in \mathcal{H}_n$$

eindeutig durch ein  $n$ -Tupel

$$\phi = (i_1, i_2, \dots, i_n) \quad \text{mit} \quad i_j \in I$$

beschrieben werden. Diese Zustände und der dazugehörige Hilbertraum haben jedoch noch keinen definierten Symmetriecharakter, da es sich um einfache Produktzustände handelt, und beschreiben somit das Multifermionensystem nicht richtig. Die Slaterdeterminante gibt den antisymmetrischen Charakter der Zustände für Fermionen richtig wieder. Es muß nun aus dem  $n$ -Tupel  $\phi$ , bzw. dem Tupel der Kets  $(|i_1\rangle, |i_2\rangle, \dots, |i_n\rangle)$  eine Slaterdeterminante konstruiert werden. Die Slaterdeterminante ist einfach die Summe über alle Permutationen des Produktzustandes mit dem Vorzeichen der Permutation gewichtet.

Sei  $\pi$  eine Permutation der Indexmenge  $\{1, \dots, n\}$

$$\pi : \{1, \dots, n\} \longrightarrow \{1, \dots, n\}$$

und  $\mathcal{S}_n$  die symmetrische Gruppe, d.h. die Menge aller Permutationen der Indexmenge  $\{1, \dots, n\}$

$$\mathcal{S}_n = \{\pi \mid \pi : \{1, \dots, n\} \longrightarrow \{1, \dots, n\} \wedge \pi \text{ bijektiv}\} \quad \text{mit} \quad n \in \mathbb{N}^*,$$

so enthält  $\mathcal{S}_n$   $n!$  Elemente.  $\mathbb{N}^*$  ist die Menge der natürlichen Zahlen ohne die Null. Die Slaterdeterminante

$$\begin{aligned} |\alpha_n\rangle &\equiv \frac{1}{\sqrt{n!}} \sum_{\pi \in \mathcal{S}_n} (-1)^\pi |i_{\pi 1}\rangle \otimes |i_{\pi 2}\rangle \otimes \dots \otimes |i_{\pi n}\rangle \\ &= |i_1, \dots, i_n\rangle^- \end{aligned} \quad (1.3)$$

mit

$$\alpha_n = (i_1, i_2, \dots, i_n) \quad i_j \in I \quad (1.4)$$

und

$$(-1)^\pi = \begin{cases} -1 & : \pi \text{ ungerade Permutation} \\ 1 & : \pi \text{ gerade Permutation.} \end{cases}$$

beschreibt den antisymmetrischen Charakter eines fermionischen Zustands nun richtig.  $|i_1, \dots, i_N\rangle^-$  ist nur eine abgekürzte Schreibweise für die Slaterdeterminante (1.3). Diese Slaterdeterminanten spannen den Multifermionenraum auf, der der antisymmetrisierte Produktraum von  $n$  Fermionen ist.

$$\mathcal{H}_n^- = \left( \bigotimes_{i=1}^n \mathcal{H} \right)^-$$

Das  $-$  Zeichen steht dabei für die vollständige Antisymmetrisierung.

Bei Fermionen muß die Dimension der Einteilchenhilberträume mindestens so groß sein wie die Teilchenzahl des Multifermionenproblems ( $n \leq p$ ), da sonst Einteilchenzustände doppelt besetzt wären und somit der fermionische Zustand durch das Pauliprinzip verboten ist. Die nichtverschwindenden Zustände  $|\alpha_n\rangle$  können mit den geordneten  $n$ -Tupeln

$$\alpha_n = (i_1, i_2, \dots, i_n) \quad \text{mit} \quad \tilde{\alpha}_n \in \mathcal{P}_n(I)$$

identifiziert werden.

Für die Dimension des Multifermionenraumes  $\mathcal{H}_n^-$  ergibt sich mit Gleichung (1.1)

$$\dim \mathcal{H}_n^- = \binom{p}{n}, \quad (1.5)$$

da die  $p$  Einteilchenzustände auf  $n$  Fermionen verteilt werden müssen und wie bereits oben erwähnt nur jeweils ein Fermion einen Einteilchenzustand besetzen darf.

Der Multifermionenraum der im weiteren betrachtet wird, ist der  $\mathcal{H}_{2N}^-$ . Seine Dimension

$$\dim \mathcal{H}_{2N}^- = \binom{p}{2N} = r. \quad (1.6)$$

ergibt sich aus (1.5). Die Zustände  $|\alpha_{2N}\rangle \in \mathcal{H}_{2N}^-$  werden mit

$$|A\rangle \equiv \frac{1}{\sqrt{(2N)!}} \sum_{\pi \in \mathcal{S}_{2N}} (-1)^\pi |i_{\pi 1}\rangle \otimes |i_{\pi 2}\rangle \otimes \dots \otimes |i_{\pi 2N}\rangle \quad (1.7)$$

mit  $\tilde{A} \in \mathcal{P}_{2N}(I)$  bezeichnet. Bevor eine Basis mit solchen Zuständen angegeben werden kann, muß noch eine Ordnung der Zustände  $|A\rangle$  definiert werden, da eine Basis von der

Reihenfolge der Zustände abhängt. Es muß also eine Vorschrift gefunden werden, ein  $r$ -Tupel von Zuständen  $|A_j\rangle$  zu sortieren. Den Zuständen  $|A_j\rangle$  liegen dabei, wie oben beschrieben, die geordneten  $2N$ -Tupel  $A_j$  zugrunde, die aus den Elementen der Mengen  $\tilde{A}_j$  konstruiert sind. Diese  $2N$ -Tupel werden nach der Größe der am jeweiligen Zustand beteiligten Quantenzahlen angeordnet.

Seien

$$A = (i_1, \dots, i_{2N}) \quad \text{und} \quad A' = (i'_1, \dots, i'_{2N}) \quad \text{mit} \quad \tilde{A}, \tilde{A}' \in \mathcal{P}_{2N}(I),$$

dann ist die Relation „ $<$ “ für ein  $2N$ -Tupel  $A$  als die lexikographische Ordnung

$$A < A' : \exists m \in \{1, \dots, 2N\} \text{ mit } i_n = i'_n \text{ für } n < m \text{ und } i_m < i'_m \quad (1.8)$$

definiert. Hiermit ist nun

$$(|A_j\rangle) \quad \text{mit} \quad \tilde{A}_j \in \mathcal{P}_{2N}(I) \wedge A_j < A_{j+1} \quad \forall j \in \{1, \dots, r-1\} \quad (1.9)$$

eine mögliche Basis des Hilbertraumes  $\mathcal{H}_{2N}^-$ , der durch die Zustände  $|A\rangle$  aufgespannt wird. Die strenge Ordnung der Tupel  $A_j$  ist Voraussetzung für diese Basis.

## 1.2. Der Pseudobosonenraum

Vorerst bleibt noch der Begriff der Pseudobosonen zu klären. In dieser Arbeit verstehen wir zunächst hierunter eine Paarung von zwei identischen Fermionen, d.h. der Zustand eines Pseudobosons ist der antisymmetrisierte Zweiteilchenzustand von einem Paar von Fermionen, also identifizieren wir  $\mathcal{B}$ , den Einteilchenhilbertraum eines Pseudobosons mit  $\mathcal{H}_2^-$ , dem antisymmetrischen Zweiteilchenhilbertraum.

$$\mathcal{B} \equiv \mathcal{H}_2^-$$

Die Dimension des Einteilchen-Pseudobosonenraumes

$$\dim \mathcal{B} \equiv \dim \mathcal{H}_2^- = \binom{p}{2} = \frac{p(p-1)}{2} = q \quad (1.10)$$

ergibt sich direkt aus (1.5). Die Slaterdeterminanten

$$|\beta\rangle \equiv \frac{1}{\sqrt{2}} (|i_1\rangle \otimes |i_2\rangle - |i_2\rangle \otimes |i_1\rangle) \quad \text{mit} \quad \{i_1, i_2\} \in \mathcal{P}_2(I). \quad (1.11)$$

des  $\mathcal{H}_2^-$  stellen also den Zustand eines Pseudobosons dar. So ist eine Basis von  $\mathcal{H}_2^-$  auch eine Basis von  $\mathcal{B}$

$$(|\beta_k\rangle) \quad \text{mit} \quad \tilde{\beta}_k \in \mathcal{P}_2(I) \wedge \beta_k < \beta_{k+1} \quad \forall k \in \{1, \dots, q-1\}, \quad (1.12)$$

wobei die Definition der Ordnung (1.8) analog auf die streng geordneten Paare  $\beta$  übertragen wurde. Paare  $\beta$  die sich in ihren beiden Quantenzahlen unterscheiden

$$\beta \neq \beta' \text{ und } \tilde{\beta} \cap \tilde{\beta}' = 0$$

nennen wir fremd, Paare die sich nur in einer Quantenzahl unterscheiden

$$\beta \neq \beta', \tilde{\beta} \cap \tilde{\beta}' \neq 0 \text{ und } \tilde{\beta} \neq \tilde{\beta}'$$

nennen wir benachbart. Die Basis von  $\mathcal{B}$  setzt sich also aus benachbarten und fremden Paaren  $\beta$  zusammen. Es läßt sich zu jedem Zustand der Basis einen benachbarten finden, jedoch läßt sich auch eine Auswahl fremder Zustände treffen.

Der  $N$ -Pseudobosonenhilbertraum soll im Gegensatz zum Multifermionenraum nicht antisymmetrisch, sondern symmetrisch sein. Der Vielteilchenraum der Pseudobosonen ist also das symmetrisierte  $N$ -fache Tensorprodukt der Einteilchen-Pseudobosonenräume.

$$\mathcal{B}_N^+ = \left( \bigotimes_{i=1}^N \mathcal{B} \right)^+ = \left( \bigotimes_{i=1}^N \mathcal{H}_2^- \right)^+$$

Hier steht das  $+$  Zeichen für die vollständige Symmetrisierung. Dieser Raum wird durch die symmetrischen Zustände

$$\begin{aligned} |B\rangle &\equiv \frac{1}{\sqrt{N!n_1!n_2!\dots n_q!}} \sum_{\pi \in S_N} |\beta_{\pi_1}\rangle \otimes |\beta_{\pi_2}\rangle \otimes \dots \otimes |\beta_{\pi_N}\rangle \\ &= |\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_N\rangle^+ \end{aligned} \quad (1.13)$$

aufgespannt.  $|\beta_1, \dots, \beta_N\rangle^+$  ist eine Kurzschreibweise des symmetrisierten Zustandes (1.13). Bei symmetrischen Zuständen ist die Normierung im allgemeinen etwas schwieriger als bei Slaterdeterminanten, da die Normierung von den Besetzungszahlen der Einteilchenzustände [15], hier der Pseudobosonenzustände (1.11),  $n_k$  abhängt.

Für die Dimension des Pseudobosonenraumes ergibt sich mit Gleichung (1.10)

$$\dim \mathcal{B}_N^+ = \binom{q + N - 1}{N} = s.$$

Sei  $B_j$  ein  $N$ -Tupel von Paaren  $\beta_k$

$$B_j = (\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_N) \quad \text{mit} \quad \tilde{\beta}_k \in \mathcal{P}_2(I),$$

daß auf den Zustand  $|B_j\rangle$  führt, so ist

$$(|B_j\rangle) \quad \text{mit} \quad \beta_1 \leq \beta_2 \leq \dots \leq \beta_N \wedge B_j < B_{j+1} \quad \forall j \in \{1, \dots, s-1\} \quad (1.14)$$

eine Basis des  $\mathcal{B}_N^+$ . Die  $\beta_k$  sind zwar streng geordnete Paare, jedoch können im gesamten Zustand auch gleiche oder benachbarte Paare von Quantenzahlen auftreten, da die Zustände jetzt symmetrisch sind und das Pauliprinzip für die Paare nicht mehr gilt. Hierdurch wird die Dimension des Pseudobosonenraumes erheblich größer als die des dazugehörige Multifermionenraumes.

### 1.3. Definition der Abbildung

Ziel ist es jetzt eine lineare Abbildung  $\mathcal{J}$  zu definieren, die die antisymmetrischen Zustände des Multifermionenraumes  $\mathcal{H}_{2N}^-$  auf die symmetrische Zustände des Pseudobosonenraumes  $\mathcal{B}_N^+$  abbildet,

$$\mathcal{J} : \mathcal{H}_{2N}^- \longrightarrow \mathcal{B}_N^+$$

d.h. sie macht aus einem antisymmetrischen  $2N$  Teilchensystem ein symmetrisches  $N$  Teilchensystem. Der Zustand  $|A\rangle \in \mathcal{H}_{2N}^-$  ist per Definition (1.7) antisymmetrisch unter Vertauschung zweier Zustände

$$\pi_{kl}|i_1, \dots, i_k, \dots, i_l, \dots, i_{2N}\rangle^- = |i_1, \dots, i_l, \dots, i_k, \dots, i_{2N}\rangle^- = -|i_1, \dots, i_k, \dots, i_l, \dots, i_{2N}\rangle^-,$$

d.h. er ist bereits symmetrisch unter Vertauschung von Paaren

$$\pi_{kl}\pi_{mn}|i_1, \dots, i_{2N}\rangle^- = -\pi_{kl}|i_1, \dots, i_{2N}\rangle^- = |i_1, \dots, i_{2N}\rangle^-.$$

Die Zustände  $|A\rangle$  haben also bereits die für Pseudobosonenzustände geforderten Symmetrieeigenschaften. Bevor allerdings die Abbildung  $\mathcal{J}$  definiert wird, soll noch der Begriff der Paarung geklärt werden.

Eine Paarung von  $A$  sei ein streng geordnetes  $N$ -Tupel von Paaren

$$\mathfrak{P}_A = (\beta_1, \dots, \beta_N) \quad (1.15)$$

mit

$$\beta_k = (i_{k_1}, i_{k_2}) \text{ mit } i_{k_1} < i_{k_2}, \quad \tilde{\beta}_k \in \mathcal{P}_2(I), \quad \tilde{A} = \bigcup_{k=1}^N \tilde{\beta}_k, \\ \beta_k < \beta_{k+1} \quad \forall k \in \{1, \dots, N-1\}.$$

An einer Paarung  $\mathfrak{P}_A$  sind also nur einander fremde Paare beteiligt, denn die Vereinigung der Paare muß wieder die  $2N$ -elementige Menge  $\tilde{A}$  ergeben.

$$\mathfrak{P}_A = \left( \overbrace{\left( \underbrace{(i_1, i_2)}_{\beta_1}, \underbrace{(i_3, i_4)}_{\beta_2}, \underbrace{(i_5, i_6)}_{\beta_3}, \dots, \underbrace{(i_{2N-1}, i_{2N})}_{\beta_N} \right)}^A \right) \quad (1.16) \\ \text{mit } i_1 < i_2 < \dots < i_{2N}$$

Hier müssen für  $A$  natürlich die Klammern zwischen den Paaren weggelassen werden.

Betrachten wir nun die Slaterdeterminante  $|A\rangle$

$$|A\rangle = |i_1, i_2, \dots, i_{2N}\rangle^- = \frac{1}{\sqrt{(2N)!}} \sum_{\pi \in S_{2N}} (-1)^\pi \pi |i_1, \dots, i_{2N}\rangle, \quad (1.17)$$

so ist  $\pi$  ein Permutationsoperator der symmetrischen Gruppe  $S_{2N}$ . Sei  $\Theta$  nun die Untergruppe von  $S_{2N}$

$$\Theta \subset S_{2N},$$

die Permutationen einerseits der Paare  $\beta_j$  in der Paarung  $\mathfrak{P}_A$  und andererseits der Quantenzahlen  $i_k$  in den Paaren  $\beta_j$  enthält

$$\theta \in \Theta : \beta \longleftrightarrow \beta', i_1 \longleftrightarrow i_2, i'_1 \longleftrightarrow i'_2 \quad \text{mit } \beta = (i_1, i_2), \beta' = (i'_1, i'_2),$$

dabei ist  $\theta$  (un)gerade, wenn sich  $\theta$  aus einer (un)geraden Anzahl von Quantenzahlvertauschungen zusammensetzen läßt. Für die Vertauschung von Quantenzahlpaaren ist  $\theta$  also immer gerade. Beispiel für  $N=2$ :

$$\theta |1, 2, 3, 4\rangle = \theta |(1, 2), (3, 4)\rangle = |(4, 3), (2, 1)\rangle$$

Die Anzahl der Elemente von  $\Theta$  ist

$$|\Theta| = 2^N N!,$$

da es  $N!$  Möglichkeiten gibt die Paare  $\beta_j$  in der Paarung (1.16) anzuordnen und für jedes Paar zwei Möglichkeiten die Quantenzahlen anzuordnen, also insgesamt  $2^N$  Möglichkeiten. Die disjunkte Vereinigung

$$S_{2N} = \bigcup_{\lambda \in \Lambda} \Theta \lambda \quad \text{mit } \Lambda \subset \Theta$$

ergibt wieder die symmetrische Gruppe  $S_{2N}$ , wobei  $\Theta \lambda$  eine Linksnebenklasse von  $\Theta$  und  $\Lambda$  ein System von Vertretern aus den Linksnebenklassen ist [16]. Somit gilt  $\theta \lambda \in S_{2N}$  und alle Permutationen  $\pi \in S_{2N}$  lassen sich durch eine Verknüpfung von Permutationen  $\theta \lambda$  darstellen. Zum besseren Verständnis wird  $\Theta$  noch in die Untergruppen  $\Theta_1$  und  $\Theta_2$  mit

$$\Theta = \Theta_1 \Theta_2$$

aufgeteilt, die jeweils nur aus Permutationen von Quantenzahlen innerhalb von Paaren

$$\theta_1 \in \Theta_1 : i_1 \longrightarrow i_2 \quad \text{mit } \beta = (i_1, i_2)$$

und nur aus Permutationen von Paaren

$$\theta_2 \in \Theta_2 : \beta \longrightarrow \beta'$$

bestehen. Hiermit läßt sich nun (1.17) schreiben als

$$\begin{aligned}
|i_1, \dots, i_N\rangle^- &= \frac{1}{\sqrt{(2N)!}} \sum_{\pi \in \mathcal{S}_{2N}} (-1)^\pi \pi |i_1, \dots, i_N\rangle \\
&= \frac{1}{\sqrt{(2N)!}} \sum_{\lambda \in \Lambda} \sum_{\theta \in \Theta} (-1)^{\theta\lambda} (\theta\lambda) |i_1, \dots, i_{2N}\rangle \\
&= \frac{1}{\sqrt{(2N)!}} \sum_{\lambda \in \Lambda} (-1)^\lambda \sum_{\theta \in \Theta} (-1)^\theta \theta |(i_{\lambda 1}, i_{\lambda 2}), \dots, (i_{\lambda(2N-1)}, i_{\lambda 2N})\rangle \\
&= \frac{1}{\sqrt{(2N)!}} \sum_{\lambda \in \Lambda} (-1)^\lambda \sum_{\theta_2 \in \Theta_2} \sum_{\theta_1 \in \Theta_1} (-1)^{\theta_1} (\theta_2 \theta_1) |(i_{\lambda 1}, i_{\lambda 2}), \dots, (i_{\lambda(2N-1)}, i_{\lambda 2N})\rangle \\
&= \sqrt{\frac{2^N}{(2N)!}} \sum_{\lambda \in \Lambda} (-1)^\lambda \sum_{\theta_2 \in \Theta_2} \theta_2 ||i_{\lambda 1}, i_{\lambda 2}\rangle^-, \dots, |i_{\lambda(2N-1)}, i_{\lambda 2N}\rangle^- \rangle \quad (1.18)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \sqrt{\frac{N! 2^N}{(2N)!}} \sum_{\lambda \in \Lambda} (-1)^\lambda ||i_{\lambda 1}, i_{\lambda 2}\rangle^-, \dots, |i_{\lambda(2N-1)}, i_{\lambda 2N}\rangle^- \rangle^+ \quad (1.19) \\
&= \mathcal{J} |i_1, \dots, i_N\rangle^-.
\end{aligned}$$

In Gleichung (1.18) wurden alle Vertauschungen von Quantenzahlen in Paaren ausgeführt, was auf die Slaterdeterminanten von Paaren führt, in (1.19) dann schließlich noch alle Paarvertauschungen, was auf symmetrische Zustände aus dem Pseudobosonenraum führt. Gleichung (1.19) ist nun eine Linearkombination von Zuständen des Pseudobosonenraumes, dabei kommen in jedem Summanden nur einander fremde Paare vor. Jeder Zustand des  $\mathcal{H}_{2N}^-$  kann so mit einem aus dem  $\mathcal{B}_N^+$  identifiziert werden, wobei das Pauli-Prinzip erhalten bleibt. Man sieht also, daß die Fermion-Boson-Abbildung  $\mathcal{J}$  die Einbettung von dem Multifermionenraum  $\mathcal{H}_{2N}^-$  in den Pseudobosonenraum  $\mathcal{B}_N^+$  ist

$$\mathcal{H}_{2N}^- \subseteq \mathcal{B}_N^+.$$

Die Abbildung  $\mathcal{J}$  ist also die Identität.

Für  $N \geq 2$  ist das Bild von  $\mathcal{J}$  tatsächlich nur eine Teilmenge des Pseudobosonenraumes

$$\forall N \geq 2 \quad : \quad \mathcal{H}_{2N}^- \subset \mathcal{B}_N^+, \quad (1.20)$$

da es im Pseudobosonenraum Zustände gibt, die im Multifermionenraum durch das Pauli-Prinzip ausgeschlossen sind. Zwar können auch im Pseudobosonenraum innerhalb eines Einteilchen-Pseudobosonenzustands  $|\beta\rangle$  Einteilchenquantenzahlen nur einmal vorkommen, jedoch können im Pseudobosonenzustand  $|B\rangle$  gleiche Paare  $\beta_j$  auftreten. Kleinere Teilchenzahlen als  $N = 2$  zu betrachten ist wenig sinnvoll, da  $\mathcal{B}_N^+$  hierfür keine Symmetrieeigenschaften hat. Die Zustände von  $\mathcal{B}_N^+$  mit gleichen Paaren beschreiben das Multifermionensystem nicht richtig, da sie das Pauliprinzip nicht beachten. Diese Zustände

sind also unphysikalisch. Hier ist ein kurzes Zahlenbeispiel für die verschiedene Größe von Multifermionenraum und Pseudobosonenraum.

$$\begin{aligned}\dim \mathcal{H}_{2N}^- &= \frac{p!}{(2N)!(p-2N)!} \\ \dim \mathcal{B}_N^+ &= \frac{(q+N-1)!}{N!(q-1)!}\end{aligned}$$

$N=2$

$$\begin{aligned}\frac{\dim \mathcal{B}_2^+}{\dim \mathcal{H}_4^-} &= \frac{p^2 - 3p + 6}{p^2 - 5p + 6} \\ &= 3 + \frac{24}{p-3} - \frac{12}{p-2} > 3 \quad \forall p \geq 4\end{aligned}$$

$N=3$

$$\frac{\dim \mathcal{B}_3^+}{\dim \mathcal{H}_6^-} = 15 + \frac{1320}{-5+p} - \frac{1680}{-4+p} + \frac{600}{-3+p} - \frac{60}{-2+p} > 15 \quad \forall p \geq 6$$

Zwar kommen in der Linearkombination in Gleichung (1.19) auch benachbarte Paare vor, jedoch müssen sie durch eine Linearkombination von Pseudobosonenzuständen darstellbar sein, die nur aus fremden Paaren bestehen.

In Abbildung 1 ist  $\mathcal{J}$  schematisch dargestellt [6]. Der physikalische Unterraum in den die Multifermionenzustände abgebildet werden, das Bild von  $\mathcal{J}$ , ist mit  $P$  bezeichnet

$$\mathcal{J}[\mathcal{H}_{2N}^-] = \mathcal{H}_{2N}^- = P,$$

der unphysikalische Unterraum mit  $U$

$$U = \mathcal{B}_N^+ \cap P^\perp.$$

Der unphysikalische Unterraum wird durch die symmetrischen Zustände des  $\mathcal{B}_N^+$  aufgespannt, die durch das Pauliprinzip verboten sind. Der Pseudobosonenraum ist die direkte Summe aus physikalischem und unphysikalischem Unterraum

$$\mathcal{B}_N^+ = U \oplus P.$$

Die adjungierte Abbildung

$$\mathcal{J}^\dagger : \mathcal{B}_N^+ \longrightarrow \mathcal{H}_{2N}^-$$

ist der Projektor auf den physikalischen Unterraum  $P$

$$\mathcal{J}^\dagger = \mathbb{P}_P,$$

oder auch der Operator der totalen Antisymmetrisierung.



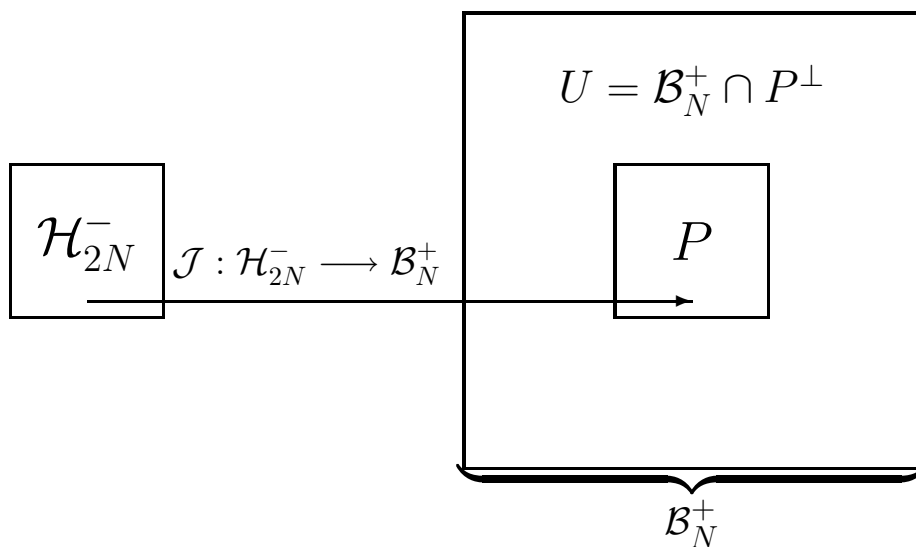


Abbildung 1: Die Fermionen-Bosonen-Abbildung  $\mathcal{J}$  schematisch dargestellt.

In diesem Kapitel wurde die Fermion-Boson-Abbildung definiert und es wurde gezeigt, daß sie die Einbettung des Multifermionenraumes in den Pseudobosonenraum ist, d.h. jeder Zustand des Multifermionenraumes kann mit einem Zustand des Pseudobosonenraumes identifiziert werden. Im nächsten Kapitel wird nun untersucht, wie diese Abbildung auf Operatoren, speziell auf den Hamiltonoperator wirkt und somit die Thermodynamik des Systems beeinflusst.

## 2. Operatoren im Pseudobosonenraum

In diesem Abschnitt sollen nicht mehr nur Zustände zwischen dem Multifermionen- und dem Pseudobosonenraum transformiert werden, sondern auch Operatoren damit das Fermionensystem vollständig auf den Pseudobosonenraum übertragen und untersucht werden kann, unabhängig vom ursprünglichen Hilbertraum. Die Transformation eines Operators aus dem Multifermionenraum

$$\underline{A} : \mathcal{H}_{2N}^- \longrightarrow \mathcal{H}_{2N}^-$$

führt auf den Operator

$$\underline{A}_P = \mathcal{J} \underline{A} \mathcal{J}^\dagger \quad (2.1)$$

im Pseudobosonenraum. Dieser Operator löscht alle unphysikalischen Zustände aus, da  $\mathcal{J}^\dagger$  diese auf die Null im Multifermionenraum abbildet. Denkbar ist nun auch ein Operator  $\underline{A}_{\mathcal{B}_N}^+$ , der für die physikalischen Zustände zu (2.1) äquivalent ist, aber angewandt auf die nichtphysikalischen Zustände zu nichtverschwindenden Ergebnissen führt. Der Operator  $\underline{A}_P$  kann mit diesem durch

$$\underline{A}_P = \underline{A}_{\mathcal{B}_N}^+ \mathcal{J} \mathbb{P}_P$$

dargestellt werden. Von entscheidender Bedeutung für die Thermodynamik des Systems ist, wie sich der Hamiltonoperator unter der Transformation zwischen den beiden Räumen verhält. Dabei wird aus einem Hamiltonoperator  $\underline{H}_{2N}^- \in \text{End}(\mathcal{H}_{2N}^-)$ , der sich aus Einteilchen- und Zweiteilchenoperatoren zusammensetzt, ein Hamiltonoperator  $\underline{H}_N^+ \in \text{End}(\mathcal{B}_N^+)$  konstruiert, so daß

$$\mathcal{J}^\dagger \underline{H}_N^+ \mathcal{J} = \underline{H}_{2N}^-$$

gilt. Durch diese Forderung ist das Verhalten des Hamiltonoperators auf die physikalischen Zustände des Pseudobosonenraumes definiert, wie  $\underline{H}_N^+$  auf die unphysikalischen Zustände wirkt, ist dadurch allerdings noch nicht definiert. In Abbildung 2 ist die Transformation des Hamiltonoperators und der Zustände schematisch dargestellt.

Mit Einteilchenoperatoren wird zum Beispiel die kinetische Energie der einzelnen Teilchen beschrieben, Zweiteilchenoperatoren beschreiben die Wechselwirkungen zwischen den Teilchen. In Abbildung 3 werden die Auswirkungen der Abbildung auf die Wechselwirkungen veranschaulicht. Es sind vier Fermionen mit Zweiteilchenwechselwirkung dargestellt. Durch die Abbildung auf den Pseudobosonenraum werden jeweils zwei Fermionen zu einem Pseudoboson zusammengefaßt, was auch Auswirkungen auf den Hamiltonoperator hat, denn die Wechselwirkungen zwischen den Fermionen innerhalb eines Pseudobosons sind in den Einteilchenoperatoren des Pseudobosonenraumes enthalten. Zweiteilchenoperatoren bleiben nur die Wechselwirkungen zwischen den Pseudobosonen. Was folgt hieraus für einen Hamiltonoperator der aus Ein- und Zweiteilchenoperatoren besteht?

$$\begin{array}{ccc}
\psi & \xrightarrow{\mathcal{J}} & \mathcal{J}\psi \\
\uparrow H_{2N}^- & & \uparrow H_N^+ \\
\phi & \xrightarrow{\mathcal{J}} & \mathcal{J}\phi
\end{array}$$

Abbildung 2: Die Hamiltonoperatoren in den verschiedenen Räumen.

## 2.1. Hamiltonoperator im Multifermionenraum

Im Multifermionenraum soll das System durch einen Hamiltonoperator mit Ein- und Zweiteilchenoperatoren beschrieben werden. Die Einteilchenoperatoren repräsentieren dabei Größen wie kinetische Energie, die Zweiteilchenoperatoren repräsentieren Wechselwirkungen zwischen den Teilchen. Ein Operator, der aus einem Einteilchen- und einem Zweiteilchenanteil besteht setzt sich wie folgt zusammen.

$$\tilde{A} = \sum_{k=1}^n \tilde{A}_k + \sum_{1 \leq k < l \leq n} \tilde{A}_{kl}$$

In dieser Notation ist  $\tilde{A}_k$  ein Einteilchenoperator, der auf das  $k$ -te Teilchen wirkt,  $\tilde{A}_{kl}$  ist ein Zweiteilchenoperator, der auf das  $k$ -te und  $l$ -te Teilchen wirkt. Ein Hamiltonoperator mit kinetischer Energie  $\tilde{T}$  und Zweiteilchenwechselwirkung  $\tilde{V}$  im Multifermionenraum wird als

$$\tilde{H}_{2N}^- = \tilde{T} + \tilde{V} = \sum_{k=1}^{2N} \tilde{T}_k + \sum_{1 \leq k < l \leq 2N} \tilde{V}_{kl} \quad (2.2)$$

geschrieben. Die Einteilchenoperatoren der kinetischen Energie sind dabei für den Multifermionenraum einfach durch

$$\tilde{T}_k = \mathbb{1} \otimes \dots \otimes \mathbb{1} \otimes \underbrace{\tilde{t}}_{k\text{-te Stelle}} \otimes \mathbb{1} \otimes \dots \otimes \mathbb{1}$$

gegeben und es ergibt sich angewandt auf einen Zustand  $|A\rangle \in \mathcal{H}_{2N}^-$

$$\tilde{T}_k |A\rangle \equiv \frac{1}{\sqrt{(2N)!}} \sum_{\pi \in \mathcal{S}_{2N}} (-1)^\pi |i_{\pi 1}\rangle \otimes \dots \otimes \tilde{t} |i_{\pi k}\rangle \otimes \dots \otimes |i_{\pi 2N}\rangle.$$

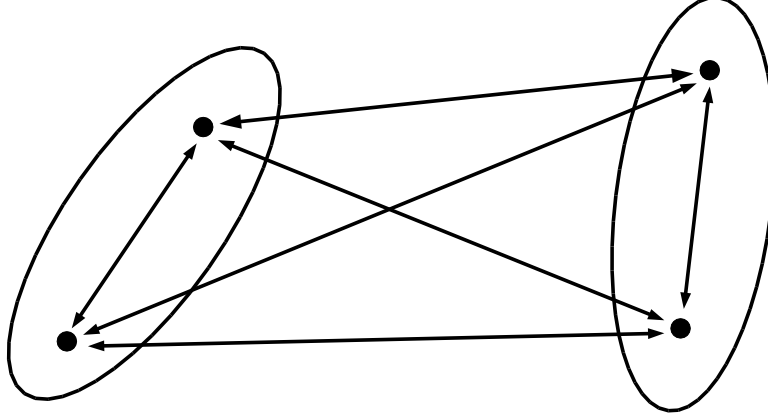


Abbildung 3: Aus vier Fermionen mit Wechselwirkung werden zwei Pseudobosonen mit Wechselwirkung.

Dabei ist  $\tilde{t}$  ein Einteilchenoperator im Einteilchenfermionenraum  $\mathcal{H}$  mit

$$\tilde{t}|i\rangle = i|i\rangle \quad \forall i \in I$$

Der Zweiteilchenoperator  $\tilde{V}_{kl}$  lässt sich nicht so einfach darstellen, wie der Einteilchenoperator. Zunächst wird das Verhalten des Zweiteilchenoperators an einem einfachen Produktzustand

$$|\phi\rangle = |\phi_1\rangle \otimes \dots \otimes |\phi_N\rangle$$

untersucht. Dazu wird der Erwartungswert dieses Zustandes bezüglich des Wechselwirkungsoperators berechnet.

$$\langle \phi | \tilde{V}_{kl} | \phi \rangle = \langle \phi_k \phi_l | \tilde{V} | \phi_k \phi_l \rangle \prod_{\substack{j \neq k \\ j \neq l}} \langle \phi_j | \phi_j \rangle$$

Für die Slaterdeterminante

$$|A\rangle \equiv \frac{1}{\sqrt{(2N)!}} \sum_{\pi \in S_{2N}} (-1)^\pi |i_{\pi 1}\rangle \otimes |i_{\pi 2}\rangle \otimes \dots \otimes |i_{\pi 2N}\rangle \in \mathcal{H}_{2N}^-$$

folgt nun

$$\begin{aligned}
\langle A | \mathcal{V}_{kl} | A \rangle &= \frac{1}{(2N)!} \left( \sum_{\pi \in S_{2N}} (-1)^\pi \langle i_{\pi 1} \dots i_{\pi 2N} | \right) \mathcal{V}_{kl} \left( \sum_{\pi \in S_{2N}} (-1)^\pi | i_{\pi 1} \dots i_{\pi 2N} \rangle \right) \\
&= \frac{1}{(2N)!} \sum_{\pi \in S_{2N}} \sum_{\pi' \in S_{2N}} (-1)^\pi (-1)^{\pi'} \langle i_{\pi 1} \dots i_{\pi 2N} | \mathcal{V}_{kl} | i_{\pi' 1} \dots i_{\pi' 2N} \rangle \\
&= \sum_{\pi \in S_{2N}} (-1)^\pi \langle i_1 \dots i_{2N} | \mathcal{V}_{kl} | i_{\pi 1} \dots i_{\pi 2N} \rangle \\
&= \sum_{\pi \in S_{2N}} (-1)^\pi \langle i_k i_l | \mathcal{V}_{kl} | i_{\pi k} i_{\pi l} \rangle \prod_{\substack{j \neq k \\ j \neq l}} \langle i_j | i_{\pi j} \rangle \\
&= \sum_{\pi \in S_{2N}} (-1)^\pi \langle i_k i_l | \mathcal{V}_{kl} | i_{\pi k} i_{\pi l} \rangle \prod_{\substack{j \neq k \\ j \neq l}} \delta_{j \pi j} \\
&= \langle i_k i_l | \mathcal{V}_{kl} | i_k i_l \rangle
\end{aligned}$$

Der Operator für die Gesamtwechselwirkung ergibt sich, wie im Hamiltonoperator (2.2), aus den einzelnen Zweiteilchenoperatoren.

$$\begin{aligned}
\mathcal{V} &= \sum_{1 \leq k < l \leq 2N} \mathcal{V}_{kl} \\
\Rightarrow \langle A | \mathcal{V} | A \rangle &= \sum_{1 \leq k < l \leq 2N} \langle i_k i_l | \mathcal{V}_{kl} | i_k i_l \rangle
\end{aligned}$$

Die Wechselwirkung zwischen zwei Teilchen ist symmetrisch unter Vertauschung der Teilchen.

$$\mathcal{V}_{kl} = \mathcal{V}_{lk}$$

Außerdem muß die Zweiteilchenwechselwirkung und somit auch die Gesamtwechselwirkung invariant unter Vertauschung der Indizes sein. Die Abbildung

$$U_\pi : \{k, l\} \longrightarrow \{n, m\} \quad \text{mit} \quad \pi(k) = n, \quad \pi(l) = m$$

vertauscht also zwei Indizes mit

$$\mathcal{V}_{nm} = U_\pi \mathcal{V}_{kl} U_\pi^\dagger$$

und somit gilt für die Gesamtwechselwirkung

$$\begin{aligned}
\mathcal{V} &= U_\pi \mathcal{V} U_\pi^\dagger \\
\Leftrightarrow \left[ \mathcal{V}, U_\pi \right] &= \mathcal{V} U_\pi - U_\pi \mathcal{V} = 0
\end{aligned} \tag{2.3}$$

Sei nun  $|A\rangle \in \mathcal{H}_{2N}^-$ , dann bleibt zu zeigen, daß auch  $\underset{\sim}{V}|A\rangle \in \mathcal{H}_{2N}^-$  gilt, wobei  $\underset{\sim}{V}$  die oben genannten Eigenschaften besitze mit

$$\underset{\sim}{V}|A\rangle = \sum_{1 \leq k < l \leq 2N} \underset{\sim}{V}_{kl}|A\rangle.$$

*Beweis*

Zu zeigen ist lediglich, daß  $\underset{\sim}{V}|A\rangle$  wiederum antisymmetrisch ist, da  $\underset{\sim}{V}|A\rangle \in \mathcal{H}_{2N}$  auf jeden Fall gilt.

$$U_\pi(\underset{\sim}{V}|A\rangle) \stackrel{(2.3)}{=} \underset{\sim}{V}(U_\pi|A\rangle) = (-1)^\pi \underset{\sim}{V}|A\rangle = -\underset{\sim}{V}|A\rangle$$

Das negative Vorzeichen ergibt sich aus dem antisymmetrischen Charakter von  $|A\rangle$ .

Hiermit ist gezeigt, daß die Symmetrie eines Zustandes durch den Wechselwirkungsoperator erhalten bleibt. Folglich gilt  $\underset{\sim}{V}|A\rangle \in \mathcal{H}_{2N}^-$ . Dieses gilt natürlich auch für den Einteilchenoperator der kinetischen Energie  $\underset{\sim}{T}$ .

## 2.2. Abbildung des Hamiltonoperators auf den Pseudobosonenraum

Nachdem die Eigenschaften eines Hamiltonoperators (2.2) aus dem Multifermionenraum geklärt wurden, soll dieser mit Hilfe der Fermion-Boson-Abbildung  $\mathcal{J}$  auf den Pseudobosonenraum abgebildet werden, dabei werden jeweils zwei Fermionen zu einem Paar zusammengefaßt, so daß man neue Einteilchen- und Zweiteilchenoperatoren erhalten würde. Die Wechselwirkung zwischen zwei Fermionen innerhalb eines Pseudobosons müßten in den neuen Einteilchenoperatoren enthalten sein, wie es in Abbildung 3 schematisch dargestellt ist. Zu den neuen Zweiteilchenoperatoren, tragen nur noch die Wechselwirkungen zwischen den Pseudobosonen bei.

Da das Verhalten des Hamiltonoperators im unphysikalischen Teilraum  $U$  des Pseudobosonenraumes  $\mathcal{B}_N^+$  noch nicht definiert ist, betrachten wir die Abbildung des Hamiltonoperators vom Pseudobosonenraum zum Multifermionenraum.

$$\begin{aligned} \underset{\sim}{H}_{2N}^- &= \mathcal{J}^\dagger \underset{\sim}{H}_N^+ \mathcal{J} \\ \Leftrightarrow \mathcal{J} \underset{\sim}{H}_{2N}^- &= \mathcal{J} \mathcal{J}^\dagger \underset{\sim}{H}_N^+ \mathcal{J} \\ \Leftrightarrow \underset{\sim}{H}_{2N}^- \mathcal{J}^\dagger &= \mathcal{J}^\dagger \underset{\sim}{H}_N^+ \mathcal{J} \mathcal{J}^\dagger \\ \Leftrightarrow \mathcal{J} \underset{\sim}{H}_{2N}^- \mathcal{J}^\dagger &= \mathcal{J} \mathcal{J}^\dagger \underset{\sim}{H}_N^+ \mathcal{J} \mathcal{J}^\dagger = \mathcal{J} \mathbb{P}_P \underset{\sim}{H}_N^+ \mathcal{J} \mathbb{P}_P \end{aligned} \quad (2.4)$$

Da es für den physikalischen Unterraum  $P$  und den unphysikalischen Unterraum  $U$  jeweils eine eigene Eigenbasis von  $\underset{\sim}{H}_N^+$  gibt, sind  $P$  und  $U$   $\underset{\sim}{H}_N^+$ -invariant [16]. So kann Gleichung

(2.4) auch einfacher als

$$\mathcal{J}H_{\sim 2N}^-\mathcal{J}^\dagger = H_{\sim N}^+\mathcal{J}\mathcal{J}^\dagger = H_{\sim N}^+\mathcal{J}\mathbb{P}_P$$

geschrieben werden. Der Anteil des Hamiltonoperators  $H_{\sim N}^+$ , der auf den unphysikalischen Unterraum  $U$  wirkt, ist durch

$$(\mathbb{1} - \mathcal{J}\mathbb{P}_P)H_{\sim N}^+(\mathbb{1} - \mathcal{J}\mathbb{P}_P) = \mathbb{P}_U H_{\sim N}^+ \mathbb{P}_U = H_{\sim N}^+ \mathbb{P}_U$$

gegeben. Aus der Invarianz von  $P$  und  $U$  unter  $H_{\sim N}^+$  folgt auch

$$\mathbb{P}_U H_{\sim N}^+ \mathcal{J}\mathbb{P}_P = \mathcal{J}\mathbb{P}_P H_{\sim N}^+ \mathbb{P}_U = 0,$$

da

$$H_{\sim N}^+ \mathcal{J}\mathbb{P}_P |\phi\rangle \in P \quad \forall |\phi\rangle \in \mathcal{B}_N^+$$

und

$$H_{\sim N}^+ \mathbb{P}_U |\phi\rangle \in U \quad \forall |\phi\rangle \in \mathcal{B}_N^+.$$

Für den Hamiltonoperator im Pseudobosonenraum folgt damit

$$H_{\sim N}^+ = H_{\sim N}^+ \mathcal{J}\mathbb{P}_P + H_{\sim N}^+ \mathbb{P}_U.$$

Zunächst wird der Anteil des physikalischen Unterraumes  $P$  betrachtet:

$$H_{\sim N}^+ \mathcal{J}\mathbb{P}_P = \sum_{k=1}^N T_k^+ \mathcal{J}\mathbb{P}_P + \sum_{1 \leq k < l \leq N} V_{kl}^+ \mathcal{J}\mathbb{P}_P.$$

Die Ein- und Zweiteilchenoperatoren des Hamiltonoperators im Multifermionenraum lassen sich nicht auf den Pseudobosonenraum übertragen, da (1.19) nicht der Zustand einer festen Paarung ist, sondern über alle möglichen Paarungen, die auf den gleichen Multifermionenzustand führen summiert wird. D.h. kein Fermion läßt sich einem bestimmten Pseudoboson zuordnen und somit lassen sich die Operatoren nicht abbilden. Um dieses möglich zu machen, müßte man unabhängig von den Zuständen feste Paare definieren, aus denen die Paarungen zusammengesetzt werden dürfen. Dann wäre die Abbildung  $\mathcal{J}$  jedoch nicht mehr die Identität und es ließen sich nicht einmal mehr alle Multifermionenzustände im Pseudobosonenraum darstellen.

Der Teil des Hamiltonoperators, der auf den unphysikalischen Teilraum  $U$  wirkt, wird mit

$$H_{\sim N}^+(\mathbb{1} - \mathcal{J}\mathbb{P}_P) = H_{\sim N}^+ \mathbb{P}_U = \tilde{e} \mathbb{P}_U.$$

gewählt. Gilt nun

$$E_j \ll \tilde{e} \quad \forall j \in \{1, \dots, p\}, \quad (2.5)$$

wobei  $E_j$  die Energieeigenwerte der Zustände im physikalischen Unterraum  $P$  sind, so kann ausgeschlossen werden, daß die unphysikalischen Zustände vom System nennenswert

besetzt werden. Im kanonischen Ensemble ist ein System durch seine Variablen  $T, V, N$ , Temperatur, Volumen und Teilchenzahl festgelegt. Der statistische Operator ist im kanonischen Ensemble durch

$$\rho_{\sim} = \frac{e^{-\beta \tilde{H}}}{Z(\beta)}$$

mit der kanonischen Zustandssumme

$$Z(\beta) = \text{Sp} \left( e^{-\beta \tilde{H}} \right)$$

als Normierung gegeben. Mit  $|E_j\rangle$  als Eigenzustand von  $\tilde{H}_N^+$  ist die Besetzungswahrscheinlichkeit dieses Zustandes

$$\langle E_j | \rho_{\sim} | E_j \rangle = \frac{\langle E_j | e^{-\beta \tilde{H}} | E_j \rangle}{Z(\beta)} = \frac{e^{-\beta E_j}}{Z(\beta)}$$

und für (2.5) folgt

$$E_j \ll \tilde{e} \quad \Rightarrow \quad e^{-\beta E_j} \gg e^{-\beta \tilde{e}},$$

d.h. die Besetzungswahrscheinlichkeiten der Zustände mit Eigenwert  $\tilde{e}$  sind zu vernachlässigen.

In der Matrixdarstellung ist der Hamiltonoperator  $\tilde{H}_N^+$  eine Blockdiagonalmatrix der Operatoren auf die beiden Unterräume.

$$\tilde{H}_N^+ = \left( \begin{array}{c|c} \mathcal{J}\mathbb{P}_P \tilde{H}_N^+ \mathcal{J}\mathbb{P}_P & \mathcal{J}\mathbb{P}_P \tilde{H}_N^+ \mathbb{P}_U \\ \hline \mathbb{P}_U \tilde{H}_N^+ \mathcal{J}\mathbb{P}_P & \mathbb{P}_U \tilde{H}_N^+ \mathbb{P}_U \end{array} \right) = \left( \begin{array}{c|c} \mathcal{J}\mathbb{P}_P \tilde{H}_N^+ \mathcal{J}\mathbb{P}_P & 0 \\ \hline 0 & \mathbb{P}_U \tilde{H}_N^+ \mathbb{P}_U \end{array} \right)$$

Auch hier sieht man, daß der Pseudobosonenraum die direkte Summe des physikalischen und unphysikalischen Unterraumes ist. In der Basis der Eigenzustände des Hamiltonoperators ist die Matrixdarstellung von  $\tilde{H}_N^+$  durch

$$\tilde{H}_N^+ = \left( \begin{array}{cc|ccc} E_1 & & 0 & & \\ & \ddots & & & 0 \\ 0 & & E_p & & \\ \hline & & & E_{p+1} & 0 \\ & 0 & & & \ddots \\ & & & 0 & E_s \end{array} \right) = \left( \begin{array}{cc|ccc} E_1 & & 0 & & \\ & \ddots & & & 0 \\ 0 & & E_p & & \\ \hline & & & \tilde{e} & 0 \\ & 0 & & & \ddots \\ & & & 0 & \tilde{e} \end{array} \right)$$

gegeben mit

$$\dim P = \dim \mathcal{H}_{2N}^- = p \quad \text{und} \quad \dim \mathcal{B}_N^+ = s.$$



Die Energieeigenwerte  $E_j$  ändern sich unter der Abbildung des Hamiltonoperators aus dem Multifermionenraum in den Pseudobosonenraum nicht

$$\begin{aligned} & H_{\sim 2N}^- |A_i\rangle = E_i |A_i\rangle \\ \Leftrightarrow & \langle A_i | H_{\sim 2N}^- |A_i\rangle = E_i \\ \Leftrightarrow & \langle A_i | \mathcal{J}^\dagger H_{\sim N}^+ \mathcal{J} |A_i\rangle = E_i, \end{aligned}$$

also bleibt auch die Matrixdarstellung des Hamiltonoperators in seiner Eigenbasis in beiden Räumen gleich. Ist  $(|A_i\rangle)$  Eigenbasis im Multifermionenraum, so ist die Eigenbasis des physikalischen Unterraumes, in dem die Matrixdarstellung des Hamiltonoperators gleich bleibt  $(\mathcal{J}|A_i\rangle)$ . Da sich die Eigenwerte durch die Abbildung nicht ändern, ändert sich auch die Thermodynamik des Systems nicht, solange die unphysikalischen Zustände nicht nennenswert besetzt werden.

### 3. Fazit Fermion-Boson-Abbildung

Mit der Fermion-Boson-Abbildung wurde formell ein Übergang von einem antisymmetrischen  $2N$  Teilchenraum zu einem symmetrischen  $N$  Teilchenraum beschrieben. Die Zustände in beiden Räumen sind symmetrisch unter Vertauschung von Paaren und es konnte jeder Zustand des Multifermionenraumes mit einem des Pseudobosonenraumes identifiziert werden. Die Fermion-Boson-Abbildung ist also die Identität. In dem Pseudobosonenraum bleibt das Pauliprinzip in den Paaren erhalten, in einem Zustand dürfen zwar gleiche Paare auftreten, jedoch berücksichtigt man nur die physikalischen Zustände im Pseudobosonenraum, so ändert sich an dem System qualitativ nichts, da die Matrixdarstellung in der Eigenbasis des untersuchten Raumes erhalten bleibt. Somit ändert sich auch nichts an den thermodynamischen Zustandsgrößen des Systems. Mit dieser Betrachtungsweise des Problems der Pseudobosonen läßt sich nicht erklären, warum gepaarte Fermionen, also Pseudobosonen tatsächlich Verhaltenweisen von echten Bosonen zeigen. Die Bose-Einstein Kondensation von Pseudobosonen wäre in diesem Bild eine Art klassischer Grenzfall. Der Grundzustand des Pseudobosonenraumes, der bei der Bose-Einstein Kondensation makroskopisch besetzt wird, besteht aus vielen niedrigen Zuständen im Multifermionenraum, die nur einfach besetzt sind, jedoch so dicht beieinander liegen, daß sie makroskopisch als ein Zustand erscheinen. Die Fermion-Boson-Abbildung beschreibt zwar den Übergang von einem Vielteilchenraum einzelner Fermionen zu einem Vielteilchenraum gepaarter Fermionen, jedoch läßt sich für die neuen physikalischen Eigenschaften des gepaarten Systems keine Information aus der Abbildung ziehen. Daher soll im nächsten Kapitel mit dem Luttinger-Modell ein exakt lösbares System von wechselwirkenden Fermionen betrachtet werden.

### III.

## Das Luttinger-Modell

### 4. Das Luttinger-Modell in der ersten Quantisierung

In diesem Kapitel wird das Luttinger-Modell in der ersten Quantisierung untersucht, wie es auch Mattis und Lieb [10] dargestellt haben. Das Luttinger-Modell ist ein eindimensionales System aus wechselwirkenden Fermionen von zwei unterscheidbaren Sorten. Fermionen gleicher Sorte wechselwirken nicht miteinander und sind ununterscheidbar. Das ungewöhnliche an diesem System ist, daß es auch für große Teilchenzahlen exakt lösbar ist.

Der Hilbertraum des Systems für  $N$  Fermionen der Sorte 1 und  $M$  Fermionen der Sorte 2, ist das Tensorprodukt der antisymmetrisierten Räume mit Fermionen jeweils einer Sorte.

$$\mathcal{H}_{\mathcal{L}} = \left( \bigotimes_{n=1}^N \mathcal{H}^{(1)} \right)^- \times \left( \bigotimes_{m=1}^M \mathcal{H}^{(2)} \right)^-$$

Hierbei steht  $\mathcal{H}^{(1)}$  bzw.  $\mathcal{H}^{(2)}$  für den Einteilchenhilbertraum eines Teilchens der Sorte 1 bzw. der Sorte 2. Die Teilchen werden im Luttinger-Modell als spin- und masselos betrachtet.

#### 4.1. Der Hamiltonoperator

Der Hamiltonoperator  $\tilde{H}$  des Systems wird als Summe des ungestörten Operators  $\tilde{H}_0$  und des Wechselwirkungsterms  $\tilde{H}'$  dargestellt.

$$\tilde{H} = \tilde{H}_0 + \tilde{H}' \tag{4.1}$$

Im Folgenden sollte immer bedacht werden, daß der Hamiltonoperator des Luttinger-Modells ein reiner Modelloperator ohne direkte physikalische Bedeutung ist. Der ungestörte Operator  $\tilde{H}_0$  repräsentiert für gewöhnlich die kinetische Energie, hier ist er jedoch nur eine Linearkombination von Impulsoperatoren  $\tilde{P}_i$ . Der Wechselwirkungsterm  $\tilde{H}'$  hängt nur vom Abstand der Fermionen unterschiedlicher Sorte ab. Hierbei sind  $\{x_n\}$  die Ortskoordinaten der Fermionen der Teilchensorte 1 und  $\{y_m\}$  die Ortskoordinaten der

Teilchensorte 2.

$$\begin{aligned}\tilde{H}_0 &= -i \sum_{n=1}^N \frac{\partial}{\partial x_n} + i \sum_{m=1}^M \frac{\partial}{\partial y_m} \\ \tilde{H}' &= 2\lambda \sum_{n=1}^N \sum_{m=1}^M V(x_n - y_m)\end{aligned}$$

Luttinger [9, 11] gibt dabei für das Zweiteilchenwechselwirkungspotential  $V(x - y)$  die Einschränkung an, daß das Integral über die Länge des Kastens  $L$  von  $V(x)$  verschwinden muß,

$$\bar{V} \equiv \frac{1}{L} \int_0^L V(x) dx = 0 \quad (4.2)$$

da sonst die Schrödingergleichung für das System nicht mehr exakt lösbar wäre. Mattis und Lieb haben jedoch gezeigt, daß diese strenge Bedingung durch eine weniger strenge ersetzt werden kann, worauf später noch eingegangen werden soll.

## 4.2. Die Schrödingergleichung

Ein System ist vollständig durch seine Schrödingergleichung

$$\tilde{H}|\psi\rangle = E|\psi\rangle$$

beschrieben.  $E$  ist hierbei die Gesamtenergie des Systems und  $|\psi\rangle$  die Vielteilchenwellenfunktion, die den Zustand des Gesamtsystems charakterisiert. Im weiteren soll für die Wellenfunktion die Schreibweise

$$\langle \mathbf{x}, \mathbf{y} | \psi \rangle = \psi(x_1, \dots, x_N, y_1, \dots, y_M) = \psi(\mathbf{x}, \mathbf{y}).$$

verwendet werden. Aufgrund der periodischen Randbedingungen muß auch die Wellenfunktion  $\psi$  periodisch mit  $L$  sein.  $\psi$  muß für den Kasten der Länge  $L$  also den Bedingungen

$$\begin{aligned}\psi(\dots, x_i + L, \dots, y_j + L, \dots) &= \psi(\dots, x_i, \dots, y_j, \dots) \\ \forall i \in \{1, \dots, N\} \quad \text{und} \quad \forall j \in \{1, \dots, M\}\end{aligned}$$

genügen. Es sollen nun die exakten Lösungen der Schrödingergleichung

$$(\tilde{H}_0 + \tilde{H}')|\psi\rangle = E|\psi\rangle \quad (4.3)$$

bestimmt werden. Dazu wird eine Wellenfunktion benutzt, die Mattis und Lieb vorschlagen. Für die Lösung der Schrödingergleichung wird die Stammfunktion des Wechselwirkungspotentials

$$\begin{aligned} \frac{\partial \mathcal{E}(x-y)}{\partial x} &\equiv V(x-y) \\ \Leftrightarrow \frac{\partial \mathcal{E}(x-y)}{\partial y} &\equiv -V(x-y) \end{aligned} \quad (4.4)$$

benötigt. Als Ansatz zur Bestimmung der Eigenfunktionen von (4.3) wird die unnormierte Wellenfunktion <sup>1</sup>

$$\begin{aligned} \psi(\mathbf{x}, \mathbf{y}) &= \det |e^{ik_\mu x_\nu}| \det |e^{iq_\mu y_\nu}| \exp \left[ -\lambda \sum_{n=1}^N \sum_{m=1}^M i\mathcal{E}(x_n - y_m) \right] \\ &= \begin{vmatrix} e^{ik_1 x_1} & \dots & e^{ik_1 x_N} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ e^{ik_N x_1} & \dots & e^{ik_N x_N} \end{vmatrix} \begin{vmatrix} e^{iq_1 y_1} & \dots & e^{iq_1 y_M} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ e^{iq_M y_1} & \dots & e^{iq_M y_M} \end{vmatrix} e^{i\lambda W} \end{aligned} \quad (4.5)$$

genommen. Zur Vereinfachung wird für den Phasenfaktor, der durch die Wechselwirkung bedingt ist, die Abkürzung

$$W = - \sum_{n=1}^N \sum_{m=1}^M \mathcal{E}(x_n - y_m) \quad (4.6)$$

verwendet.

Das bemerkenswerte am Luttinger-Modell ist die Identität des Energiespektrums sowohl des gestörten (4.3), als auch des ungestörten Systems

$$H_0 |\tilde{\psi}\rangle = E |\tilde{\psi}\rangle. \quad (4.7)$$

Mattis und Lieb geben in [10] die Gesamtenergieeigenwerte mit

$$E = \sum_{n=1}^N k_n - \sum_{m=1}^M q_m \quad (4.8)$$

mit

$$k_n = \frac{2\pi}{L} u_n \quad \text{und} \quad q_m = \frac{2\pi}{L} v_m \quad u_n, v_m \in \mathbb{Z}. \quad (4.9)$$

an. Dabei sind  $\{k_n\}, \{q_m\}$  die Wellenzahlen der Fermionen der Teilchensorte 1 bzw. der Teilchensorte 2 und  $\{u_n\}, \{v_m\}$  die zugehörigen Quantenzahlen der Zustände, also Größen der Einteilchensysteme. Diese Energieeigenwerte und Wellenzahlen resultieren aus

<sup>1</sup>Mattis und Lieb haben in [10] eine falsche Wellenfunktion als Lösung der Schrödingergleichung (4.3) angegeben.

den periodischen Randbedingungen für die Eigenfunktionen und werden später in einer alternativen Herleitung der Eigenfunktionen von (4.3) berechnet.

Der Beweis, daß (4.5) eine Lösung der Schrödingergleichung ist, wird in drei Abschnitte unterteilt. Zunächst wird der Ausdruck  $\tilde{H}_0\psi$  bestimmt.

$$\begin{aligned} \tilde{H}_0\psi(\mathbf{x}, \mathbf{y}) &= \left( -i \sum_{n=1}^N \frac{\partial}{\partial x_n} + i \sum_{m=1}^M \frac{\partial}{\partial y_m} \right) \det |e^{ik_\mu x_\nu}| \det |e^{iq_\mu y_\nu}| e^{i\lambda W} \\ &= -i \sum_{n=1}^N \frac{\partial}{\partial x_n} \det |e^{ik_\mu x_\nu}| \det |e^{iq_\mu y_\nu}| e^{i\lambda W} \\ &\quad + i \sum_{m=1}^M \frac{\partial}{\partial y_m} \det |e^{ik_\mu x_\nu}| \det |e^{iq_\mu y_\nu}| e^{i\lambda W} \end{aligned} \quad (4.10)$$

Unter Verwendung des Laplaceschen Entwicklungssatzes

$$\det A = \sum_{\mu} a_{\mu\nu} A_{\mu\nu},$$

und mit  $a_{\mu\nu} = a_{\mu\nu}(t)$  läßt sich für Determinanten die Ableitungsregel

$$\frac{d}{dt} \det A = \sum_{\nu} \sum_{\mu} \left( \frac{d}{dt} a_{\mu\nu}(t) \right) A_{\mu\nu} \quad (4.11)$$

formulieren, wobei  $A_{\mu\nu}$  die Adjunkte (die Determinante der Matrix, die durch Streichung der  $\mu$ -ten Zeile und  $\nu$ -ten Spalte entsteht) und  $a_{\mu\nu}$  das Matrixelement von  $A$  an der Stelle  $(\mu, \nu)$  ist. Für die Ableitungen aus Gleichung (4.10) ergibt sich hiermit nun

$$\sum_m \frac{\partial}{\partial x_m} \det |e^{ik_\mu x_\nu}| = \sum_m \frac{\partial}{\partial x_m} \sum_l e^{ik_l x_m} A_{lm}. \quad (4.12)$$

Durch die Invarianz bezüglich Vertauschung der Summen ergibt sich hieraus

$$\begin{aligned} \sum_m \frac{\partial}{\partial x_m} \det |e^{ik_\mu x_\nu}| &= \sum_l \sum_m \left( \frac{\partial}{\partial x_m} e^{ik_l x_m} \right) A_{lm} \\ &= \sum_l ik_l \sum_m e^{ik_l x_m} A_{lm}. \end{aligned}$$

Die letzte Summe auf der rechten Seite ist hier gerade die Laplaceentwicklung nach der  $l$ -ten Zeile, so daß sich

$$\sum_m \frac{\partial}{\partial x_m} \det |e^{ik_\mu x_\nu}| = \left( \sum_l ik_l \right) \det |e^{ik_\mu x_\nu}|$$

ergibt. Analog läßt sich dieses für die Determinante mit den  $y$ -Koordinaten durchführen.

$$\sum_m \frac{\partial}{\partial y_m} \det |e^{iq_\mu y_\nu}| = \left( \sum_l iq_l \right) \det |e^{iq_\mu y_\nu}|$$

Mit diesen Rechenregeln läßt sich nun Gleichung (4.10) weiter bearbeiten :

$$\begin{aligned} \underline{H}_0 \psi(\mathbf{x}, \mathbf{y}) &= -i \sum_{n=1}^N \frac{\partial}{\partial x_n} \det |e^{ik_\mu x_\nu}| \det |e^{iq_\mu y_\nu}| e^{i\lambda W} \\ &\quad + i \sum_{m=1}^M \frac{\partial}{\partial y_m} \det |e^{ik_\mu x_\nu}| \det |e^{iq_\mu y_\nu}| e^{i\lambda W} \\ &= \sum_{n=1}^N k_n \psi - i^2 \lambda \psi \sum_{n=1}^N \frac{\partial W}{\partial x_n} - \sum_{m=1}^M q_m \psi + i^2 \lambda \psi \sum_{m=1}^M \frac{\partial W}{\partial y_m} \\ &= \sum_{n=1}^N k_n \psi - \sum_{m=1}^M q_m \psi + 2i^2 \lambda \psi \sum_{n=1}^N \sum_{m=1}^M V(x_n - y_m) \end{aligned}$$

Dabei wurde

$$\sum_{n=1}^N \frac{\partial W}{\partial x_n} = \sum_{n=1}^N \sum_{m=1}^M V(x_n - y_m)$$

und

$$\sum_{m=1}^M \frac{\partial W}{\partial y_m} = - \sum_{n=1}^N \sum_{m=1}^M V(x_n - y_m)$$

ausgenutzt. So ergibt sich für  $\underline{H}_0 \psi(\mathbf{x}, \mathbf{y})$

$$\underline{H}_0 \psi(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \left[ \sum_{n=1}^N k_n - \sum_{m=1}^M q_m - 2\lambda \sum_{n=1}^N \sum_{m=1}^M V(x_n - y_m) \right] \psi(\mathbf{x}, \mathbf{y}).$$

Die beiden anderen Terme der Schrödingergleichung sind

$$\underline{H}' \psi(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \left[ 2\lambda \sum_{n=1}^N \sum_{m=1}^M V(x_n - y_m) \right] \psi(\mathbf{x}, \mathbf{y})$$

und

$$E \psi(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \left[ \sum_{n=1}^N k_n - \sum_{m=1}^M q_m \right] \psi(\mathbf{x}, \mathbf{y}).$$

Werden diese drei Terme nun zur Schrödingergleichung (4.3) zusammengesetzt, so ist diese erfüllt.

$$\begin{aligned}
& \left[ \sum_{n=1}^N k_n - \sum_{m=1}^M q_m - 2\lambda \sum_{n=1}^N \sum_{m=1}^M V(x_n - y_m) \right] \psi + \left[ 2\lambda \sum_{n=1}^N \sum_{m=1}^M V(x_n - y_m) \right] \psi \\
&= \left[ \sum_{n=1}^N k_n - \sum_{m=1}^M q_m \right] \psi \\
&\Rightarrow \left[ \sum_{n=1}^N k_n - \sum_{m=1}^M q_m \right] \psi(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \left[ \sum_{n=1}^N k_n - \sum_{m=1}^M q_m \right] \psi(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \quad q.e.d.
\end{aligned}$$

Hiermit ist bewiesen, daß die Wellenfunktionen (4.5) Eigenfunktionen und die Energien (4.8) die Eigenwerte des Hamiltonoperators (4.1) sind. Da eine solche ad hoc Lösung sehr unbefriedigend ist, soll im folgenden eine alternative Herleitung der Eigenfunktionen und Eigenwerte des Hamiltonoperators aufgezeigt werden. Außerdem bleibt noch die Frage der Normierung offen.

### 4.3. Alternative Herleitung der Lösung der Schrödingergleichung

In diesem Abschnitt wird die Lösung der Schrödingergleichung des Luttinger-Modells noch einmal hergeleitet. Es ergibt sich dann automatisch die Normierung der Eigenfunktionen, die bei dem bisherigen Ansatz noch nicht berücksichtigt wurde. Zunächst ist die Schrödingergleichung ohne Wechselwirkung (4.7) zu lösen, wobei vom Einteilchenproblem ausgegangen wird.

#### 4.3.1. Einteilchenproblem ohne Wechselwirkung

Um Aussagen über das Vielteilchenproblem der Fermionen machen zu können muß zunächst das Einteilchenproblem dieses Systems gelöst werden. Der Hilbertraum für das Einteilchensystem mit Fermionen der Sorte 1 wird mit  $\mathcal{H}^{(1)}$  bezeichnet und die Schrödingergleichung lautet

$$\tilde{h}(x)\phi(x) = \epsilon\phi(x).$$

Hierbei ist  $\tilde{h}(x)$  der Einteilchen-Hamiltonoperator,  $\epsilon$  die Einteilchen-Energie und  $\phi(x)$  die Einteilchen-Wellenfunktion. Diese Schrödingergleichung für ein freies Teilchen läßt sich



elementar lösen.

$$\begin{aligned}
 \tilde{h}(x)\phi(x) &= \epsilon\phi(x) & \Leftrightarrow & & -i\frac{\partial\phi(x)}{\partial x} &= \epsilon\phi(x) \\
 \Leftrightarrow & \frac{\phi'(x)}{\phi(x)} = i\epsilon & \Leftrightarrow & & \int \frac{\phi'(x)}{\phi(x)} dx &= i\epsilon x + \tilde{c} \\
 \Leftrightarrow & \ln \phi(x) = i\epsilon x + \tilde{c} & \Leftrightarrow & & \phi(x) &= c e^{i\epsilon x}
 \end{aligned}$$

Die Integrationskonstanten  $\tilde{c}$  und  $c = \exp(\tilde{c})$  bestimmen sich durch die periodischen Randbedingungen der Wellenfunktion für einen Kasten der Länge  $L$ , ebenso wie die Energieeigenwerte.

$$\begin{aligned}
 \phi(x) &= \phi(x + L) \\
 \Rightarrow & \phi(x) = c e^{i\epsilon x} = c e^{i\epsilon(x+L)} = \phi(x + L) \\
 \Leftrightarrow & e^{i\epsilon x} = e^{i\epsilon x} e^{i\epsilon L} \\
 \Leftrightarrow & e^{i\epsilon L} = 1 \\
 \Rightarrow & \epsilon L = 2\pi u \quad \Leftrightarrow \quad \epsilon = \frac{2\pi}{L} u \quad \text{mit } u \in \mathbb{Z}
 \end{aligned}$$

Die Energieeigenwerte des Einteilchenproblems ergeben sich also zu

$$\begin{aligned}
 \epsilon_n = k_n &= \frac{2\pi}{L} u_n \quad \text{mit } u_n \in \mathbb{Z} \\
 \Rightarrow & \phi_n(x) = c e^{i\frac{2\pi}{L} u_n x}
 \end{aligned}$$

Im weiteren wird die Abkürzung  $E_1 = 2\pi/L$  benutzt. Es bleibt noch die Normierungskonstante  $c$  zu bestimmen, denn die Wellenfunktionen  $\phi_n(x)$  sollen der Bedingung

$$\int_0^L \phi_n^*(x) \phi_n(x) dx = 1$$

genügen.

$$\begin{aligned}
 \int_0^L e^{-i\frac{2\pi}{L} u_n x} e^{i\frac{2\pi}{L} u_n x} dx &= \frac{1}{c^2} \\
 \Leftrightarrow & c = \frac{1}{\sqrt{L}}
 \end{aligned}$$

Die Rechnung für Systeme mit Fermionen der Sorte 2 verläuft ganz analog, allerdings hat hier der Einteilchen-Hamiltonoperator ein anderes Vorzeichen.

$$\tilde{h}(y) = i \frac{\partial}{\partial y}$$

Dies führt auf die Eigenzustände

$$\varphi_m(y) = c e^{iq_m y} = c e^{i \frac{2\pi}{L} v_m y}$$

und die Energieeigenwerte

$$\epsilon_m = -q_m = -\frac{2\pi}{L} v_m \quad \text{mit } v_m \in \mathbb{Z}.$$

### 4.3.2. Vielteilchenproblem mit einer Teilchensorte ohne Wechselwirkung

Mit der Lösung des Einteilchenproblems kann nun das Vielteilchenproblem mit  $N$  Fermionen der Sorte 1 untersucht werden, wobei es immer noch keine Wechselwirkung zwischen den Teilchen gibt. Der Hilbertraum dieses Vielteilchenproblems wird mit  $\mathcal{H}_N^{(1)-}$  bezeichnet und ist der antisymmetrisierte Produktraum von  $N$  Einteilchenhilberträumen  $\mathcal{H}^{(1)}$  mit

$$\mathcal{H}_N^{(1)-} = \bigotimes_{n=1}^N \mathcal{H}^{(1)}.$$

Die Eigenzustände sind also einfach die antisymmetrisierten Zustände des Einteilchenproblems. Der Hamiltonoperator  $\tilde{H}(x_1, \dots, x_N)$  ist die Summe der  $N$  Einteilchenoperatoren  $\tilde{h}_n(x_n)$ .

$$\tilde{H} = \sum_{n=1}^N \tilde{h}_n(x_n) = -i \sum_{n=1}^N \frac{\partial}{\partial x_n}$$

$$\text{mit } \tilde{h}_n(x_n) \phi_{k_n}(x_n) = \epsilon_n \phi_{k_n}(x_n)$$

und  $\phi_{k_n}$  : Einteilchen-Wellenfunktion

$\epsilon_n$  : Einteilchen-Energie

Dabei gilt

$$\phi_{k_n}(x_n) = \frac{1}{\sqrt{L}} e^{i\epsilon_n x_n} = \frac{1}{\sqrt{L}} e^{ik_n x_n}$$

und

$$\tilde{h}_n = \mathbb{1} \otimes \dots \otimes \underbrace{\mathbb{1} \otimes \tilde{h} \otimes \mathbb{1}}_{n\text{-te Stelle}} \otimes \dots \otimes \mathbb{1}.$$

Die Gesamtenergie des Systems ist die Summe der Einteilchenenergien

$$E = \sum_{n=1}^N \epsilon_n = \sum_{n=1}^N k_n$$

und die Gesamtwellenfunktion des Systems ohne Symmetrieeigenschaften ist der Produktzustand der Einteilchen-Wellenfunktionen.

$$\psi_{k_1, \dots, k_N}(x_1, \dots, x_N) = \prod_{n=1}^N \phi_{k_n}(x_n) = \frac{1}{\sqrt{L^N}} \prod_{n=1}^N e^{ik_n x_n}$$

Da es sich hier um ein System von identischen Fermionen handelt müssen in der Gesamtwellenfunktion die Symmetrieeigenschaften beachtet werden, d.h. der Produktzustand muß antisymmetrisiert werden, woraus sich die Slaterdeterminante aus ebenen Wellen

$$\begin{aligned} \psi_{k_1, \dots, k_N}(x_1, \dots, x_N) &= \frac{1}{\sqrt{N!}} \sum_{\pi \in \mathcal{S}_N} (-1)^\pi \phi_{k_1}(x_{\pi(1)}) \cdots \phi_{k_N}(x_{\pi(N)}) \quad (4.13) \\ &= \frac{1}{\sqrt{N!}} \det \begin{vmatrix} \phi_{k_1}(x_1) & \cdots & \phi_{k_1}(x_N) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \phi_{k_N}(x_1) & \cdots & \phi_{k_N}(x_N) \end{vmatrix} \\ &= \frac{1}{\sqrt{N!L^N}} \det \begin{vmatrix} e^{ik_1 x_1} & \cdots & e^{ik_1 x_N} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ e^{ik_N x_1} & \cdots & e^{ik_N x_N} \end{vmatrix} \\ &= \frac{1}{\sqrt{N!L^N}} \det |e^{ik_\mu x_\nu}| \end{aligned}$$

ergibt, an der sofort das Pauli-Prinzip für Fermionen deutlich wird. Befinden sich zwei Teilchen im gleichen Einteilchenzustand, so wären zwei der  $k_1, \dots, k_N$  Wellenzahlen gleich und somit zwei Zeilen in der Slaterdeterminante identisch. Damit würde die Wellenfunktion automatisch verschwinden.

Die antisymmetrisierte Vielteilchen-Wellenfunktion für Fermionen der Sorte 2 ergibt sich wieder analog zum System mit Fermionen der Sorte 1, es müssen nur die  $N$  durch  $M$  und die  $\phi_{k_i}$  durch die  $\varphi_{q_i}$  ersetzt werden.

### 4.3.3. Vielteilchensystem mit beiden Teilchensorten ohne Wechselwirkung

Nun wird der Übergang von getrennten Systemen mit Fermionen unterschiedlicher Sorten zu einem System mit Fermionen beider Sorten betrachtet. Zwar wechselwirken die Fermionen immer noch nicht miteinander, jedoch sind die Teilchen unterschiedlicher Sorten unterscheidbar. Fermionen der gleicher Sorte sind ununterscheidbar. Ohne Wechselwirkung sind die Wellenfunktionen dieses Systems einfach die Produktzustände der Slaterdeterminanten der Systeme mit einer Teilchensorte.

Der ungestörte Hamiltonoperator ist die Summe der Einteilchen-Hamiltonoperatoren der verschiedenen Systeme

$$\underline{H}_0 = -i \sum_{n=1}^N \frac{\partial}{\partial x_n} + i \sum_{m=1}^M \frac{\partial}{\partial y_m},$$

genauso wie die Gesamtenergie

$$E = \sum_{n=1}^N k_n - \sum_{m=1}^M q_m. \quad (4.14)$$

Die Eigenfunktionen zu diesem ungestörten Hamiltonoperator sind die Produktzustände der Wellenfunktionen der einzelnen Systeme.

$$\begin{aligned} \tilde{\psi}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) &= \frac{1}{\sqrt{N!M!L^{N+M}}} \det |e^{ik_\mu x_\nu}| \det |e^{iq_\mu y_\nu}| \\ &= \mathcal{N} \det |e^{ik_\mu x_\nu}| \det |e^{iq_\mu y_\nu}| \end{aligned} \quad (4.15)$$

#### 4.3.4. Vielteilchensystem mit beiden Teilchensorten mit Wechselwirkung

Die Lösung (4.5) des Hamiltonoperators eines Systems aus Fermionen der Sorten 1 und 2 mit Wechselwirkung (4.3) wurde bereits überprüft. Erstaunlicherweise sind die Energieeigenwerte des gestörten Systems (4.8) identisch mit denen des ungestörten Systems (4.14). Daher muß es eine unitäre Transformation geben, die den gestörten Hamiltonoperator in den ungestörten überführt. Gesucht ist also eine unitäre Transformation  $\underline{C}$ , so daß

$$\underline{H}_0 = \underline{C}^\dagger \underline{H} \underline{C} \quad (4.16)$$

gilt, mit

$$\underline{H} = \underline{H}_0 + \underline{H}'.$$

Der Operator  $\underline{C}$  wird auch unitärer Korrelationsoperator genannt [17], der die Eigenschaft

$$\underline{C}^\dagger \underline{C} = \mathbb{1}$$

hat. Für  $\underline{C}$  soll der Ansatz

$$\underline{C} = e^{-i\lambda \underline{S}_0}$$

getestet werden, wobei  $\underline{S}_0$  zu bestimmen bleibt.  $\underline{C}$  ist genau dann unitär, wenn  $\lambda \underline{S}_0$  ein hermitischer Operator ist [18]. Mit  $\lambda \in \mathbb{C}$  muß

$$\underline{S}_0 = \underline{S}_0^\dagger$$

gelten. Unitäre Operatoren bewirken einen Basiswechsel im Hilbertraum, d.h.  $\tilde{H}_0$  ist die Darstellung des Operators  $\tilde{H}$  bezüglich einer neuen Basis, also der Eigenbasis zum ungestörten Hamiltonoperator. Wenn also ein passendes  $\tilde{S}_0$  für eine unitäre Transformation  $\tilde{C}$  gefunden werden kann, die  $\tilde{H}$  in  $\tilde{H}_0$  überführt, so ist klar daß beide Hamiltonoperatoren die gleichen Eigenwerte haben, daß also das Energiespektrum des Systems nicht durch die Wechselwirkung beeinflusst wird. Für  $\tilde{S}_0$  wird der Ansatz

$$\langle \mathbf{x}, \mathbf{y} | \tilde{S}_0 | \phi \rangle = -W \phi(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \sum_{n=1}^N \sum_{m=1}^M \mathcal{E}(x_n - y_m) \phi(\mathbf{x}, \mathbf{y})$$

gemacht. Dieser Operator ist hermitesch, da  $\mathcal{E}(x_n - y_m)$  die Stammfunktion des Wechselwirkungspotentials (4.4) und somit ein Multiplikationsoperator [18] von  $x_1, \dots, y_M$  ist. Um die Transformation (4.16) zu bestimmen, muß der Kommutator

$$\left[ \tilde{H}, \tilde{C} \right]_- = \tilde{H} \tilde{C} - \tilde{C} \tilde{H} \quad (4.17)$$

bekannt sein. Da  $\tilde{H}'$  und  $\tilde{C}$  beides nur Funktionen von  $x_1, \dots, y_M$  sind, gilt

$$\left[ \tilde{H}', \tilde{C} \right]_- = 0 \quad (4.18)$$

und somit

$$\left[ \tilde{H}, \tilde{C} \right]_- = \left[ \tilde{H}_0, \tilde{C} \right]_- . \quad (4.19)$$

Sei nun  $\tilde{f} = \tilde{f}(x_1, \dots, y_m)$  ein Multiplikationsoperator, so folgt mit der Produktregel

$$\left[ \frac{\partial}{\partial x_n}, \tilde{f} \right]_- \psi = \frac{\partial}{\partial x_n} (\tilde{f} \psi) - \tilde{f} \frac{\partial \psi}{\partial x_n} = \left( \frac{\partial \tilde{f}}{\partial x_n} \right) \psi. \quad (4.20)$$

Der analoge Zusammenhang gilt auch für alle  $y_m$ . Hiermit kann der Kommutator für den ungestörten Hamiltonoperator berechnet werden.

$$\begin{aligned}
\left[ \tilde{H}_0, \tilde{C} \right]_- &= \left[ -i \sum_{n=1}^N \frac{\partial}{\partial x_n} + i \sum_{m=1}^M \frac{\partial}{\partial y_m}, e^{i\lambda W} \right]_- \\
&= -i \sum_n \frac{\partial}{\partial x_n} e^{i\lambda W} + i \sum_m \frac{\partial}{\partial y_m} e^{i\lambda W} \\
&= \left( - \sum_n \frac{\partial}{\partial x_n} \sum_{n,m} \mathcal{E}(x_1, \dots, y_m) + \sum_m \frac{\partial}{\partial y_m} \sum_{n,m} \mathcal{E}(x_1, \dots, y_m) \right) \lambda e^{i\lambda W} \\
&= \left( -\lambda \sum_{n,m} V(x_n - y_m) - \lambda \sum_{m,n} V(x_n - y_m) \right) e^{i\lambda W} \\
&= \left( -2\lambda \sum_{n,m} V(x_n - y_m) \right) e^{i\lambda W} \\
&= -\tilde{H}' \tilde{C}
\end{aligned}$$

Mit Gleichung (4.19), (4.18) und (4.17) folgt daraus

$$\begin{aligned}
\tilde{H} \tilde{C} - \tilde{C} \tilde{H} &= -\tilde{C} \tilde{H}' \\
\tilde{H} \tilde{C} &= \tilde{C} \tilde{H} - \tilde{C} \tilde{H}' \\
\Rightarrow \tilde{C}^\dagger \tilde{H} \tilde{C} &= \tilde{H} - \tilde{H}' = \tilde{H}_0
\end{aligned} \tag{4.21}$$

Mit Gleichung (4.21) ist bewiesen, daß es eine unitäre Transformation gibt, die den gestörten Hamiltonoperator  $\tilde{H}$  in den ungestörten  $\tilde{H}_0$  überführt und daß beide das gleiche Energiespektrum haben. Der Korrelationsoperator  $\tilde{C}$  transformiert einen unkorrelierten Systemzustand  $|\tilde{\psi}\rangle$  (4.15) in einen korrelierten Zustand  $|\psi\rangle$ .

$$\begin{aligned}
|\psi\rangle &= \tilde{C} |\tilde{\psi}\rangle \\
&= e^{-i\lambda \tilde{S}_0} |\tilde{\psi}\rangle \\
\Rightarrow \langle \mathbf{x}, \mathbf{y} | \psi \rangle &= \langle \mathbf{x}, \mathbf{y} | e^{-i\lambda \tilde{S}_0} |\tilde{\psi}\rangle \\
\Leftrightarrow \psi(x_1, \dots, y_M) &= \tilde{\psi}(x_1, \dots, y_M) e^{i\lambda W}
\end{aligned}$$

Die hier bestimmte Lösung

$$\psi(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \frac{1}{\sqrt{N!M!L^{N+M}}} \det |e^{ik_\mu x_\nu}| \det |e^{iq_\mu y_\nu}| e^{i\lambda W} \tag{4.22}$$

der Schrödingergleichung des Luttinger-Modells mit Wechselwirkung stimmt mit dem Ansatz (4.5) bis auf die Normierung überein. Durch die Wechselwirkung geht also nur ein zusätzlicher Phasenfaktor in die Eigenfunktionen im Vergleich zum ungestörten System ein.

Es bleibt nun die Art der Wechselwirkung zu spezifizieren und dann für diese Wechselwirkung physikalische Größen des Systems zu berechnen und zu charakterisieren. Dazu werden verschiedene Erwartungswerte, Korrelationsfunktionen und Teilchendichten betrachtet. Spezielles Augenmerk soll dabei auf mögliche Paarbildung von Fermionen gerichtet werden.

## 5. Quantenmechanische Größen des Luttinger-Modells

In diesem Kapitel wird auf quantenmechanische Größen des Luttinger-Modells eingegangen. Berechnet werden unter anderem die Erwartungswerte, die Korrelationsfunktionen, sowie die Ein- und Zweiteilchendichten der Orte und Impulse. Es soll dabei geklärt werden, ob es im System des Luttinger-Modells zu einer Paarbildung von Fermionen kommt.

### 5.1. Das Wechselwirkungspotential

Um Größen wie Erwartungswerte und Korrelationsfunktionen überhaupt berechnen zu können, muß noch das Wechselwirkungspotential des hier besprochenen Systems festgelegt werden, da bislang nur mit einem allgemeinen Zweiteilchenpotential  $V(x - y)$  gerechnet wurde, für das bestimmte Voraussetzungen gelten.

Wie bereits erwähnt fordert Luttinger [9], daß das mittlere Potential  $\bar{V}$  verschwindet (4.2), da sonst eine exakte Lösung nicht mehr möglich ist. Mattis und Lieb [10] haben eine neue Bedingung für  $\bar{V}$  eingeführt, die etwas schwächer ist, als die von Luttinger geforderte. Falls das Integral über das Wechselwirkungspotential  $\bar{V}$  nicht verschwindet, muß die Quantisierung des Impulses (4.9) durch

$$k_n + M\lambda\bar{V} = \frac{2\pi}{L}u_n \quad \text{und} \quad q_m + N\lambda\bar{V} = \frac{2\pi}{L}v_m \quad \text{mit} \quad u_n, v_m \in \mathbb{Z} \quad (5.1)$$

ersetzt werden. Im feldtheoretischen Limes  $N, M \rightarrow \infty$  geht diese Bedingung jedoch wieder in die durch Luttinger gegebene  $\bar{V} \equiv 0$  über, da sonst die Quantenzahlen (5.1) undefiniert sind.

Da ein eindimensionaler Kasten der Länge  $L$  mit periodischen Randbedingungen betrachtet wird, ist es physikalisch nur sinnvoll für das Wechselwirkungspotential ebenfalls die Periode  $L$  und Spiegelsymmetrie an der Stelle  $L/2$  zu fordern, da dies der maximale Abstand zweier Teilchen ist. Das Wechselwirkungspotential soll also die Bedingungen

$$V(x) = V(x + L) \quad \text{und} \quad V(x + \frac{L}{2}) = V(-x + \frac{L}{2})$$

erfüllen. Das hier behandelte Potential soll zunächst der Bedingung von Luttinger genügen. Mit diesen Voraussetzungen lassen sich am besten trigonometrische Funktionen als Wechselwirkungspotential wählen, außerdem sind sie relativ gut integrier- und leicht fouriertransformierbar.

$$V(x - y) = -V_0 \cos \left[ \frac{2\pi}{L}(x - y) \right] \quad (5.2)$$



Diese Funktion ist aufgrund des Kosinus  $L$ -periodisch. Für die Stammfunktion des Potentials  $\mathcal{E}(x)$  ergibt sich damit

$$\mathcal{E}(x) = \int V(x) dx = -V_0 \frac{L}{2\pi} \sin\left(\frac{2\pi}{L}x\right) + c.$$

Die Integrationskonstante wird mit  $c = 0$  gewählt. So gilt für die Stammfunktion

$$\mathcal{E}(x - y) = -V_0 \frac{L}{2\pi} \sin\left[\frac{2\pi}{L}(x - y)\right].$$

Das Wechselwirkungspotential  $V(x - y)$  ist in Abbildung 4 graphisch dargestellt, seine Stammfunktion  $\mathcal{E}(x - y)$  in Abbildung 5.

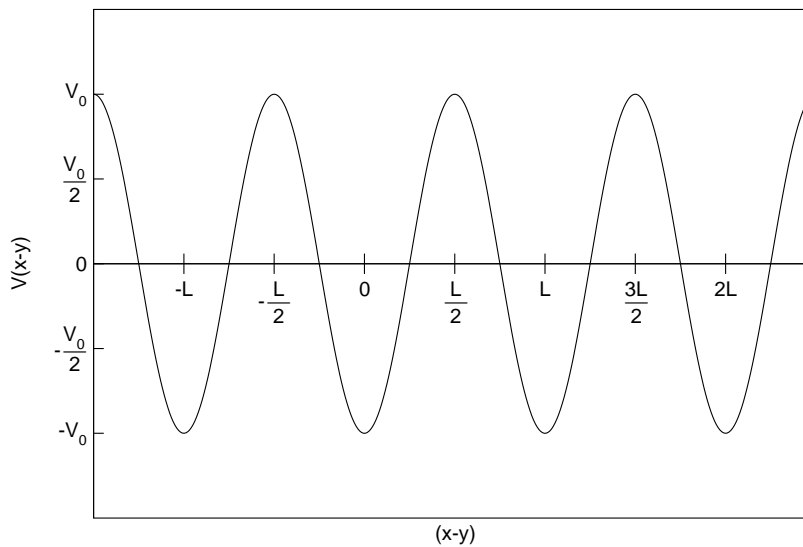
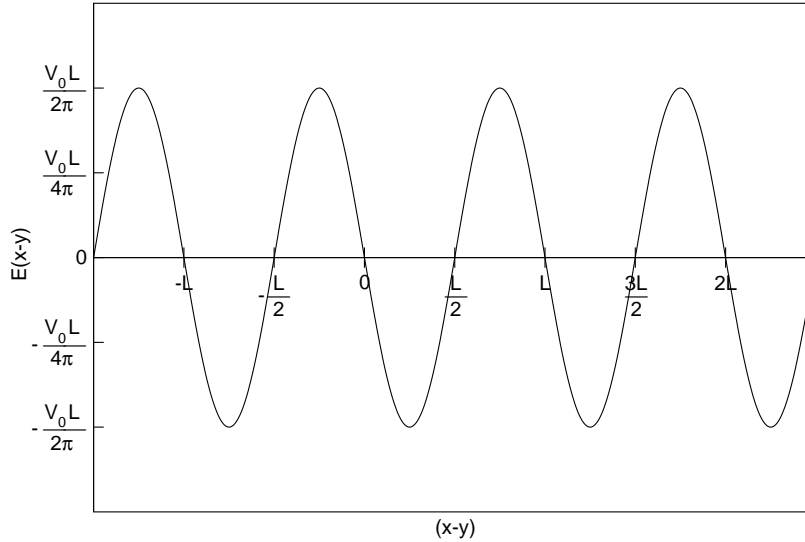


Abbildung 4: Wechselwirkungspotential  $V(x - y)$ .

## 5.2. Erwartungswerte und Korrelationsfunktionen der Orte und Impulse

Nun sollen einige charakteristische Größen im Ortsraum des Systems berechnet werden, dazu gehören die Erwartungswerte und die Korrelationsfunktionen der Orts- und Impulskoordinaten der Teilchen. Die Korrelationsfunktionen beschreiben die Wechselbeziehung zwischen den betrachteten physikalischen Größen.

Abbildung 5: Stammfunktion des Potentials  $\mathcal{E}(x - y)$ .

### 5.2.1. Erwartungswerte der Ortskoordinaten

Die Erwartungswerte der Ortskoordinaten sind gegeben durch

$$\begin{aligned} \langle \psi | \tilde{X}_i | \psi \rangle &= \int_{\mathcal{W}} \psi^*(\mathbf{x}, \mathbf{y}) x_i \psi(\mathbf{x}, \mathbf{y}) d\Gamma \\ &= \int_{\mathcal{W}} x_i \psi^*(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \psi(\mathbf{x}, \mathbf{y}) d\Gamma \end{aligned}$$

mit

$$\mathcal{W} = \underbrace{(0, L) \times \dots \times (0, L)}_{\dim \Gamma \text{ mal}}.$$

Hierbei ist  $\tilde{X}_i$  der Ortsoperator der Koordinate  $x_i$  und  $d\Gamma$  das Raumelement im Ortsraum. Analog gilt dies auch für den Erwartungswert von  $\tilde{Y}_j$ . Da die Ortsoperatoren  $\tilde{X}_i, \tilde{Y}_j$  im Ortsraum nur Multiplikationsoperatoren sind und somit nicht direkt auf  $\psi(\mathbf{x}, \mathbf{y})$  wirken, können sie in der Integraldarstellung verschoben werden, d.h. auch bei der Berechnung

der Erwartungswerte der Orte fallen die Wechselwirkungsterme  $e^{i\lambda W}$  weg.

$$\begin{aligned}
\Rightarrow \langle \psi | X_i | \psi \rangle &= \int_{\mathcal{W}} x_i \psi^*(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \psi(\mathbf{x}, \mathbf{y}) d\Gamma \\
&= \frac{1}{N!M!L^{N+M}} \int_{\mathcal{W}} x_i \det |e^{-ik_\mu x_\nu}| \det |e^{-iq_\mu y_\nu}| \det |e^{ik_\mu x_\nu}| \det |e^{iq_\mu y_\nu}| d\Gamma \\
&= \frac{1}{N!L^N} \int_0^L \cdots \int_0^L x_i \det |e^{-ik_\mu x_\nu}| \det |e^{ik_\mu x_\nu}| dx_1 \cdots dx_N \\
&\quad \times \frac{1}{M!L^M} \int_0^L \cdots \int_0^L \det |e^{-iq_\mu y_\nu}| \det |e^{iq_\mu y_\nu}| dy_1 \cdots dy_M
\end{aligned} \tag{5.3}$$

Zunächst wird das zweite Integral berechnet, da diese Lösung für das erste Integral verwendet werden kann. Dafür wird die Definition

$$\det |e^{iq_\mu y_\nu}| = \sum_{\pi \in \mathcal{S}_M} (-1)^\pi e^{iq_1 y_{\pi 1}} \cdots e^{iq_M y_{\pi M}}$$

der Determinanten eingesetzt und so ergeben die beiden Determinanten aus Gleichung (5.3) eine Doppelsumme

$$\begin{aligned}
\det |e^{-iq_\mu y_\nu}| \det |e^{iq_\mu y_\nu}| &= \sum_{\pi \in \mathcal{S}_M} \sum_{\pi' \in \mathcal{S}_M} \underbrace{(-1)^\pi (-1)^{\pi'} e^{-iq_1 y_{\pi 1}} \cdots e^{-iq_M y_{\pi M}} e^{-iq_1 y_{\pi' 1}} \cdots e^{-iq_M y_{\pi' M}}}_{=1 \text{ für } \pi=\pi'} \\
&= M! + \sum'_{\pi=\pi'} (e^{iq_\mu y_\nu})
\end{aligned}$$

die in das Integral eingesetzt wird. Es kommt dabei genau  $M!$ -mal vor, daß  $\pi = \pi'$  und somit der Summand 1 ist. Für die restliche Summe, in der die Summanden nicht 1 sind, wird die Abkürzung  $\sum'_{\pi=\pi'} (e^{iq_\mu y_\nu})$  eingeführt. Damit ergibt sich für das Integral

$$\begin{aligned}
&\frac{1}{M!L^M} \int_0^L \cdots \int_0^L \det |e^{-iq_\mu y_\nu}| \det |e^{iq_\mu y_\nu}| dy_1 \cdots dy_M \\
&= \frac{1}{M!L^M} \left( \underbrace{\int_0^L \cdots \int_0^L M! dy_1 \cdots dy_M}_{=M!L^M} + \underbrace{\int_0^L \cdots \int_0^L \sum'_{\pi=\pi'} (e^{iq_\mu y_\nu}) dy_1 \cdots dy_M}_{=0} \right) \\
&= 1.
\end{aligned} \tag{5.4}$$

Das zweite Integral verschwindet, da der Integrand eine ungerade Funktion mit der Periode  $L$  ist. Diese Methode läßt sich auch für die Integration über die  $x$ -Koordinaten verwenden.

$$\begin{aligned}
\langle \psi | X_i | \psi \rangle &= \frac{1}{N!L^N} \int_0^L \cdots \int_0^L x_i \det |e^{-ik_\mu x_\nu}| \det |e^{ik_\mu x_\nu}| dx_1 \cdots dx_N \\
&= \frac{1}{N!L^N} \left( \int_0^L \cdots \int_0^L N! x_i dx_1 \cdots dx_N + \underbrace{\int_0^L \cdots \int_0^L x_i \sum_{\pi=\pi'}' (e^{ik_\mu x_\nu}) dx_1 \cdots dx_N}_{=0} \right) \\
&= \frac{L^{N-1}}{L^N} \int_0^L x_i dx_i = \frac{L}{2}
\end{aligned}$$

Dieser Erwartungswert entspricht dem des Vielteilchenproblems von Fermionen einer Sorte ohne Wechselwirkung, also des freien Fermionengases.

$$\begin{aligned}
\Rightarrow \quad \langle \psi | X_i | \psi \rangle &= \langle \mathcal{C}\tilde{\psi} | X_i | \mathcal{C}\tilde{\psi} \rangle = \langle \tilde{\psi} | \mathcal{C}^\dagger X_i \mathcal{C} | \tilde{\psi} \rangle \\
&= \langle \tilde{\psi} | X_i | \tilde{\psi} \rangle = \frac{L}{2}
\end{aligned}$$

Dieses Ergebnis ist unabhängig vom Zustand des Systems, also von den Einteilchenimpulsen  $k_\mu$  und  $q_\mu$ .

### 5.2.2. Korrelationsfunktion der Ortskoordinaten

Die Korrelationsfunktion ist ein Maß für die Wechselbeziehung von physikalischen Größen. Ist die Korrelationsfunktion zwischen zwei Operatoren Null, so stehen sie in keiner Wechselbeziehung, ist sie positiv stehen sie in einer attraktiven Wechselbeziehung, oder ist sie etwa negativ so stehen sie in einer repulsiven Wechselbeziehung. Die Korrelationsfunktion für zwei Operatoren  $\underline{A}$  und  $\underline{B}$  wie sie hier verwendet werden soll ist gegeben durch

$$g(\underline{A}, \underline{B}) = \langle \underline{A}\underline{B} \rangle - \langle \underline{A} \rangle \langle \underline{B} \rangle.$$

Mit der oben verwandten Integrationsmethode für die Erwartungswerte der Ortskoordinaten ist schnell zu zeigen, daß die Korrelationsfunktionen für zwei Ortskoordinaten von

verschiedenen Teilchensorten immer verschwinden.

$$\begin{aligned}
 g(\tilde{X}_i, \tilde{Y}_j) &= \langle \tilde{X}_i \tilde{Y}_j \rangle - \langle \tilde{X}_i \rangle \langle \tilde{Y}_j \rangle \\
 &= \int_{\mathcal{W}} x_i y_j \psi^*(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \psi(\mathbf{x}, \mathbf{y}) d\Gamma \\
 &\quad - \left( \int_{\mathcal{W}} x_i \psi^*(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \psi(\mathbf{x}, \mathbf{y}) d\Gamma \right) \left( \int_{\mathcal{W}} y_j \psi^*(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \psi(\mathbf{x}, \mathbf{y}) d\Gamma \right) \\
 &\text{mit } \langle \tilde{X}_i \rangle = \langle \tilde{Y}_j \rangle = \frac{L}{2} \\
 &\text{und } \langle \tilde{X}_i \tilde{Y}_j \rangle = \frac{L^2}{4}
 \end{aligned}$$

$$\Rightarrow g(\tilde{X}_i, \tilde{Y}_j) = 0$$

Der Erwartungswert  $\langle \tilde{X}_i \tilde{Y}_j \rangle$  ergibt sich einfach aus den einzelnen Erwartungswerten  $\langle \tilde{X}_i \rangle$  und  $\langle \tilde{Y}_j \rangle$ , da nach den x- und y-Werten getrennt integriert werden kann. Wir sehen also, im Ortsraum sind die Fermionen der Sorte 1 nicht mit denen der Sorte 2 korreliert, da es sich um unterscheidbare Teilchen handelt und die Wechselwirkung nicht zu den Erwartungswerten der Orte beiträgt. Teilchen gleicher Sorte sind dagegen korreliert, da es sich um identische Fermionen handelt und somit kommt das Pauliprinzip zum tragen. Zwei Teilchen dürfen sich also nicht im gleichen Zustand oder am gleichen Ort befinden. Dieser Effekt wirkt wie eine repulsive Wechselwirkung für Fermionen gleicher Sorte. Es

wird ein Beispiel für die Teilchenzahl  $N = 2$  durchgerechnet.

$$\begin{aligned}
g_{N=2}(\tilde{X}_1, \tilde{X}_2) &= \langle \tilde{X}_1 \tilde{X}_2 \rangle - \langle \tilde{X}_1 \rangle \langle \tilde{X}_2 \rangle \\
&= \int_0^L \int_0^L x_1 x_2 \psi^*(\mathbf{x}) \psi(\mathbf{x}) dx_1 dx_2 \\
&\quad - \left( \int_0^L \int_0^L x_1 \psi^*(\mathbf{x}) \psi(\mathbf{x}) dx_1 dx_2 \right) \left( \int_0^L \int_0^L x_2 \psi^*(\mathbf{x}) \psi(\mathbf{x}) dx_1 dx_2 \right) \\
&= \frac{1}{2L^2} \int_0^L \int_0^L x_1 x_2 \det \begin{vmatrix} e^{-ik_1 x_1} & e^{-ik_1 x_2} \\ e^{-ik_2 x_1} & e^{-ik_2 x_2} \end{vmatrix} \det \begin{vmatrix} e^{ik_1 x_1} & e^{ik_1 x_2} \\ e^{ik_2 x_1} & e^{ik_2 x_2} \end{vmatrix} dx_1 dx_2 - \frac{L^2}{4} \\
&= \frac{1}{2L^2} \left( \frac{L^4}{2} - \frac{L^4}{2\pi^2 (u_1 - u_2)^2} \right) - \frac{L^2}{4} \\
&= \frac{L^2}{4} - \frac{L^2}{4\pi^2 (u_1 - u_2)^2} - \frac{L^2}{4} \\
&= -\frac{L^2}{4\pi^2 (u_1 - u_2)^2} \\
&= -\frac{1}{(k_1 - k_2)^2} \tag{5.5}
\end{aligned}$$

In der Rechnung wurde  $k_i = E_1 u_i$  und  $E_1 = 2\pi/L$  verwendet. Bei der Integration wurde die Periodizität von  $\exp(ik_\mu x_\nu)$  ausgenutzt und die Definition für die Impulse  $k_i$  eingesetzt.

Es zeigt sich also, daß zwischen zwei Fermionen der gleichen Sorte eine scheinbare repulsive Wechselwirkung besteht, die ausschließlich aus dem Pauliprinzip resultiert. Würden sich beide Fermionen im gleichen Zustand befinden, dann würde auch die Korrelationsfunktion (5.5) unendlich klein werden und somit die scheinbare repulsive Wechselwirkung unendlich groß. Befinden sich beide Teilchen in unterschiedlichen Zuständen, so gibt es eine scheinbare repulsive Wechselwirkung, die umso stärker ist, je dichter die Quantenzahlen beider Zustände zusammen liegen, also je kleiner die Differenz der Wellenzahlen ist. Befinden sich jedoch beide Teilchen in sehr unterschiedlichen Zuständen, so wird auch ihre Antikorrelation sehr schwach. Besteht das System aus mehr als zwei Fermionen, so würden zu dieser Korrelationsfunktion alle besetzten Zustände beitragen, da die Fermionen identisch sind und nicht unterschieden werden kann, welche Teilchen sich in welchen Zuständen befinden.

### 5.2.3. Erwartungswerte der Impulse

Genauso wie für die Ortskoordinaten sollen die Erwartungswerte der auf das Plancksche Wirkungsquantum normierten ( $\hbar = 1$ ) Einteilchen-Impulse berechnet werden, welche im Ortsraum durch

$$\begin{aligned} \langle \psi | \tilde{P}_i | \psi \rangle &= \int_{\mathcal{W}} \psi^*(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \left( -i \frac{\partial}{\partial x_i} \right) \psi(\mathbf{x}, \mathbf{y}) d\Gamma \\ &= \frac{1}{N! M! L^{N+M}} \int_{\mathcal{W}} \det |e^{-ik_\mu x_\nu}| \det |e^{-iq_\mu y_\nu}| e^{-i\lambda W} \\ &\quad \times \left( -i \frac{\partial}{\partial x_i} \right) \det |e^{ik_\mu x_\nu}| \det |e^{iq_\mu y_\nu}| e^{i\lambda W} d\Gamma \end{aligned}$$

gegeben sind. Dieser Erwartungswert kann nicht wie der des Ortes unabhängig von der Teilchenzahl berechnet werden, und er ist auch nicht vom Zustand des Systems unabhängig. Er kann für  $N = 1$  und  $N = 2$  explizit berechnet werden, jedoch wird schon die Regel für höhere  $N$  klar.

$N=1$

$$\begin{aligned} \langle \psi | \tilde{P} | \psi \rangle &= \frac{1}{M! L^{1+M}} \int_{\mathcal{W}} \det |e^{-iq_i y_j}| \det |e^{iq_i y_j}| e^{-ikx} \exp \left( -i \sum_{m=1}^M \mathcal{E}(x - y_m) \right) \\ &\quad \times \left( -i \frac{\partial}{\partial x} \right) e^{ikx} \exp \left( i \sum_{m=1}^M \mathcal{E}(x - y_m) \right) d\Gamma \\ &= \frac{1}{M! L^{1+M}} \int_{\mathcal{W}} \det |e^{-iq_i y_j}| \det |e^{iq_i y_j}| \left( k + \sum_{m=1}^M V(x - y_m) \right) d\Gamma \\ &\quad \text{mit Bedingung (4.2)} \\ &= \frac{1}{L} \int_0^L k dx \\ &= k \end{aligned}$$

$N=2$

Für  $N = 2$  ergibt die gleiche Rechnung das Ergebnis

$$\langle \psi | \tilde{P}_i | \psi \rangle = \frac{k_1}{2} + \frac{k_2}{2}.$$

Für beliebige  $N$  ergibt sich

$$\langle \psi | P_i | \psi \rangle = \sum_{n=1}^N \frac{k_n}{N}.$$

Diese Erwartungswerte sind unabhängig von der Wechselwirkung, solange diese der Bedingung (4.2) genügt. Für Fermionen der Sorte 2 erfolgt die Rechnung analog, es müssen nur die  $k$ -Werte durch die  $q$ -Werte ersetzt werden. Hier wird der Effekt der identischen Fermionen noch einmal deutlich, denn der Erwartungswert eines Impulsoperators ist die Mittelung der Impulse aller besetzter Zustände.

#### 5.2.4. Korrelationsfunktion der Impulse

Für die Korrelationsfunktion der Impulse

$$g(\underline{P}_x, \underline{P}_y) = \langle \underline{P}_x \underline{P}_y \rangle - \langle \underline{P}_x \rangle \langle \underline{P}_y \rangle \quad (5.6)$$

muß nun zunächst noch der Erwartungswert  $\langle \underline{P}_x \underline{P}_y \rangle$  bestimmt werden. Dieser Erwartungswert hängt von der Art der Wechselwirkung ab, so daß hier nicht mehr für eine allgemeine Wechselwirkung gerechnet werden kann. Der Operator  $\underline{P}_x \underline{P}_y$  wird im Ortsraum dargestellt durch

$$\underline{P}_x \underline{P}_y = -\frac{\partial^2}{\partial x \partial y}.$$



Der Erwartungswert  $\langle \tilde{P}_x \tilde{P}_y \rangle$  kann für niedrige Teilchenzahlen exakt berechnet werden. Für  $N = 1$ ,  $M = 1$  ergibt sich

$$\begin{aligned}
\langle \tilde{P}_x \tilde{P}_y \rangle &= \int_{\mathcal{W}} \psi^*(x, y) \tilde{P}_x \tilde{P}_y \psi(x, y) d\Gamma \\
&= -\frac{1}{L^2} \int_0^L \int_0^L e^{-ikx} e^{-iqy} e^{-i\lambda W} \frac{\partial^2}{\partial x \partial y} e^{ikx} e^{iqy} e^{i\lambda W} dx dy \\
&= -\frac{1}{L^2} \int_0^L \int_0^L e^{-ikx} e^{-iqy} e^{-i\lambda W} \frac{\partial}{\partial x} \left( iq + i\lambda \frac{\partial W}{\partial y} \right) e^{ikx} e^{iqy} e^{i\lambda W} dx dy \\
&= \frac{1}{L^2} \int_0^L \int_0^L \left( qk + \lambda^2 \frac{\partial W}{\partial x} \frac{\partial W}{\partial y} + \underbrace{\lambda q \frac{\partial W}{\partial x}}_0 + \underbrace{\lambda k \frac{\partial W}{\partial y}}_0 - \underbrace{i\lambda \frac{\partial^2 W}{\partial x \partial y}}_0 \right) dx dy \\
&= \frac{1}{L^2} \int_0^L \int_0^L \left( qk - \lambda^2 V_0^2 \cos^2 \left[ \frac{2\pi}{L} (x - y) \right] \right) dx dy \\
&= qk - \frac{\lambda^2 V_0^2}{2}.
\end{aligned}$$

Mit  $\langle \tilde{P}_x \rangle = k$  und  $\langle \tilde{P}_y \rangle = q$  ergibt sich für die Korrelationsfunktion der Impulse (5.6)

$$g(\tilde{P}_x, \tilde{P}_y) = -\frac{\lambda^2 V_0^2}{2}. \quad (5.7)$$

Man sieht also, daß zwei Impulse von Fermionen unterschiedlicher Sorte in Abhängigkeit von der Wechselwirkung (5.2) eine negative Korrelation, also scheinbar eine repulsive Wechselwirkung miteinander haben. Je größer die Wechselwirkung zwischen den Teilchen ist, desto stärker ist die scheinbare repulsive Wechselwirkung zwischen den Impulsen. Verschwindet das Wechselwirkungspotential, so verschwindet auch (5.7), d.h. die Impulse sind dann nicht mehr korreliert. Die Korrelationsfunktion ist unabhängig vom Zustand der Teilchen, da es sich hier um unterscheidbare Fermionen handelt. Mit MATHEMATICA können noch die Korrelationsfunktionen für die Teilchenzahlen  $(N = 2, M = 1)$ ,  $(N = 1, M = 2)$  und  $(N = 2, M = 2)$  exakt berechnet werden. Die Ergebnisse sind mit Gleichung (5.7) identisch. Für höhere Teilchenzahlen wurde versucht mit Hilfe der Monte-Carlo-Integration Werte zu ermitteln, jedoch war dieses Verfahren nicht im Vorzeichen stabil. Trotzdem scheint der Zusammenhang (5.7) unabhängig von der Teilchenzahl zu sein.

Wünschenswert wäre natürlich eine positive Korrelation für die Fermionen, um so ein Modell zur Beschreibung von Pseudobosonen durch gebundene Fermionen zu erhalten. Dieses ist jedoch mit der gegebenen Wechselwirkung nicht zu erreichen. Es wurden noch

andere Wechselwirkungspotentiale mit trigonometrischen Funktionen und auch Wechselwirkungen mit Gaußkurven, die der Bedingung (5.1) aber nicht (4.2) genügen getestet, jedoch kam immer nur eine negative Korrelation der Impulse zustande. Anscheinend ist im Luttinger-Modell nur eine negative Korrelation der Impulse möglich.

Jetzt soll noch für die Teilchenzahl  $N = 2$  die Korrelationsfunktion für die Impulse gleicher Teilchensorte bestimmt werden.

$$\begin{aligned}
g(\underline{P}_{x_1}, \underline{P}_{x_2}) &= \langle \underline{P}_{x_1} \underline{P}_{x_2} \rangle - \langle \underline{P}_{x_1} \rangle \langle \underline{P}_{x_2} \rangle \\
&= - \int_0^L \int_0^L \psi^*(\mathbf{x}) \frac{\partial^2}{\partial x_1 \partial x_2} \psi(\mathbf{x}) dx_1 dx_2 \\
&\quad + \left( \int_0^L \int_0^L \psi^*(\mathbf{x}) \frac{\partial}{\partial x_1} \psi(\mathbf{x}) dx_1 dx_2 \right) \left( \int_0^L \int_0^L \psi^*(\mathbf{x}) \frac{\partial}{\partial x_2} \psi(\mathbf{x}) dx_1 dx_2 \right) \\
&= - \frac{1}{2L^2} \int_0^L \int_0^L \det \begin{vmatrix} e^{-ik_1 x_1} & e^{-ik_1 x_2} \\ e^{-ik_2 x_1} & e^{-ik_2 x_2} \end{vmatrix} \frac{\partial^2}{\partial x_1 \partial x_2} \det \begin{vmatrix} e^{ik_1 x_1} & e^{ik_1 x_2} \\ e^{ik_2 x_1} & e^{ik_2 x_2} \end{vmatrix} dx_1 dx_2 \\
&\quad - \frac{(k_1 + k_2)^2}{4} \\
&= k_1 k_2 - \frac{(k_1 + k_2)^2}{4} = - \frac{(k_1 - k_2)^2}{4}
\end{aligned}$$

Man sieht, daß die Korrelation zweier Impulse der gleichen Teilchensorte immer negativ ist. Diese Antikorrelation ist umso stärker, je größer der Abstand der beiden Zustände im Energiespektrum ist. Sind die beiden besetzten Zustände gleich, so sind die Impulse nicht miteinander korreliert. Dies wird verständlich, wenn man nocheinmal (5.5) betrachtet. Sind nämlich die beiden besetzten Zustände gleich, so wird die Antikorrelation der Ortskoordinaten unendlich groß.

### 5.3. Teilchendichten im Impulsraum

Die Zweiteilchendichte im Impulsraum gibt die Aufenthaltswahrscheinlichkeit zweier Teilchen im Impulsraum in Abhängigkeit voneinander an. Die Aufenthaltswahrscheinlichkeit im Impulsraum eines Teilchens ist die Wahrscheinlichkeit ein Teilchen in einem bestimmten Zustand vorzufinden. Hierbei werden noch einmal die in Abschnitt 5.2.4 berechneten Korrelationen zwischen den Größen veranschaulicht.

Um die Zweiteilchendichte im Impulsraum zu bestimmen muß zunächst die Fourieranalyse der Wellenfunktion  $\psi(\mathbf{x}, \mathbf{y})$  durchgeführt werden. Die Fourieranalyse läßt sich nicht

unabhängig von den Teilchenzahlen durchführen und man sieht, daß dies bereits für kleine Teilchenzahlen sehr aufwendig wird.

### 5.3.1. Ein- und Zweiteilchendichte für $N=1$ und $M=1$

Zunächst soll die Fourieranalyse für  $N = 1$   $M = 1$  durchgeführt werden.

$N=1, M=1$

$$\psi(x, y) = \frac{1}{L} e^{ikx} e^{iqy} \underbrace{e^{i\lambda W}}_{f(x-y)}$$

Erst wird nur der Wechselwirkungsterm  $f(x - y) = f(z)$  in eine Fourierreihe entwickelt

$$f(x - y) = f(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{i\omega n z}$$

mit  $\omega = E_1 = 2\pi/L$ .  $L$  ist hier die Periode und stimmt mit der Kastenlänge überein. Die Fourierkoeffizienten werden durch

$$c_n = \frac{1}{L} \int_0^L f(z) e^{-i\omega n z} dz$$

bestimmt.  $f(z)$  wird also nach ebenen Wellen  $\exp(i\omega n z)$  mit Frequenz  $\omega$  und Amplitude  $c_n$  zerlegt. Mit

$$f(z) = \exp \left\{ i\lambda \frac{V_0}{E_1} \sin(E_1 z) \right\}$$

werden die Fourierkoeffizienten berechnet.

$$\begin{aligned}
c_n &= \frac{1}{L} \int_0^L \exp \left\{ i \left( \frac{\lambda V_0}{E_1} \sin(E_1 z) - E_1 n z \right) \right\} dz \\
&= \frac{1}{L} \int_0^L \exp \left\{ i \left( \frac{\lambda V_0}{E_1} \cos \left( E_1 z - \frac{\pi}{2} \right) - E_1 n z \right) \right\} dz \\
&= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \exp \left\{ i \left( \frac{\lambda V_0}{E_1} \cos \phi + n\phi - n \frac{\pi}{2} \right) \right\} d\phi \\
&= \frac{i^{-n}}{2\pi} \int_0^{2\pi} \exp \left\{ i \left( \frac{\lambda V_0}{E_1} \cos \phi + n\phi \right) \right\} d\phi \\
&= J_n \left( \frac{\lambda V_0}{E_1} \right)
\end{aligned}$$

$$\Rightarrow f(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} J_n \left( \frac{\lambda V_0}{E_1} \right) e^{iE_1 n z}$$

Bei der Integration wurde die Substitution  $\phi = -E_1 z + \frac{\pi}{2}$  benutzt und die Umformung zur Besselfunktion

$$J_n(x) = \frac{i^{-n}}{2\pi} \int_0^{2\pi} \exp \{ i(x \cos \phi + n\phi) \} d\phi$$

wurde [19, 20] entnommen. Hieraus ergibt sich für die Reihenentwicklung der Wellenfunktion

$$\begin{aligned}
\psi(x, y) &= \frac{1}{L} e^{ikx} e^{iqy} \sum_{\tilde{n}=-\infty}^{\infty} J_{\tilde{n}} \left( \frac{\lambda V_0}{E_1} \right) e^{iE_1 \tilde{n} x} e^{-iE_1 \tilde{n} y} \\
&= \frac{1}{L} e^{iE_1 u x} e^{iE_1 v y} \sum_{\tilde{n}=-\infty}^{\infty} \sum_{\tilde{m}=-\infty}^{\infty} c_{\tilde{n}} \delta_{\tilde{m}, -\tilde{n}} e^{iE_1 \tilde{n} x} e^{iE_1 \tilde{m} y} \\
&= \frac{1}{L} \sum_{\tilde{n}=-\infty}^{\infty} \sum_{\tilde{m}=-\infty}^{\infty} c_{\tilde{n}} \delta_{\tilde{m}, -\tilde{n}} e^{iE_1 (\tilde{n}+u)x} e^{iE_1 (\tilde{m}+v)y} \\
&= \frac{1}{L} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \sum_{m=-\infty}^{\infty} c_{n-u} \delta_{m-v, u-n} e^{iE_1 n x} e^{iE_1 m y} \\
&= \sum_{n=-\infty}^{\infty} \sum_{m=-\infty}^{\infty} c_{nm} e^{iE_1 n x} e^{iE_1 m y},
\end{aligned} \tag{5.8}$$

wobei  $n = \tilde{n} + u$  und  $m = \tilde{m} + v$  benutzt wurde. Die Fourierkoeffizienten der Wellenfunktion für  $N = 1$  und  $M = 1$  Teilchen ergeben sich nun also zu

$$c_{nm} = \frac{1}{L} J_{(u-n)} \left( \frac{\lambda V_0}{E_1} \right) \delta_{m-v, u-n}. \quad (5.9)$$

Die Zweiteilchendichte im Impulsraum  $\rho^{(2)}(n, m) = c_{nm}^* c_{nm} = |c_{nm}|^2$  ist in Abbildung

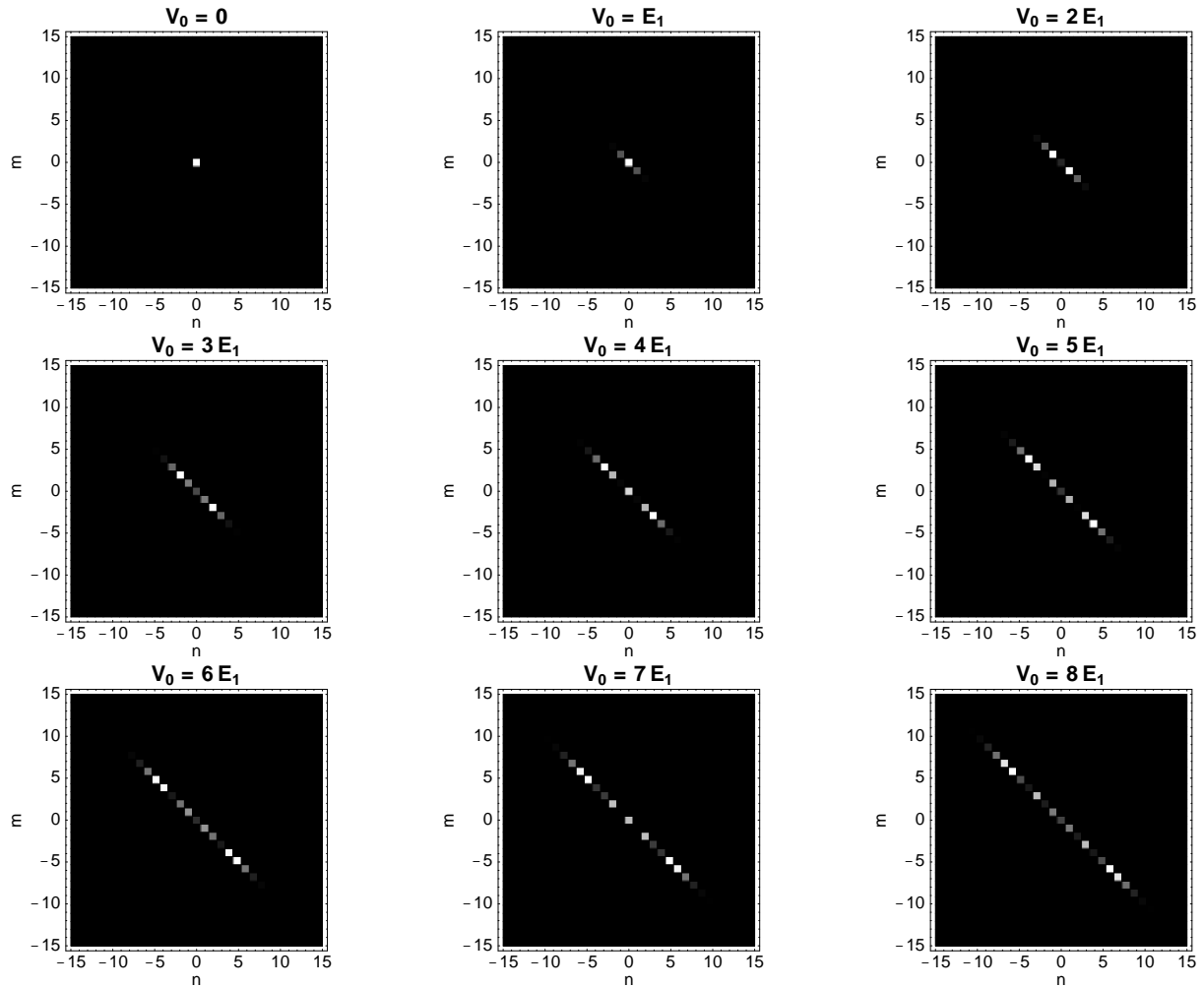


Abbildung 6: Zweiteilchendichte  $\rho^{(2)}(n, m)$  im Impulsraum für die Teilchenzahlen  $N = 1$ ,  $M = 1$  und verschiedene Wechselwirkungsstärken  $V_0$ .

6 graphisch dargestellt. Bei allen Graphen befindet sich das System im Grundzustand mit  $u, v = 0$ . Die Graphen der Zweiteilchendichten für andere Zustände sind gegenüber dem Grundzustand nur verschoben, wie an den Fourierkoeffizienten (5.9) zu sehen ist. Eine Änderung der  $u$ -Quantenzahl bewirkt eine Verschiebung auf der  $n$ -Achse, eine Änderung der  $v$ -Quantenzahl bewirkt eine Verschiebung auf der  $m$ -Achse. Deutlich erkennt man die in (5.7) ermittelte negative Korrelation. Die Fourierkoeffizienten verschwinden

nur auf der Diagonalen senkrecht zur Identität nicht. Dieses erscheint wie eine repulsive Wechselwirkung zwischen den Teilchen im Impulsraum, während im Ortsraum keine Wechselwirkung besteht. Betrachtet man das Bild mit  $V_0 = 6E_1$  in Abbildung 6 so sieht man, daß es am wahrscheinlichsten ist ein Teilchen der Sorte 1 im Zustand  $n = 5, (-5)$  und ein Teilchen der Sorte 2 im Zustand  $m = -5, (5)$  zu finden. In Abbildung 7 ist die

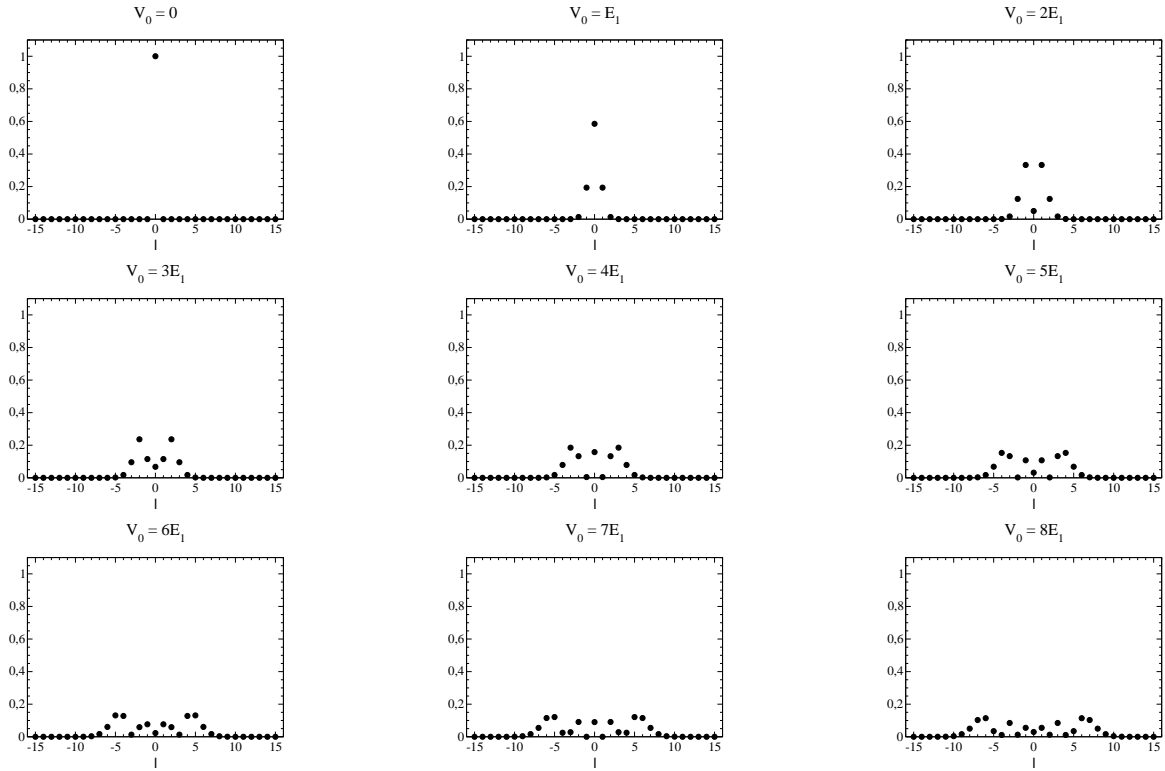


Abbildung 7: Einteilchendichte  $\rho^{(1)}(l)$  im Impulsraum für die Teilchenzahlen  $N = 1, M = 1$  und verschiedene Wechselwirkungsstärken  $V_0$ .

aus der Zweiteilchendichte  $\rho^{(2)}(n, m)$  gebildete Einteilchendichte

$$\rho^{(1)}(l) = \frac{1}{2} \left( \sum_{n=-\infty}^{\infty} \rho^{(2)}(n, l) + \sum_{m=-\infty}^{\infty} \rho^{(2)}(l, m) \right) \quad (5.10)$$

über die Impulsquantenzahlen  $l$  aufgetragen. Diese Darstellung gibt die Aufenthaltswahrscheinlichkeit eines Teilchens im Impulsraum relativ zum Zustand des anderen Teilchens an. Wie man in Abbildung 6 sehen kann, reicht es zur numerischen Auswertung von (5.10), die Elemente in einem festen Intervall zu summieren, da die Folgeelemente schnell gegen Null konvergieren.

Man sieht deutlich, daß im Grundzustand ohne Wechselwirkung sich beide Teilchen in den Einteilchengrundzuständen aufhalten. Also sind die Zustände  $n, m = 0$  mit der Wahrscheinlichkeit 1 besetzt. Für die Systeme mit stärker werdender Wechselwirkung driften

nun zwei Maxima der Wahrscheinlichkeitsverteilung auseinander und weg vom Nullpunkt. Die negative Korrelation aus (5.7) wird hier also qualitativ bestätigt.

Die gleichen Größen sollen noch für eine andere Teilchenzahl betrachtet werden, um die Auswirkungen der Teilchenzahl zu untersuchen.

### 5.3.2. Ein- und Zweiteilchendichte für $N=2$ und $M=1$

Für  $N = 2$  und  $M = 1$  wird wieder die Wellenfunktion  $\psi(x_1, x_2, y)$  in eine Fourierreihe entwickelt.

$N=2, M=1$

$$\begin{aligned} \psi(x_1, x_2, y) &= \frac{1}{\sqrt{2L^3}} \det \begin{vmatrix} e^{ik_1x_1} & e^{ik_1x_2} \\ e^{ik_2x_1} & e^{ik_2x_2} \end{vmatrix} e^{iqy} \underbrace{e^{i\lambda W}}_{f(x_1, x_2, y)} \\ &= \sum_{n_1=-\infty}^{\infty} \sum_{n_2=-\infty}^{\infty} \sum_{m=-\infty}^{\infty} c_{n_1 n_2 m} e^{iE_1 n_1 x_1} e^{iE_1 n_2 x_2} e^{iE_1 m y} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &f(x_1, x_2, y) \\ &= \exp \left\{ i \frac{\lambda V_0}{E_1} \sin(E_1[x_1 - y]) \right\} \exp \left\{ i \frac{\lambda V_0}{E_1} \sin(E_1[x_2 - y]) \right\} \\ &= \left( \sum_{n=-\infty}^{\infty} \sum_{m=-\infty}^{\infty} c_n \delta_{m, -n} e^{iE_1 n x_1} e^{iE_1 m y} \right) \\ &\quad \times \left( \sum_{n=-\infty}^{\infty} \sum_{m=-\infty}^{\infty} c_n \delta_{m, -n} e^{iE_1 n x_2} e^{iE_1 m y} \right) \\ &= \sum_{n_1=-\infty}^{\infty} \sum_{n_2=-\infty}^{\infty} \sum_{m_1=-\infty}^{\infty} \sum_{m_2=-\infty}^{\infty} c_{n_1} c_{n_2} \delta_{m_1, -n_1} \delta_{m_2, -n_2} e^{iE_1 n_1 x_1} e^{iE_1 n_2 x_2} e^{iE_1 (m_1 + m_2) y} \\ &= \sum_{n_1=-\infty}^{\infty} \sum_{n_2=-\infty}^{\infty} c_{n_1} c_{n_2} e^{iE_1 n_1 x_1} e^{iE_1 n_2 x_2} e^{-iE_1 (n_1 + n_2) y} \\ &= \sum_{n_1=-\infty}^{\infty} \sum_{n_2=-\infty}^{\infty} \sum_{m=-\infty}^{\infty} c_{n_1} c_{n_2} \delta_{m, -n_1 - n_2} e^{iE_1 n_1 x_1} e^{iE_1 n_2 x_2} e^{-iE_1 m y} \\ &\text{mit } c_n = J_n \left( \frac{\lambda V_0}{E_1} \right) \end{aligned}$$

Benutzt wurden die Umformungen wie schon in (5.8). Für die Reihenentwicklung der Wellenfunktion ergibt sich somit weiter

$$\begin{aligned}
\psi(x_1, x_2, y) &= \frac{1}{\sqrt{2L^3}} \underbrace{(e^{ik_1x_1} e^{ik_2x_2} - e^{ik_2x_1} e^{ik_1x_2})}_{\Theta} e^{iqy} f(x_1, x_2, y) \\
&= \frac{1}{\sqrt{2L^3}} \Theta \sum_{n_1=-\infty}^{\infty} \sum_{n_2=-\infty}^{\infty} \sum_{m=-\infty}^{\infty} c_{n_1} c_{n_2} \delta_{m-v, -n_1-n_2} e^{iE_1 n_1 x_1} e^{iE_1 n_2 x_2} e^{iE_1 m y} \\
&= \frac{1}{\sqrt{2L^3}} \sum_{n_1=-\infty}^{\infty} \sum_{n_2=-\infty}^{\infty} \sum_{m=-\infty}^{\infty} c_{n_1} c_{n_2} \delta_{m-v, -n_1-n_2} \\
&\quad \times (e^{iE_1(n_1+u_1)x_1} e^{iE_1(n_2+u_2)x_2} e^{-iE_1 m y} - e^{iE_1(n_1+u_2)x_1} e^{iE_1(n_2+u_1)x_2} e^{iE_1 m y}) \\
&= \frac{1}{\sqrt{2L^3}} \sum_{n_1=-\infty}^{\infty} \sum_{n_2=-\infty}^{\infty} \sum_{m=-\infty}^{\infty} (c_{n_1-u_1} c_{n_2-u_2} - c_{n_1-u_2} c_{n_2-u_1}) \delta_{m-v, u_1+u_2-n_1-n_2} \\
&\quad \times e^{iE_1 n_1 x_1} e^{iE_1 n_2 x_2} e^{iE_1 m y}. \\
\Rightarrow c_{n_1 n_2 m} &= \frac{1}{\sqrt{2L^3}} (c_{n_1-u_1} c_{n_2-u_2} - c_{n_1-u_2} c_{n_2-u_1}) \delta_{m-v, u_1+u_2-n_1-n_2}
\end{aligned}$$

Hiermit ist die Dreiteilchendichte im Impulsraum  $\rho^{(3)}(n_1, n_2, m) = c_{n_1 n_2 m}^* c_{n_1 n_2 m}$  bestimmt. Die Zweiteilchendichte

$$\rho^{(2)}(n, m) = \sum_{n_2=-\infty}^{\infty} \rho^{(3)}(n, n_2, m). \quad (5.11)$$

ist in Abbildung 8 wieder für den Grundzustand dargestellt. Sie gibt die Verteilung der Wahrscheinlichkeitsdichte der Zustände für ein Fermion der Sorte 1 ( $n$ ) und ein Fermion der Sorte 2 ( $m$ ) in Abhängigkeit vom Zustand des zweiten Fermions der Sorte 1 an. Für  $V_0 = 0$  sind nur die Zustände  $m = 0$  und  $n = 0, 1$  besetzt. Mit größer werdender Wechselwirkung bildet sich eine Fläche aus wahrscheinlichen Zuständen mit zwei auseinander driftenden Maxima, die auf der Linie mit  $m = 0$  und an den Stellen  $-(n_{max} - 1)$ ,  $+n_{max}$  liegen. Auffällig ist weiterhin, daß die entstehende Fläche nicht achsensymmetrisch, sondern punktsymmetrisch zum Mittelpunkt ist.

Das Auseinanderdriften der beiden Maxima in der Wahrscheinlichkeitsverteilung für stärker werdende Wechselwirkung läßt sich wieder mit der stärkeren Antikorrelation der Impulse für Fermionen unterschiedlicher Sorte erklären. Daß die Maxima nicht wieder auf der Orthogonalen zur Winkelhalbierenden liegen, sondern auf der Linie  $m = 0$ , folgt aus der Asymmetrie der Teilchenzahlen, denn die Impulse von Fermionen gleicher Sorte haben ebenfalls eine negative Korrelation. Betrachtet man in Abbildung 8 das Bild mit  $V_0 = 6E_1$ , so ist es am wahrscheinlichsten jeweils ein Teilchen der Sorte 1 im Zustand  $n = -4, +5$  und ein Teilchen der Sorte 2 im Zustand  $m = 0$  zu finden.



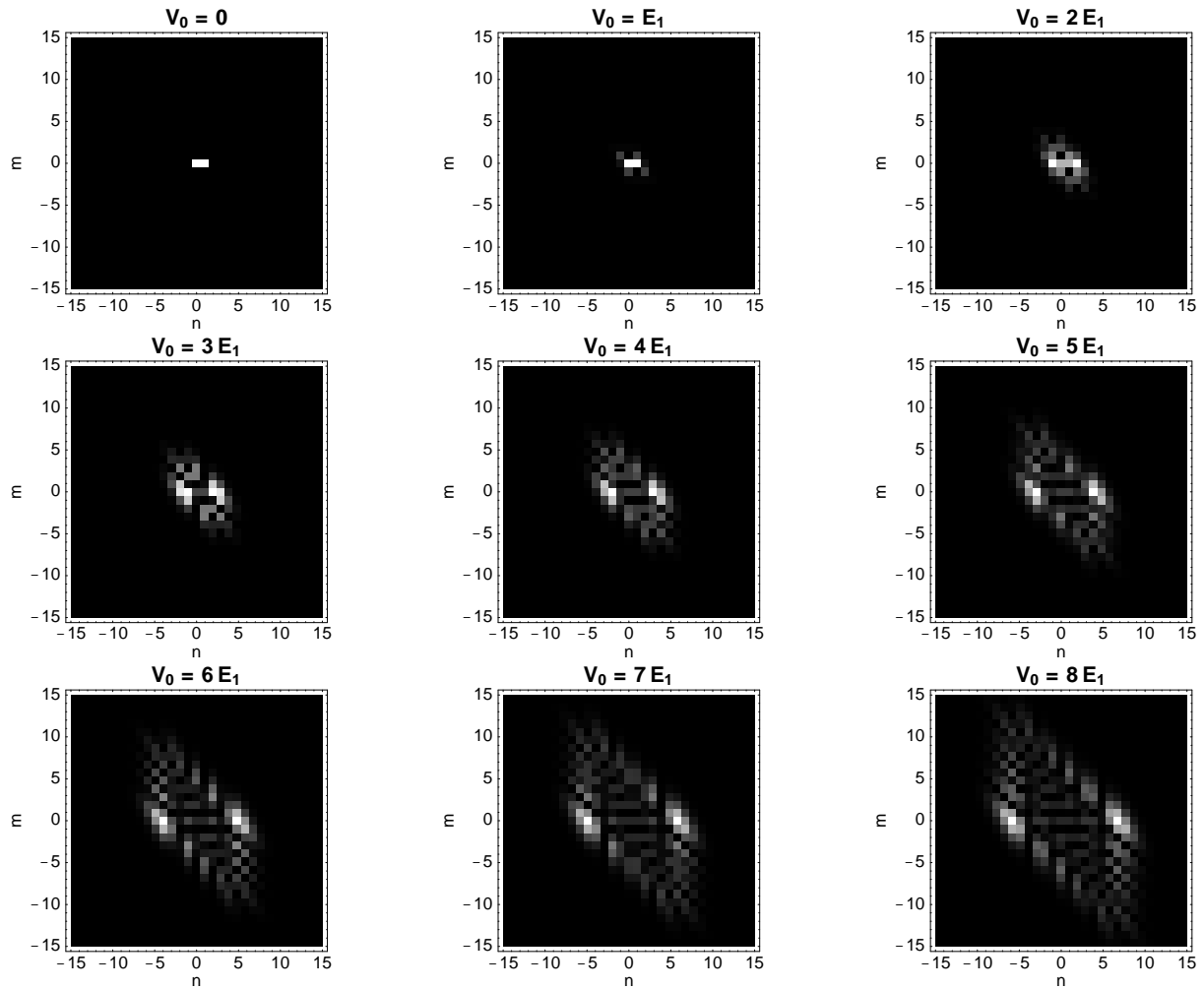


Abbildung 8: Zweiteilchendichte  $\rho^{(2)}(n, m)$  im Impulsraum für die Teilchenzahlen  $N = 2$ ,  $M = 1$  und verschiedene Wechselwirkungsstärken  $V_0$ .

Die Einteilchendichte des Problems mit den Teilchenzahlen  $N = 2$ ,  $M = 1$  ergibt sich aus den Zweiteilchendichten durch

$$\begin{aligned} \rho^{(1)}(l) &= \frac{1}{2} \left( \sum_{n=-\infty}^{\infty} \rho^{(2)}(n, l) + \sum_{m=-\infty}^{\infty} \rho^{(2)}(l, m) \right) \\ &= \frac{1}{2} \left( \sum_{n=-\infty}^{\infty} \sum_{n_2=-\infty}^{\infty} \rho^{(3)}(n, n_2, l) + \sum_{m=-\infty}^{\infty} \sum_{n_2=-\infty}^{\infty} \rho^{(3)}(l, n_2, m) \right) \end{aligned}$$

und ist in Abbildung 9 dargestellt. Ohne Wechselwirkung ist es nur wahrscheinlich Teilchen in den Zuständen  $l = 0$  und  $l = 1$  zu finden. In dieser Graphik ist jedoch erkennbar, daß sich für stärker werdende Wechselwirkung drei Maxima ausbilden, wovon eines an der

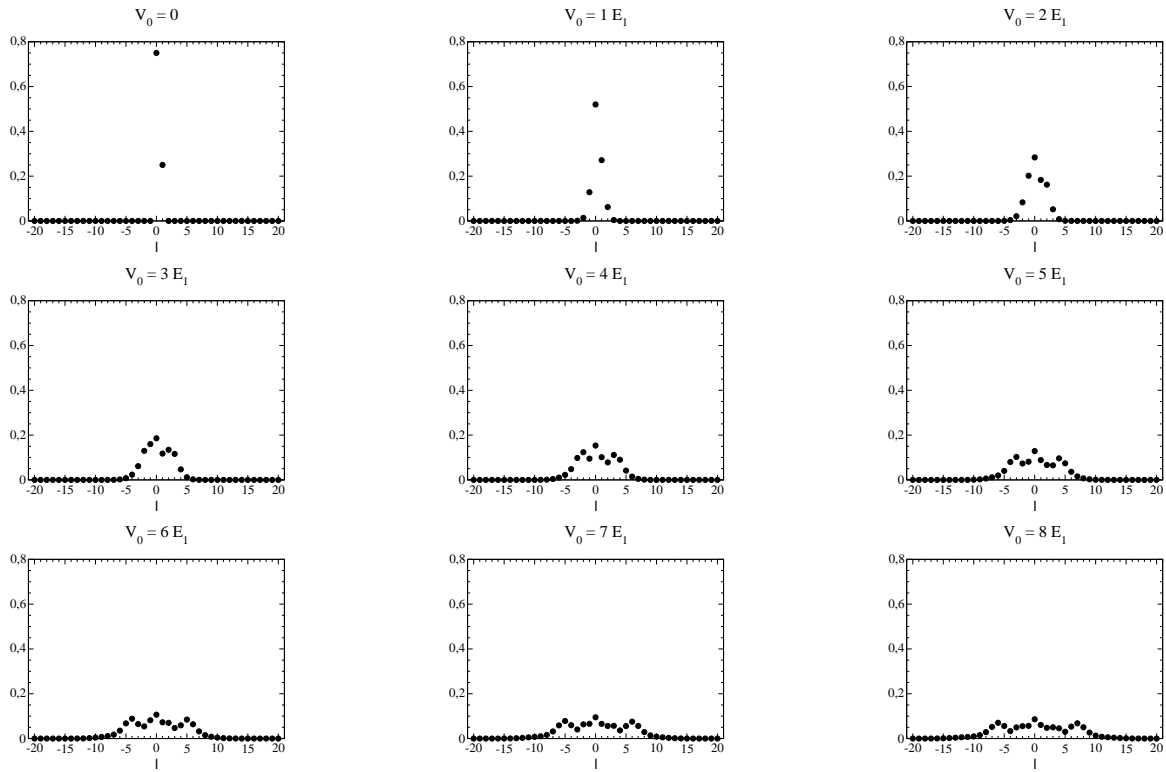


Abbildung 9: Einzeildichte  $\rho^{(1)}(l)$  im Impulsraum für die Teilchenzahlen  $N = 2$ ,  $M = 1$  und verschiedene Wechselwirkungsstärken  $V_0$ .

Stelle  $l = 0$  fixiert ist. Die anderen beiden driften wie beim Fall  $N = 1$  und  $M = 1$  auseinander. Vergleicht man dieses mit der Zweiteildendichte in Abbildung 8, so stellt man fest, daß das mittlere Maximum durch ein Teilchen der Sorte 2 hervorgerufen wird, die beiden seitlichen Maxima durch die Teilchen der Sorte 1. Zwischen den Teilchen gleicher Sorte stellt sich also der größte Abstand im Zustandsraum ein.

## 6. Thermodynamik des Luttinger-Modells

Ziel dieses Kapitels ist es einige thermodynamische Zustandsgrößen zum Luttinger-Modell im kanonischen Ensemble zu berechnen, um sie mit Zustandsgrößen von Systemen mit Fermionen und Bosonen zu vergleichen. Hierbei soll untersucht werden, ob sich die Wechselwirkung zwischen den Fermionen auf die Thermodynamik des Systems auswirkt und ob es Anzeichen bosonischen Verhaltens des Systems gibt. Aufgrund des Entartungsgrades der Energieeigenwerte wird sich herausstellen, daß einige Modifizierungen des Luttinger-Modells nötig sind, um überhaupt eine sinnvolle thermodynamische Behandlung des Systems zu ermöglichen.

### 6.1. Kanonische Zustandssumme

Das kanonische Ensemble beschreibt ein System mit vorgegebener Teilchenzahl, Volumen und Temperatur. Es eignet sich für die Beschreibung unseres Systems, da sich die interessanten Zustandsgrößen leicht herleiten lassen und genügend Vergleichsmöglichkeiten mit anderen Systemen bestehen. Die Zustandssumme ist im kanonischen Ensemble durch

$$Z(N, V, \beta) = \text{Sp} \left( e^{-\beta \tilde{H}} \right)$$

und der statistische Operator durch

$$\rho \sim \frac{e^{-\beta \tilde{H}}}{Z(\beta)}$$

gegeben, wobei  $\beta = (k_B T)^{-1}$  die inverse Temperatur und  $\tilde{H}$  der Hamiltonoperator ist. Im weiteren wird ein Zustand  $|\psi\rangle$  durch seine Quantenzahlen  $\{u_n, v_m\}$  identifiziert,

$$|\psi\rangle = |u_1, \dots, u_N, v_1, \dots, v_M\rangle$$

wodurch der Zustand des Systems eindeutig bestimmt ist. Die Energieeigenwerte und die Quantenzahlen des Luttinger-Modells sind gegeben durch die Gleichungen (4.8) und (4.9) und lauten in Quantenzahlen ausgedrückt

$$E = \sum_{n=1}^N E_1 u_n - \sum_{m=1}^M E_1 v_m$$

mit  $E_1 = \frac{2\pi}{L}$ .

Das Energiespektrum ist also wie beim harmonischen Oszillator äquidistant. Zur Beschreibung der Gesamtenergie des Systems wird die Gesamtquantenzahl  $a$  eingeführt. Sie ist

einfach die Summe der Quantenzahlen der Einteilchensysteme

$$a := \sum_{n=1}^N u_n - \sum_{m=1}^M v_m \quad \text{mit } a \in \mathbb{Z} \quad (6.1)$$

und für die Energieeigenwerte des Gesamtsystems  $E_a$  folgt damit

$$E_a = E_1 a \quad \text{mit } a \in \mathbb{Z}.$$

Für die kanonische Zustandssumme ergibt sich, ausgedrückt durch die Gesamtenergie

$$Z(\beta) = \text{Sp} \left( e^{-\beta \hat{H}} \right) = \sum_{\{n\}} \langle n | e^{-\beta \hat{H}} | n \rangle = \sum_{\{n\}} e^{-\beta E_n} = \sum_a e^{-\beta E_a} g_a. \quad (6.2)$$

In dieser Formulierung steht  $\{n\}$  für einen vollständigen Satz von Quantenzahlen. Führen verschiedene Quantenzahl-Tupel zum gleichen Energieeigenwert, so muß dieser entsprechend oft zur Zustandssumme hinzu addiert werden. Wird die Zustandssumme durch die Gesamtquantenzahl  $a$  ausgedrückt, so muß in der Zustandssumme der Entartungsfaktor  $g_a$  beachtet werden, der die Anzahl der Quantenzahl-Tupel angibt, die zum gleichen Energieeigenwert führen. Hier handelt es sich um ein entartetes System, d.h. der Entartungsfaktor  $g_a$  muß berücksichtigt werden. Aus Gleichung (6.1) wird sofort ersichtlich, daß ohne Beschränkungen für  $u_n, v_m \in \mathbb{Z}$ , jeder Gesamtenergieeigenwert  $E_a$  unendlichfach entartet ist. Das bedeutet, daß für dieses System keine sinnvolle Thermodynamik möglich ist, da in der Formulierung der Zustandssumme mit Entartungsfaktoren (6.2) für das ursprüngliche Luttinger-Modell die Zustandssumme nicht konvergiert.

## 6.2. Trunkiertes Luttinger-Modell

Um mit dem Ansatz des Luttinger-Modells eine Thermodynamik betrachten zu können müssen Einschränkungen für das System gemacht werden. Die Bedingungen für die Quantenzahlen müssen so modifiziert werden, daß der Entartungsgrad für alle Energieeigenwerte beschränkt bleibt. Das Modell des hierbei entstehenden Systems wollen wir „trunkiertes Luttinger-Modell“ nennen, da durch die Einschränkungen der Quantenzahlen nicht mehr alle Zustände des ursprünglichen Luttinger-Modells möglich sind. Dieses ist sinnvoll, da das Luttinger-Modell für die Zwecke dieser Arbeit als exakt lösbares mathematisches Modell von wechselwirkenden Fermionen noch keine physikalische Bedeutung hat, es sich also um ein reines Modell-System handelt.

Für  $u_n$  und  $v_m$  werden nun nicht mehr alle Elemente aus  $\mathbb{Z}$  zugelassen, sondern noch folgende Einschränkung gemacht

$$u_n, v_m \in \mathbb{Z} \quad \wedge \quad u_n \geq 0, \quad v_m \leq 0.$$

Also gelten für die Quantenzahlen die neuen Bedingungen

$$u_n, -v_m \in \mathbb{N},$$

wodurch die Gesamtquantenzahl immer positiv ist und jeder Energieeigenwert  $E_a$  endlichfach entartet bleibt.

$$\Rightarrow E_a \geq 0 \quad \text{mit } a \geq 0 \quad (6.3)$$

Es soll nun im trunkierten Luttinger-Modell für ein System mit einem Teilchen von jeder Sorte ein Beispiel für die Entartung gezeigt werden.

*Beispiel:*  $N = 1, M = 1$

$a$	$E_a$	mögliche Kombinationen von $\{u, v\}$	$g_a$
0	0	$\{0, 0\}$	1
1	$\frac{2\pi}{L}$	$\{1, 0\}, \{0, -1\}$	2
2	$\frac{4\pi}{L}$	$\{2, 0\}, \{1, -1\}, \{0, -2\}$	3
3	$\frac{6\pi}{L}$	$\{3, 0\}, \{2, -1\}, \{1, -2\}, \{0, -3\}$	4
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$

$$\Rightarrow g_a = a + 1$$

Für alle Teilchenzahlen  $N, M$  bleiben die Energieeigenwerte  $E_a$  endlichfach entartet. Jedoch ist für höhere  $N$  und  $M$  die Folge der Entartungsfaktoren  $g_a$  nicht einfach, so daß sich die Zustandssumme (6.2) nur schwer mit Hilfe der Entartungsfaktoren berechnen läßt. Es ist einfacher über die Quantenzahlen zu summieren, um so die Zustandssumme zu berechnen.

### 6.3. Thermodynamische Zustandsgrößen des trunkierten Luttinger-Modells

Aus den kanonischen Zustandssummen für die verschiedenen Systeme lassen sich leicht andere thermodynamische Zustandsgrößen wie Innere Energie  $U$ , Freie Energie  $F$ , Entropie  $S$  und spezifische Wärme  $C_V$  bestimmen. Die thermodynamischen Größen sollen für

jeweils ein System mit einer Teilchensorte und ein System mit beiden Teilchensorten gerechnet werden. Mit der kanonischen Zustandssumme  $Z(\beta)$  sind die Zustandsgrößen durch

$$\begin{aligned} U(\beta) &= -\frac{\partial}{\partial\beta} \ln Z(\beta) \\ F(\beta) &= -\frac{1}{\beta} \ln Z(\beta) \\ S(\beta) &= k_B \beta^2 \frac{\partial F(\beta)}{\partial\beta} = -k_B \beta^2 \frac{\partial}{\partial\beta} \left[ \frac{1}{\beta} \ln Z(\beta) \right] \\ C_V(\beta) &= -k_B \beta^2 \frac{\partial U(\beta)}{\partial\beta} = k_B \beta^2 \frac{\partial^2}{\partial\beta^2} \ln Z(\beta). \end{aligned}$$

definiert.

### 6.3.1. Zustandssumme für ein System mit Fermionen der Sorte 1

Es wird nun schrittweise der Weg zur Berechnung der Zustandssumme im kanonischen Ensemble für das trunkierte Luttinger-Modell aufgezeigt. Zunächst wird dazu die Zustandssumme für ein System mit Teilchen der Sorte 1 für verschiedene Teilchenzahlen berechnet, um so eine Lösung für beliebige Teilchenzahlen  $N$  zu finden.

$N=1$

$$\begin{aligned} E = E_1 u_1 \quad \Rightarrow \quad Z(\beta) &= \sum_{u_1=0}^{\infty} e^{-\beta E_1 u_1} = \frac{1}{1-q} \quad (6.4) \\ \text{mit } q &= e^{-\beta E_1} \end{aligned}$$

In Gleichung (6.4) wurde der Grenzwert der geometrischen Reihe

$$\sum_{n=N}^{\infty} q^n = \sum_{m=0}^{\infty} q^{N+m} = \frac{q^N}{1-q} \quad \text{für } |q| < 1 \quad (6.5)$$

verwendet. Die geometrische Reihe konvergiert, wenn die Bedingung  $|q| < 1$  erfüllt ist. In diesem Fall ist immer Konvergenz gegeben, da  $E_1$  und  $\beta = (k_B T)^{-1}$  immer positiv sind und somit die Bedingung  $|\exp(-\beta E_1)| < 1$  immer erfüllt ist.

Diese Zustandssumme ist zu der des quantenmechanischen harmonischen Oszillators in einer Dimension

$$Z_{HO}(\beta) = \sum_{u_1=0}^{\infty} e^{-\beta \hbar \omega (u_1 + \frac{1}{2})}$$

ähnlich. Sie unterscheiden sich nur in der von Null verschiedenen Grundzustandsenergie des harmonischen Oszillators. Beide Systeme haben aber ein äquidistantes Energiespektrum.

$N=2$

$$E = E_1(u_1 + u_2) \quad \Rightarrow \quad Z(\beta) = \frac{1}{2} \sum_{\substack{u_1, u_2=0 \\ u_1 \neq u_2}}^{\infty} e^{-\beta E_1(u_1+u_2)}$$

$u_1, u_2$  sind Quantenzahlen für zwei Fermionen der gleichen Sorte, daher muß für  $u_1$  und  $u_2$  über alle möglichen Quantenzustände summiert werden ( $u_1 = 0, \dots, \infty; u_2 = 0, \dots, \infty$ ), jedoch dürfen die beiden Fermionen nicht den gleichen Zustand annehmen ( $u_1 \neq u_2$ )! Der Faktor  $1/2$  resultiert aus der Ununterscheidbarkeit der Teilchen.

Äquivalente Darstellung:

$$Z(\beta) = \sum_{u_1 < u_2}^{\infty} e^{-\beta E_1(u_1+u_2)}.$$

Sei nun  $u_{12}$  der Abstand der Quantenzahlen  $u_1$  und  $u_2$ , so läßt sich  $u_2$  durch  $u_1$  und  $u_{12}$  ausdrücken

$$u_{12} = u_2 - u_1 \quad \Leftrightarrow \quad u_2 = u_1 + u_{12}$$

und damit die Zustandssumme

$$\begin{aligned} \Rightarrow \quad Z(\beta) &= \sum_{u_1 < (u_1+u_{12})}^{\infty} e^{-\beta E_1(u_1+u_1+u_{12})} \\ &= \sum_{u_1 < (u_1+u_{12})}^{\infty} e^{-\beta E_1(2u_1+u_{12})} \\ &= \sum_{u_1=0}^{\infty} \sum_{u_{12}=1}^{\infty} e^{-\beta E_1 2u_1} e^{-\beta E_1 u_{12}} \end{aligned} \quad (6.6)$$

$$= \frac{1}{1 - e^{-2\beta E_1}} \frac{e^{-\beta E_1}}{1 - e^{-\beta E_1}} = \frac{1}{1 - q^2} \frac{q}{1 - q} \quad (6.7)$$

berechnen. In Gleichung (6.6) ist  $u_{12} = 0$  durch das Pauli-Prinzip ausgeschlossen, da hierfür  $u_1$  und  $u_2$  gleich wären.

$N=3$

$$Z(\beta) = \sum_{u_1 < u_2 < u_3} e^{-\beta E_1(u_1+u_2+u_3)}$$

Wieder mit

$$\begin{aligned} u_{12} = u_2 - u_1 & \Leftrightarrow u_2 = u_1 + u_{12} \\ u_{23} = u_3 - u_2 & \Leftrightarrow u_3 = u_2 + u_{23} = u_1 + u_{12} + u_{23} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \Rightarrow Z(\beta) &= \sum_{u_1=0}^{\infty} \sum_{u_{12}=1}^{\infty} \sum_{u_{23}=1}^{\infty} e^{-\beta E_1 (u_1 + u_1 + u_{12} + u_1 + u_{12} + u_{23})} \\ &= \sum_{u_1=0}^{\infty} \sum_{u_{12}=1}^{\infty} \sum_{u_{23}=1}^{\infty} e^{-\beta E_1 (3u_1 + 2u_{12} + u_{23})} \\ &= \sum_{u_1=0}^{\infty} \sum_{u_{12}=1}^{\infty} \sum_{u_{23}=1}^{\infty} e^{-\beta E_1 3u_1} e^{-\beta E_1 2u_{12}} e^{-\beta E_1 u_{23}} \\ &\quad \text{mit Gleichung (6.5)} \\ &= \frac{1}{1 - e^{-3\beta E_1}} \frac{e^{-2\beta E_1}}{1 - e^{-2\beta E_1}} \frac{e^{-\beta E_1}}{1 - e^{-\beta E_1}} \\ &= \frac{1}{1 - q^3} \frac{q^2}{1 - q^2} \frac{q}{1 - q} \end{aligned}$$

Diese Beispiele dienen zur Veranschaulichung der Rechenmethode. Nun soll die Rechnung für beliebige Teilchenzahlen  $N$  durchgeführt werden, um somit eine allgemeingültige Formel für die kanonische Zustandssumme des trunkierten Luttinger-Modells zu haben.

Mit beliebiger Teilchenzahl  $N$  gilt für die Gesamtenergie

$$E = E_1(u_1 + u_2 + \dots + u_N) = E_1 \sum_{n=1}^N u_n,$$

und für die kanonische Zustandssumme

$$\begin{aligned} Z(\beta) &= \sum_{u_1 < u_2 < \dots < u_N}^{\infty} \exp \left( -\beta E_1 \sum_{n=1}^N u_n \right) \\ &= \sum_{u_1 < u_2 < \dots < u_N}^{\infty} \prod_{n=1}^N e^{-\beta E_1 u_n} \end{aligned}$$



mit

$$\begin{aligned}
u_2 &= u_1 + u_{12} \\
u_3 &= u_1 + u_{12} + u_{23} \\
u_4 &= u_1 + u_{12} + u_{23} + u_{34} \\
&\vdots \\
u_n &= u_1 + \sum_{l=2}^n u_{l-1,l}.
\end{aligned} \tag{6.8}$$

$$\begin{aligned}
\Rightarrow Z(\beta) &= \sum_{u_1=0}^{\infty} \sum_{u_{12}=1}^{\infty} \cdots \sum_{u_{N-1N}=1}^{\infty} \prod_{n=1}^N \exp \left\{ -\beta E_1 \left( u_1 + \sum_{l=2}^n u_{l-1,l} \right) \right\} \\
&= \sum_{u_1=0}^{\infty} \sum_{u_{12}=1}^{\infty} \cdots \sum_{u_{N-1N}=1}^{\infty} \prod_{n=1}^N e^{-\beta E_1 u_1} \left( \prod_{l=2}^n e^{-\beta E_1 u_{l-1,l}} \right) \\
&= \sum_{u_1=0}^{\infty} \sum_{u_{12}=1}^{\infty} \cdots \sum_{u_{N-1N}=1}^{\infty} e^{-\beta E_1 N u_1} \prod_{n=2}^N e^{-\beta E_1 (N+1-n) u_{n-1n}} \\
&= \frac{1}{1 - e^{-\beta E_1 N}} \sum_{u_{12}=1}^{\infty} \cdots \sum_{u_{N-1N}=1}^{\infty} \prod_{n=2}^N e^{-\beta E_1 (N+1-n) u_{n-1n}} \\
&= \frac{1}{1 - e^{-\beta E_1 N}} \sum_{u_{12}=1}^{\infty} \cdots \sum_{u_{N-1N}=1}^{\infty} e^{-\beta E_1 (N-1) u_{12}} \prod_{n=3}^N e^{-\beta E_1 (N+1-n) u_{n-1n}} \\
&= \frac{1}{1 - e^{-\beta E_1 N}} \frac{e^{-\beta E_1 (N-1)}}{1 - e^{-\beta E_1 (N-1)}} \sum_{u_{23}=1}^{\infty} \cdots \sum_{u_{N-1N}=1}^{\infty} \prod_{n=3}^N e^{-\beta E_1 (N+1-n) u_{n-1n}} \\
&= \frac{1}{1 - e^{-\beta E_1 N}} \prod_{n=1}^{N-1} \frac{e^{-\beta E_1 (N-n)}}{1 - e^{-\beta E_1 (N-n)}} \\
&= \frac{1}{1 - e^{-\beta E_1 N}} \prod_{n=1}^{N-1} \frac{e^{-\beta E_1 n}}{1 - e^{-\beta E_1 n}} \\
&= \frac{1}{1 - q^N} \prod_{n=1}^{N-1} \frac{q^n}{1 - q^n}
\end{aligned} \tag{6.9}$$

und der Vereinfachung

$$\prod_{n=1}^{N-1} q^n = q^{\sum_{n=1}^{N-1} n} = q^{\frac{N(N-1)}{2}}$$

wird dies zu

$$\Rightarrow Z_N(\beta) = \frac{1}{1 - q^N} \frac{q^{\frac{N(N-1)}{2}}}{\prod_{n=1}^{N-1} (1 - q^n)} = \frac{q^{\frac{N(N-1)}{2}}}{\prod_{n=1}^N (1 - q^n)}. \quad (6.10)$$

Die kanonische Zustandssumme für den eindimensionalen harmonischen Oszillator mit  $N$  Fermionen wird in [21] mit

$$Z_N^{HO}(\beta) = \frac{e^{-\beta E_0(N)}}{\prod_{n=1}^N (1 - e^{-n\beta\hbar\omega})}$$

mit  $E_0(N) = N^2 \frac{\hbar\omega}{2}$

angegeben. Die hier berechnete kanonische Zustandssumme unterscheidet sich nur in der Grundzustandsenergie  $E_0(N)$ . Es ist also eine Ähnlichkeit zum eindimensionalen harmonischen Oszillator mit Fermionen gegeben, aber ist in der Abhängigkeit von der Teilchenzahl ein Unterschied im Verhalten der beiden Systeme vorhanden. Die Energie des Grundzustandes im betrachteten System ist also

$$E_0(N) = E_1 \frac{N(N-1)}{2}.$$

### 6.3.2. Zustandssumme für ein System mit Fermionen der Sorte 2

Für die kanonische Zustandssumme des Gesamtsystems des trunkierten Luttinger-Modells muß nun noch die Zustandssumme für das Teilsystem mit Fermionen der Sorte 2 bestimmt werden. Die Berechnung ist analog zum Teilsystem mit Fermionen der Sorte 1, nur die Vorzeichenunterschiede in den Energieeigenwerten müssen berücksichtigt werden. Sie sind in dem Teilsystem mit Fermionen der Sorte 2 durch

$$E = -E_1 \sum_{m=1}^M v_m \quad \text{mit} \quad -v_m \in \mathbb{N}.$$

gegeben. Da für diese Quantenzahlen jedoch nur negative Zahlen erlaubt sind, erfolgt die Summation wie bei Fermionen der Sorte 1.

Für die Zustandssumme des Einteilchensystems folgt daher

$M=1$

$$E = -E_1 v_1 \quad \Rightarrow \quad Z(\beta) = \sum_{v_1=0}^{\infty} e^{-\beta E_1 v_1} = \frac{1}{1 - q}.$$

Mit beliebiger Teilchenzahl  $M$  gilt für die Gesamtenergie

$$E = -E_1 \sum_{m=1}^M v_m \quad \text{mit} \quad -v_m \in \mathbb{N}.$$

$$\Rightarrow Z(\beta) = \sum_{v_1 < v_2 < \dots < v_M = 0}^{\infty} \exp\left(-\beta E_1 \sum_{m=1}^M v_m\right)$$

Die weitere Rechnung ist analog zur Rechnung für Teilchen der Sorte 1.

$$\Rightarrow Z_M(\beta) = \frac{e^{-\beta E_1 \frac{M(M-1)}{2}}}{\prod_{m=1}^M (1 - e^{-\beta E_1 m})} = \frac{q^{M(M-1)/2}}{\prod_{m=1}^M (1 - q^m)}.$$

### 6.3.3. Zustandssumme für ein System mit beiden Fermionensorten

Die Zustandssumme des Gesamtsystems, in dem beide Teilchensorten vorkommen ist einfach das Produkt der Zustandssummen der beiden Teilsysteme, in dem nur jeweils eine Teilchensorte vorhanden ist. Dies folgt zum einen aus der Unterscheidbarkeit der beiden Teilchensorten und zum anderen aus der Unabhängigkeit der Energieeigenwerte des Systems von der Wechselwirkung zwischen den Teilchen. Thermodynamisch sind die beiden Teilsysteme voneinander unabhängig.

$$\begin{aligned} \Rightarrow Z_{NM}(\beta) &= Z(\beta) = Z_N(\beta) Z_M(\beta) \\ &= \frac{e^{-\beta E_1 \frac{N(N-1)}{2}}}{\prod_{n=1}^N (1 - e^{-\beta E_1 n})} \frac{e^{-\beta E_1 \frac{M(M-1)}{2}}}{\prod_{m=1}^M (1 - e^{-\beta E_1 m})} \\ &= \frac{q^{N(N-1)/2}}{\prod_{n=1}^N (1 - q^n)} \frac{q^{M(M-1)/2}}{\prod_{m=1}^M (1 - q^m)} \end{aligned} \quad (6.11)$$

Die Grundzustandsenergie des Systems ist mit

$$E_0(N, M) = E_1 \left( \frac{N(N-1)}{2} + \frac{M(M-1)}{2} \right) \quad (6.12)$$

gegeben.

In Abbildung 10 sind die Zustandssummen für Systeme mit unterschiedlichen Teilchenzahlen graphisch dargestellt. Deutlich ist zu sehen, daß mit steigender Gesamtteilchenzahl  $G = N + M$  die Kurven der Zustandssummen immer steiler werden.

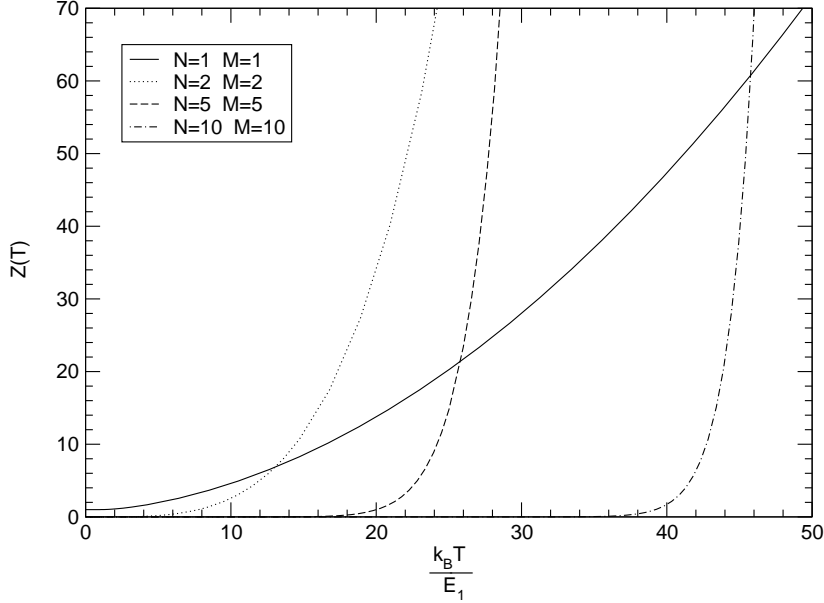


Abbildung 10: Zustandssumme  $Z(T)$  für unterschiedliche Gesamtteilchenzahlen  $G$ .

#### 6.3.4. Zustandssumme für ein System mit idealen Bosonen und Fermionen

Wie die kanonische Zustandssumme für ein System mit  $N$  idealen Fermionen aussieht wurde bereits in Abschnitt 6.3.1 gezeigt

$$Z_N^-(\beta) = \frac{q^{\frac{N(N-1)}{2}}}{N \prod_{n=1}^N (1 - q^n)} \quad (6.13)$$

mit der Grundzustandsenergie  $E_0(N) = E_1 \frac{N(N-1)}{2}$ . Als weitere Vergleichsmöglichkeit soll nun noch die kanonische Zustandssumme  $Z_N^+(\beta)$  für ein System von  $N$  idealen Bosonen berechnet werden. Dabei kann die Methode zur Berechnung der Fermionen übernommen werden, es ändern sich lediglich die Summationsindizes. Mit Gleichung (6.9) ergibt sich für ein ideales bosonisches System

$$\begin{aligned} Z_N^+(\beta) &= \sum_{u_1=0}^{\infty} \sum_{u_{12}=0}^{\infty} \dots \sum_{u_{N-1N}=0}^{\infty} \prod_{n=1}^N \exp \left\{ -\beta E_1 \left( u_1 + \sum_{l=2}^n u_{l-1,l} \right) \right\} \\ &= \prod_{n=1}^N \frac{1}{1 - q^n} \quad \text{mit } q = e^{-\beta E_1}. \end{aligned} \quad (6.14)$$

In diesem System gibt es nur eine Sorte von idealen Bosonen. Die Grundzustandsenergie dieses Systems ist  $E_0(N) = 0$ , da sich beliebig viele Bosonen im Einteilchengrundzustand aufhalten können. In den weiteren Abschnitten sollen einige thermodynamische Zustandsgrößen des trunkierten Luttinger-Modells mit Fermionen von zwei Sorten mit den entsprechenden Größen eines Systems mit idealen Bosonen und idealen Fermionen verglichen werden. Wenn ein System von  $N$  Pseudobosonen mit  $N$  idealen Bosonen verglichen werden soll, so muß in der Zustandssumme (6.14) die Ersetzung  $E_1 \rightarrow 2E_1$  vorgenommen werden, da ein Pseudoboson aus zwei Fermionen besteht und sich damit auch die Einteilchenenergien verdoppeln.

### 6.3.5. Innere Energie

Es soll nun die Innere Energie  $U(\beta)$  für beide Systeme berechnet werden. Zunächst für ein System mit Teilchen der Sorte 1. Dazu wird die Zustandssumme (6.10) verwendet.

$$\begin{aligned}
 U_N(\beta) &= -\frac{\partial}{\partial\beta} \ln Z_N(\beta) = -\frac{\partial}{\partial\beta} \ln \left( \frac{q^{\frac{N(N-1)}{2}}}{\prod_{n=1}^N (1-q^n)} \right) \\
 &= -\frac{\partial}{\partial\beta} \left[ \ln \left( q^{\frac{N(N-1)}{2}} \right) - \ln \left( \prod_{n=1}^N (1-q^n) \right) \right] \\
 &= -\frac{\partial}{\partial\beta} \left[ \ln \left( q^{\frac{N(N-1)}{2}} \right) - \sum_{n=1}^N \ln (1-q^n) \right] \\
 &= \left( \frac{N(N-1)}{2} + \sum_{n=1}^N \frac{nq^n}{1-q^n} \right) E_1
 \end{aligned}$$

Für das System mit beiden Teilchensorten ergibt sich aus dieser Rechnung

$$\begin{aligned}
 U(\beta) &= U_{NM}(\beta) = -\frac{\partial}{\partial\beta} \ln Z(\beta) = -\frac{\partial}{\partial\beta} \ln [Z_N(\beta)Z_M(\beta)] \\
 &= -\frac{\partial}{\partial\beta} [\ln Z_N(\beta) + \ln Z_M(\beta)] \\
 &= \left( \frac{N(N-1)}{2} + \frac{M(M-1)}{2} + \sum_{n=1}^N \frac{nq^n}{1-q^n} + \sum_{m=1}^M \frac{mq^m}{1-q^m} \right) E_1 \quad (6.15)
 \end{aligned}$$

$$= U_N(\beta) + U_M(\beta). \quad (6.16)$$

Die Innere Energie ist in Abbildung 11 graphisch für verschiedene Teilchenzahlen dargestellt. Hier wurden extensive Größen wie innere Energie, freie Energie, spezifische Wärme

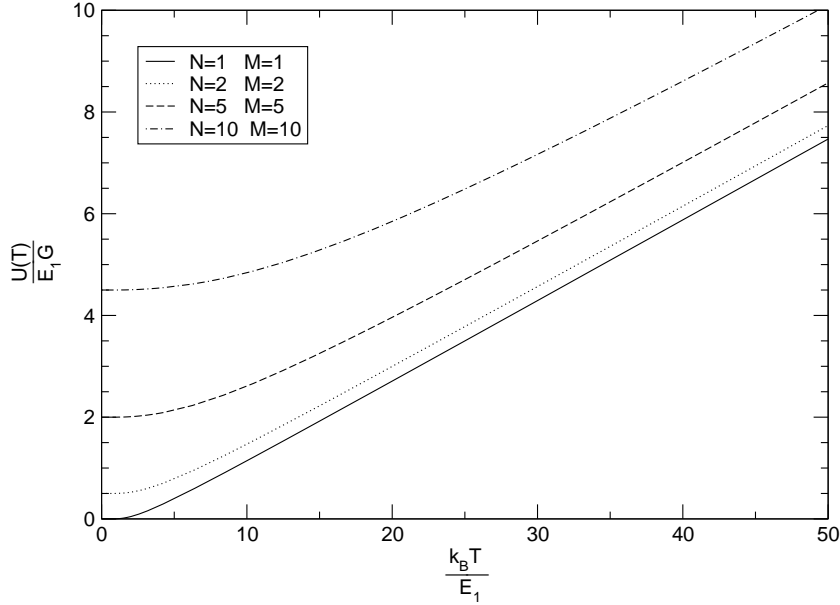
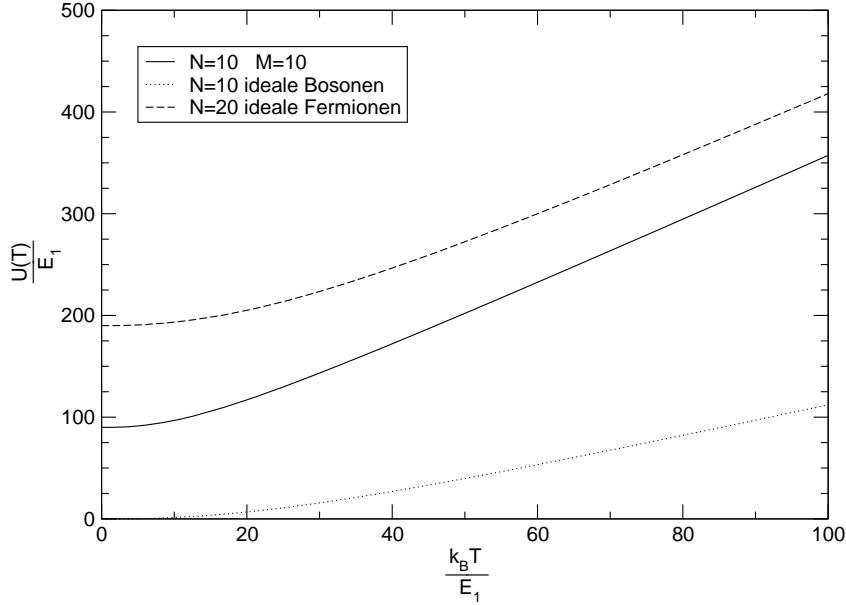


Abbildung 11: Innere Energie  $U(T)$  für unterschiedliche Gesamtteilchenzahlen  $G$ .

und Entropie auf die Gesamtteilchenzahl  $G$  skaliert aufgetragen. Man sieht deutlich den Anstieg der Grundzustandsenergie mit der Gesamtteilchenzahl.

In Abbildung 12 wurde die Innere Energie für die verschiedenen Systeme dargestellt. Die inneren Energien für die  $N = 10$  idealen Bosonen und  $N = 20$  idealen Fermionen wurden aus den Zustandssummen (6.14) bzw. (6.13) berechnet. Für die Zustandssumme der idealen Bosonen wurde die Ersetzung  $E_1 \rightarrow 2E_1$  vorgenommen. Die Kurve des trunkierten Luttinger-Modells befindet sich in der Mitte. Sie hat für hohe Temperaturen die gleiche Steigung, wie die für die idealen Fermionen. Ansonsten sind keine Übereinstimmungen festzustellen.

Abbildung 12: Innere Energie  $U(T)$  für unterschiedliche Systeme.

### 6.3.6. Freie Energie

Ebenso wird die freie Energie für beide Teilsysteme berechnet.

$$\begin{aligned}
 F_N(\beta) &= -\frac{1}{\beta} \ln Z_N(\beta) \\
 &= -\frac{1}{\beta} \ln \left( \frac{q^{\frac{N(N-1)}{2}}}{\prod_{n=1}^N (1 - q^n)} \right) \\
 &= -\frac{1}{\beta} \left( \ln q^{\frac{N(N-1)}{2}} - \ln \prod_{n=1}^N (1 - q^n) \right) \\
 &= -\frac{1}{\beta} \left( \frac{N(N-1)}{2} \ln q - \sum_{n=1}^N \ln(1 - q^n) \right) \\
 &= \frac{N(N-1)}{2} E_1 + \frac{1}{\beta} \sum_{n=1}^N \ln(1 - q^n)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
F(\beta) &= F_{NM}(\beta) = -\frac{1}{\beta} [\ln Z_N(\beta) + \ln Z_M(\beta)] \\
&= \left( \frac{N(N-1)}{2} + \frac{M(M-1)}{2} \right) E_1 + \frac{1}{\beta} \left[ \sum_{n=1}^N \ln(1-q^n) + \sum_{m=1}^M \ln(1-q^m) \right] \\
&= F_N(\beta) + F_M(\beta)
\end{aligned} \tag{6.17}$$

Auch hier ist deutlich die steigende Grundzustandsenergie  $E_0(N, M)$  mit steigender Ge-

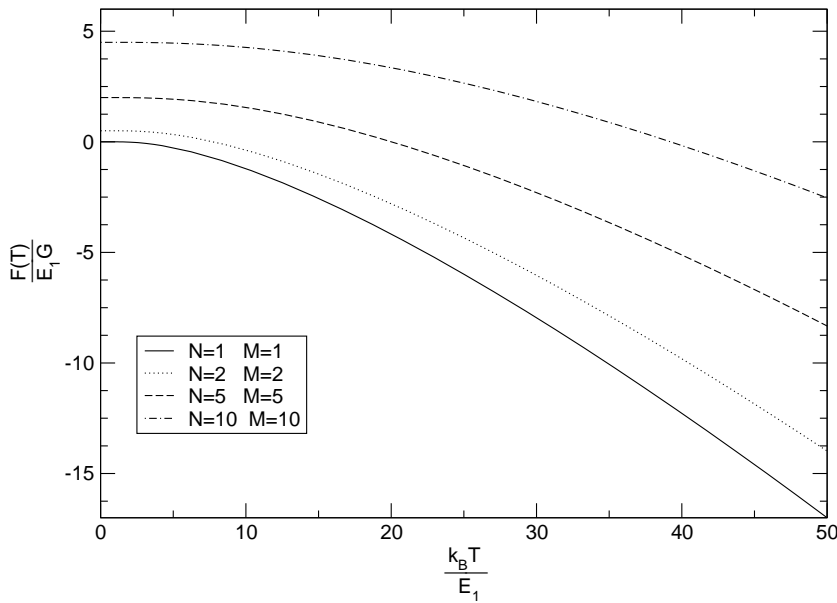


Abbildung 13: Freie Energie  $F(T)$  für unterschiedliche Gesamtteilchenzahlen  $G$ .

samtteilchenzahl zu erkennen. Für die freie Energie werden die Kurven für steigende Teilchenzahlen deutlich flacher.

### 6.3.7. Spezifische Wärme

Eine besonders für die Klassifizierung von Phasenübergängen signifikante Zustandsgröße ist die spezifische Wärme. Sie gibt an, wieviel Energie einem System zugeführt werden muß um die Temperatur um einen bestimmten Wert zu ändern.

$$C_V(T) = \frac{\partial U(T)}{\partial T}$$



In idealisierten Systemen sind Phasenübergänge durch Unstetigkeiten und Singularitäten im Graphen der spezifischen Wärme zu erkennen. In realen Systemen treten diese Merkmale nicht so deutlich auf, sind dann aber im thermodynamischen Limes zu erkennen.

$$\begin{aligned}
C_{V,N}(\beta) &= -k_B\beta^2 \frac{\partial U_N(\beta)}{\partial \beta} \\
&= -k_B\beta^2 \frac{\partial}{\partial \beta} \left( \frac{N(N-1)}{2} E_1 + \sum_{n=1}^N \frac{nq^n}{1-q^n} E_1 \right) \\
&= -k_B\beta^2 E_1 \sum_{n=1}^N \frac{\partial}{\partial \beta} \frac{nq^n}{1-q^n} \\
&= -k_B\beta^2 E_1^2 \sum_{n=1}^N \frac{-n^2 q^n (1-q^n) - n^2 q^{2n}}{(1-q^n)^2} \\
&= -k_B\beta^2 E_1^2 \sum_{n=1}^N \frac{-n^2 q^n + n^2 q^{2n} - n^2 q^{2n}}{(1-q^n)^2} \\
&= k_B\beta^2 E_1^2 \sum_{n=1}^N \frac{n^2 q^n}{(1-q^n)^2}
\end{aligned}$$

Mit Gleichung (6.16) ergibt sich hieraus für das System mit beiden Teilchensorten

$$\begin{aligned}
C_V(\beta) &= C_{V,NM}(\beta) = -k_B\beta^2 \left( \frac{\partial U_N(\beta)}{\partial \beta} + \frac{\partial U_M(\beta)}{\partial \beta} \right) \\
&= C_{V,N}(\beta) + C_{V,M}(\beta) \\
&= k_B\beta^2 E_1^2 \left( \sum_{n=1}^N \frac{n^2 q^n}{(1-q^n)^2} + \sum_{m=1}^M \frac{m^2 q^m}{(1-q^m)^2} \right). \tag{6.18}
\end{aligned}$$

In Abbildung 14 sind die spezifischen Wärmen von Systemen des trunkierten Luttinger-Modells mit beiden Fermionensorten dargestellt. Man sieht deutlich, daß die Kurve der spezifischen Wärme für größere Gesamtteilchenzahlen flacher wird und sich erst bei deutlich höheren Temperaturen dem Hochtemperaturlimes

$$\lim_{T \rightarrow \infty} C_V(T) = k_B G$$

annähert. Die Form der Kurve ist mit denen von idealen Quantengasen im harmonischen Oszillator in einer Dimension identisch. Hinweise auf einen Phasenübergang sind nicht gegeben. Dieses war von vornherein zu erwarten, da die Bose-Einstein-Kondensation in einer Dimension nicht vorkommt und auch keine Bindungen zwischen den Fermionen bestehen, die aufbrechen könnten. Würden Bindungen bestehen, so hätten diese auch keine Auswirkungen auf die thermodynamischen Zustandsgrößen, da sie keine Auswirkungen auf die Energieeigenwerte des Systems haben.

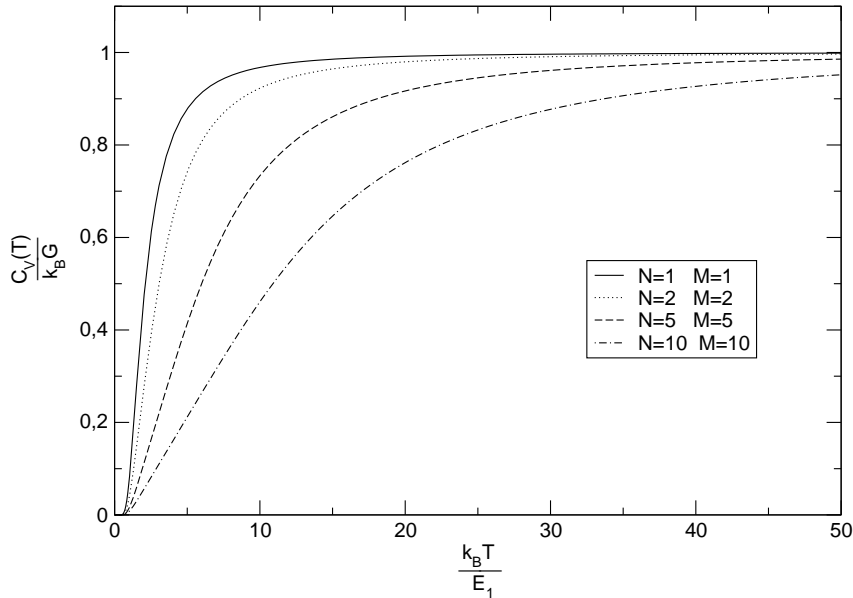


Abbildung 14: Spezifische Wärme  $C_V$  für unterschiedliche Gesamtteilchenzahlen  $G$ .

Bleibt noch die spezifische Wärme mit denen der idealen Quantengase zu vergleichen. In Abbildung 15 sind die spezifischen Wärmen des Systems des trunkierten Luttinger-Modells mit den Teilchenzahlen  $N = 10$  und  $M = 10$ , des trunkierten Luttinger-Modells mit  $N = 10$  idealen Bosonen und  $N = 20$  idealen Fermionen dargestellt. Man sieht deutlich, daß der Graph des Systems mit zwei Teilchensorten mit keiner der Graphen der idealen Quantengase übereinstimmt, oder sich auch nur streckenweise annähert. Die einzige Gemeinsamkeit liegt darin, daß die spezifische Wärme des Systems mit beiden Teilchensorten den gleichen Hochtemperaturlimes, wie die des Systems mit  $N = 20$  Fermionen hat.

### 6.3.8. Entropie

Genauso wie die spezifische Wärme ist die Entropie eines Systems für die Klassifizierung von Phasenübergängen geeignet. Phasenübergänge sind hier an Unstetigkeiten bzw. an nicht differenzierbaren Stellen in dem Graphen der Entropie zu erkennen. Die Entropie eines Systems ist proportional zum Logarithmus der Anzahl der Mikrozustände, die zu dem gleichen Makrozustand führen. Aus der kanonischen Zustandssumme berechnet sich

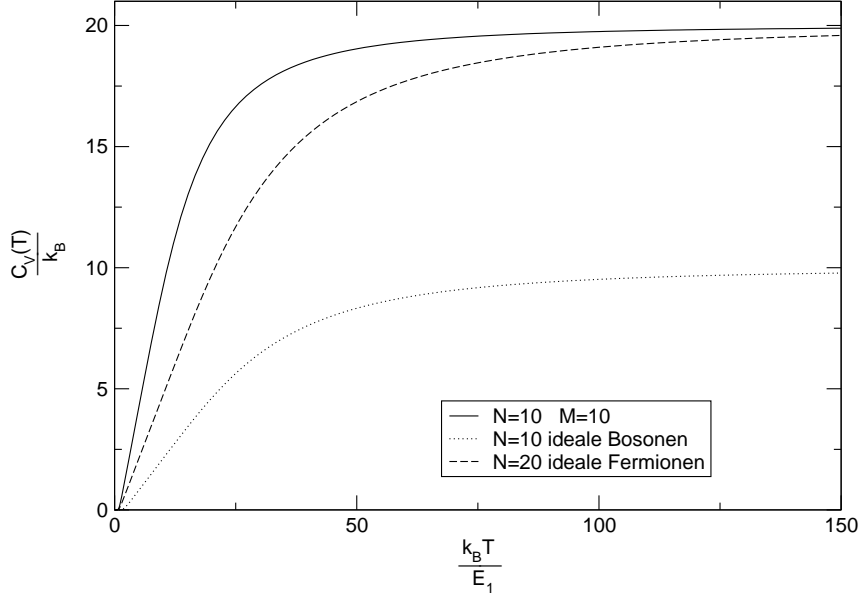


Abbildung 15: Spezifische Wärme  $C_V$  im Vergleich für unterschiedliche Systeme.

die Entropie wie folgt.

$$\begin{aligned}
 S_N(\beta) &= k_B \beta^2 \frac{\partial F_N(\beta)}{\partial \beta} = -k_B \beta^2 \frac{\partial}{\partial \beta} \left( \frac{1}{\beta} \ln Z_N(\beta) \right) \\
 &= -k_B \beta^2 \left( -\frac{1}{\beta^2} \ln Z_n(\beta) + \frac{1}{\beta} \frac{\partial}{\partial \beta} \ln Z_N(\beta) \right) \\
 &= k_B \beta (U_N(\beta) - F_N(\beta))
 \end{aligned}$$

$$\Rightarrow S(\beta) = S_{NM}(\beta) = k\beta (U(\beta) - F(\beta)) \quad (6.19)$$

In Abbildung 16 ist die Entropie des trunkierten Luttinger-Modells mit zwei Teilchensorten für verschiedene Gesamtteilchenzahlen  $G$  dargestellt. Die Graphen flachen wieder mit steigender Gesamtteilchenzahl ab. Es ist auch hier kein Anzeichen für einen Phasenübergang zu sehen. In Abbildung 17 ist die Entropie für das trunkierte Luttinger-Modell mit zwei Teilchensorten, mit  $N = 10$  idealen Bosonen und  $N = 20$  idealen Fermionen dargestellt. Auch hier steigt der Graph der Entropie des Systems mit zwei Teilchensorten stärker an, als die beiden anderen idealen Quantengase. Es ist weder eine Übereinstimmung, noch ein Übergang vom Verhalten des einen zu dem des anderen Systems zu erkennen.

In den vorangegangenen Abschnitten war zu sehen, daß sich für das Gesamtsystem mit

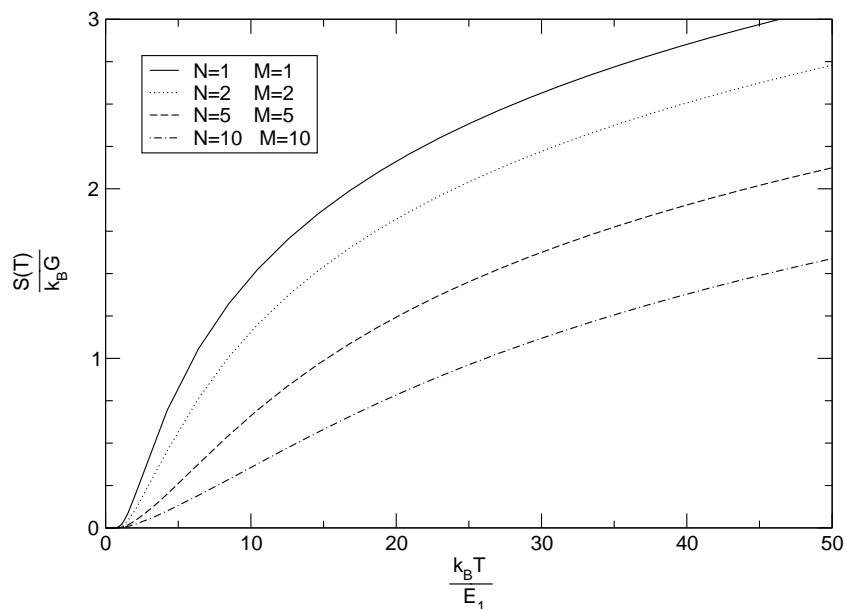
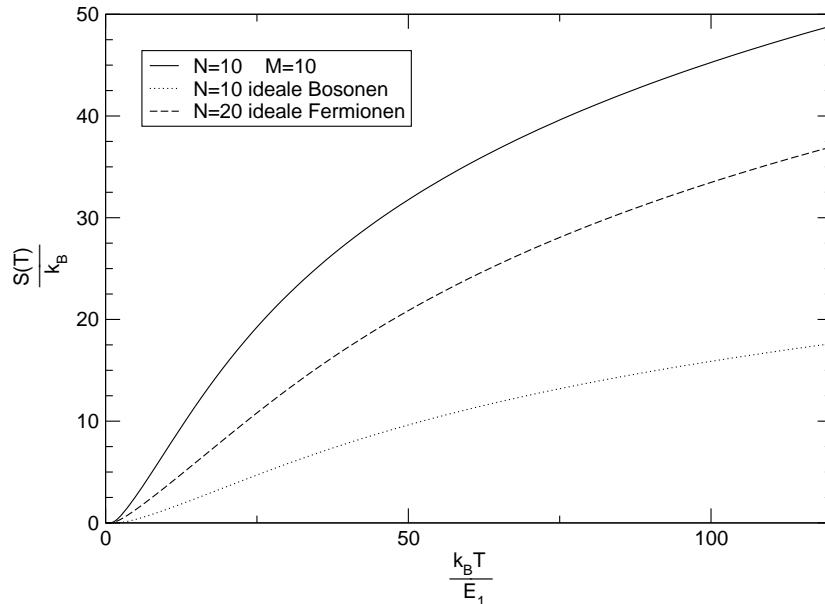


Abbildung 16: Entropie  $S(T)$  für unterschiedliche Gesamtteilchenzahlen  $G$ .

zwei Teilchensorten die extensiven Zustandsgrößen der unterscheidbaren Teilsysteme wie erwartet addieren (6.15)(6.17)(6.18)(6.19). Die charakteristischen Merkmale der Kurven, wie z.B. mögliche Hinweise auf Phasenübergänge, oder das Übergehen vom Verhalten eines idealen bosonischen Systems zu einem idealen fermionischen, ändern sich also durch das Zusammenbringen der Teilsysteme nicht.

Abbildung 17: Entropie  $S(T)$  für unterschiedliche Systeme.

## 7. Fazit Luttinger-Modell

In diesem Teil wurde untersucht, ob sich das Luttinger-Modell zur Beschreibung von Pseudobosonen eignet, also ob dieses System, das nur aus Fermionen zweier unterscheidbarer Teilchensorten besteht, das Verhalten eines Systems mit Bosonen zeigt. Dazu wurde in Kapitel 4 die Lösung der Schrödingergleichung für dieses System ermittelt. In Kapitel 5 über quantenmechanische Größen wurde ein Wechselwirkungspotential für das System festgelegt und hierfür Korrelationsfunktionen und Teilchendichten berechnet. Dabei wurde lediglich eine repulsive Wechselbeziehung zwischen den Impulsen der Teilchen festgestellt, zwischen den Ortskoordinaten der Teilchen bestand keine Korrelation. Mit anderen Wechselwirkungspotentialen wurden keine anderen Ergebnisse erzielt. In den Teilchendichten konnte im Impulsraum keine Paarbildung der Fermionen beobachtet werden. In Kapitel 6 wurde zunächst das trunkierte Luttinger-Modell eingeführt, da mit dem ursprünglichen Luttinger-Modell keine Thermodynamik möglich ist. Die Zustandsgrößen entsprechen in ihren Charakteristika denen des eindimensionalen harmonischen Oszillators mit Fermionen zweier Sorten. Da die Wechselwirkung zwischen den Teilchen keinen Einfluß auf die Energieeigenwerte hat, spielt sie auch für die Thermodynamik des Systems keine Rolle. So konnte mit den verschiedenen Ansätzen für das Luttinger-Modell nicht erreicht werden, daß die Systeme das Verhalten eines Systems mit Pseudobosonen zeigen.

Das Luttinger-Modell eignet sich also nicht zur Beschreibung von Pseudobosonen, obwohl es sich um ein exakt lösbares Modell von wechselwirkenden Fermionen zweier Teilchensorten handelt. Im nächsten Teil dieser Arbeit soll unter Berücksichtigung der Erfahrungen mit dem Luttinger-Modell ein Modell von Fermionen mit Wechselwirkung konstruiert werden, das ein System von Pseudobosonen besser beschreibt. Dabei soll das Augenmerk stärker auf die Thermodynamik des Systems gelegt werden.

## IV.

# Fermionen im eindimensionalen harmonischen Oszillator mit Wechselwirkung

Das Modell von wechselwirkenden Fermionen im eindimensionalen harmonischen Oszillator wird in Anlehnung an das Luttinger-Modell mit Rücksicht auf die gemachten Erfahrungen entworfen. In der Thermodynamik des Luttinger-Modells wurden die gewünschten Effekte nicht beobachtet, da die Wechselwirkung zwischen den Teilchen nicht zu den Energieeigenwerten beigetragen hat. Das neue Modell soll, wie das Luttinger-Modell aus Fermionen zweier Teilchensorten bestehen. Fermionen gleicher Sorte sind ununterscheidbar, Fermionen verschiedener Sorte sind unterscheidbar. In diesem Teil soll größeres Augenmerk auf die thermodynamischen Zustandsgrößen des neuen Modells gerichtet werden.

## 8. Der Hamiltonoperator

Das System besteht aus zwei unterscheidbaren Fermionensorten. Der Hilbertraum des Gesamtsystems ist also das Tensorprodukt aus den beiden vollständig antisymmetrisierten Teilräumen mit Fermionen jeweils einer Sorte.

$$\mathcal{H}_{HO} = \left( \bigotimes_{n=1}^N \mathcal{H}^{(1)} \right)^- \otimes \left( \bigotimes_{m=1}^M \mathcal{H}^{(2)} \right)^-$$

Im weiteren soll nur noch der Spezialfall  $N = M$  betrachtet werden.  $\mathcal{H}^{(1)}$  und  $\mathcal{H}^{(2)}$  sind die Hilberträume der Einteilchenprobleme von Fermionen der Sorte 1 bzw. der Sorte 2. Die Hamiltonoperatoren der Einteilchenprobleme sind für die verschiedenen Teilchensorten mit  $\tilde{H}^{(1)}$  bzw.  $\tilde{H}^{(2)}$  gegeben. Die Eigenwertgleichungen der Einteilchensysteme sind die von eindimensionalen harmonischen Oszillatoren ohne Nullpunktsenergie.

$$\begin{aligned} \tilde{H}^{(1)} |n^{(1)}\rangle &= nE_1 |n^{(1)}\rangle \\ \tilde{H}^{(2)} |m^{(2)}\rangle &= mE_1 |m^{(2)}\rangle \quad n, m \in \mathbb{N} \end{aligned}$$

$E_1$  entspricht der Energie des ersten angeregten Zustandes und somit dem Abstand der Eigenwerte im äquidistanten Energiespektrum. Die Eigenzustände der Einteilchenhamiltonoperatoren  $(|n^{(1)}\rangle)_{n \in \mathbb{N}}$  und  $(|m^{(2)}\rangle)_{m \in \mathbb{N}}$  sind Orthonormalbasen der Einteilchenhilberträume  $\mathcal{H}^{(1)}$  und  $\mathcal{H}^{(2)}$ . Diese Spezifizierung des Systems ist noch völlig analog zur Formulierung

des trunkierten Luttinger-Modells. Der Hamiltonoperator des ungestörten Vielteilchensystems ist durch

$$\tilde{H}_0 = \sum_{n=1}^N \tilde{H}_n^{(1)} + \sum_{m=1}^N \tilde{H}_m^{(2)}$$

gegeben. Diese Notation der Operatoren entspricht der in (2.2). Die Eigenzustände für dieses System sind das Tensorprodukt zweier Slaterdeterminanten

$$|\mathbf{n}^{(1)}, \mathbf{m}^{(2)}\rangle = \bigwedge_{i=1}^N |n_i^{(1)}\rangle \otimes \bigwedge_{j=1}^N |m_j^{(2)}\rangle. \quad (8.1)$$

Dies ist eine Kurzschreibweise für (4.15). Zwischen den Teilchen unterschiedlicher Sorte soll nun eine Zweiteilchenwechselwirkung der Art

$$V_{nm}^{(12)} |n^{(1)}\rangle \otimes |m^{(2)}\rangle = -V |n^{(1)}\rangle \otimes |m^{(2)}\rangle \delta_{nm}$$

bestehen, wobei  $V > 0$  ein reeller Parameter ist. Es besteht also nur eine Wechselwirkung zwischen unterscheidbaren Teilchen, die sich im gleichen Einteilchenzustand befinden. Das Modell mit Wechselwirkung ist durch den Hamiltonoperator

$$\tilde{H} = \sum_{n=1}^N \tilde{H}_n^{(1)} + \sum_{m=1}^N \tilde{H}_m^{(2)} + \sum_{n,m=1}^N V_{nm}^{(12)}$$

definiert. Für dieses System lassen sich die Slaterdeterminanten (8.1) als Eigenzustände wählen. Mit diesen Eigenzuständen ergeben sich für die Energieeigenwerte des Gesamtsystems

$$E_{\mathbf{nm}} = \left( \sum_{i=1}^N n_i + \sum_{j=1}^N m_j \right) E_1 - V \sum_{i,j=1}^N \delta_{n_i m_j}.$$

Hiermit läßt sich nun die kanonische Zustandssumme berechnen.



## 9. Die kanonische Zustandssumme

Die kanonische Zustandssumme wird wieder mit (6.2) berechnet.

$$\begin{aligned}
 Z_N(\beta) &= \sum_{\mathbf{nm}} e^{-\beta E_{\mathbf{nm}}} \\
 &= \sum_{n_1 < \dots < n_N} \sum_{m_1 < \dots < m_N} \exp \left\{ -\beta \left[ \left( \sum_{i=1}^N n_i + \sum_{j=1}^N m_j \right) E_1 - V \sum_{i,j=1}^N \delta_{n_i m_j} \right] \right\} \quad (9.1)
 \end{aligned}$$

Die Tupel  $\mathbf{n} = (n_1 < \dots < n_N)$  und  $\mathbf{m} = (m_1 < \dots < m_N)$  sind vollständige Sätze von Quantenzahlen, die den Zustand des Systems charakterisieren. Ohne die Wechselwirkungsterme in (9.1), wäre dies wieder genau die kanonische Zustandssumme des trunkierten Luttinger-Modells aus Kapitel 6. Auf herkömmlichen Weg ist diese Zustandssumme nur sehr umständlich zu berechnen, was auch nur für kleine Teilchenzahlen möglich ist, da die Terme sehr schnell sehr kompliziert werden. Es muß also eine andere Methode gesucht werden die kanonische Zustandssumme zu berechnen. Dazu werden die beiden  $N$ -Tupel  $\mathbf{n}$  und  $\mathbf{m}$  gemischt und wieder der Größe der Quantenzahlen nach geordnet. Hier besteht nun allerdings die Möglichkeit, daß Quantenzahlen von Teilchen der Sorte 1 mit Quantenzahlen von Teilchen der Sorte 2 identisch sind. So entsteht z.B. eine Folge von Quantenzahlen

$$\begin{aligned}
 \dots < n_i < n_{i+1} < \dots < n_{i+k} = m_j < n_{i+k+1} = m_{j+1} < m_{j+2} < \dots \\
 \dots, & \quad 1 \quad , \quad 1 \quad , \quad \dots, \quad 0 \quad , \quad 0 \quad , \quad 2 \quad , \dots
 \end{aligned}$$

Die Struktur der Folge der Quantenzahlen des Systems wird in einem String von den Symbolen 0,1,2 übersetzt [22]. Dabei bedeuten die Symbole

$$\begin{aligned}
 1 & : < n_i < \\
 2 & : < m_j < \\
 0 & : < n_i = m_j < .
 \end{aligned}$$

Für die gegebene Teilchenzahl  $N$  sei nun  $\mathcal{A}_N$  die Menge aller Strings  $s$  über dem Alphabet  $\{0, 1, 2\}$ , die die Nebenbedingungen

$$N_1(s) = N_2(s) \quad (9.2)$$

und

$$N_1(s) + N_0(s) = N \quad (9.3)$$

erfüllen. Hierbei ist  $N_i(s)$  die Häufigkeit mit der das Symbol  $i$  in dem String  $s$  vorkommt. Da von jeder Teilchensorte  $N$  Fermionen im System vorhanden sind, muß die Länge der Strings zwischen  $N$  und  $2N$  liegen. Dabei ist die Länge genau  $N$ , wenn jede Quantenzahl von Teilchen der einen Sorte gleich einer Quantenzahl von Teilchen der anderen Sorte

ist, bzw. genau  $2N$  wenn alle Quantenzahlen verschieden sind. Es sind immer von beiden Sorten gleich viele Quantenzahlen vorhanden, die von allen anderen Quantenzahlen verschieden sind (9.2). Darüber hinaus muß die Summe der Anzahl der Quantenzahlen einer Sorte, die mit keinen anderen Quantenzahlen gleich sind, und die Anzahl derer, die einen gleichen Partner haben, der Teilchenzahl von Fermionen einer Sorte  $N$  entsprechen (9.3). Für die Länge der Strings gilt

$$|s| \in \{N, \dots, 2N\} \quad \forall s \in \mathcal{A}_N.$$

Jeder String  $s \in \mathcal{A}_N$  entspricht nun einer Teilsumme der kanonischen Zustandssumme (9.1). Diese Fallunterscheidung ist für die Zustandssumme notwendig, da es aufgrund der Wechselwirkung einen anderen Beitrag zur Zustandssumme gibt, wenn Quantenzahlen gleich sind, als wenn alle Quantenzahlen verschieden sind. Hier ist ein Beispiel für die verschiedenen Teilsummen, die zur Zustandssumme beitragen und den dazugehörigen Strings mit  $N = 2$  angegeben.

String	Teilsumme
1122	$n_1 < n_2 < m_1 < m_2$
1212	$n_1 < m_1 < n_2 < m_2$
1221	$n_1 < m_1 < m_2 < n_2$
2121	$m_1 < n_1 < m_1 < n_2$
2211	$m_1 < m_2 < n_1 < n_2$
2112	$m_1 < n_1 < n_2 < m_2$
102	$n_1 < n_2 = m_1 < m_2$
012	$n_1 = m_1 < n_2 < m_2$
120	$n_1 < m_1 < n_2 = m_2$
210	$m_1 < n_1 < n_2 = m_2$
021	$n_1 = m_1 < m_2 < n_2$
201	$m_1 < n_1 = m_2 < n_2$
00	$n_1 = m_1 < n_2 = m_2$

Alle Summanden dieser Teilsummen haben den Wechselwirkungsfaktor  $\exp(N_0(s)\beta V)$ , da  $N_0(s)$  die Anzahl der Übereinstimmungen von Quantenzahlen  $n_i = m_j$  angibt.

Die Teilsumme die zu  $s \in \mathcal{A}_N$  gehört ist ohne Wechselwirkungsfaktor

$$\begin{aligned} Z(s) &= \sum_{\dots < n_i < \dots < m_j < \dots} \exp \left\{ -\beta E_1 \left( \sum_{i=1}^N n_i + \sum_{j=1}^N m_j \right) \right\} \\ &= \sum_{a_1 < a_2 < \dots < a_{|s|}} \exp \left( -\beta E_1 \sum_{i=1}^{|s|} g_s(i) a_i \right). \end{aligned} \quad (9.4)$$

Mit  $a_i$  wurden neue Summationsindizes eingeführt, da  $N_0(s)$  Quantenzahlen übereinstimmen und somit nur noch  $2N - N_0(s)$  Summationsindizes nötig sind. Der Faktor  $g_s(i)$  berücksichtigt dabei, daß einige Summationsindizes  $a_i$  doppelt in der Summe vorkommen können, nämlich die zu  $n_j = m_k$  gehören.

$$g_s(i) = \begin{cases} 1 & : s_i = 1, 2 \\ 2 & : s_i = 0 \end{cases}$$

Die Summe (9.4) wird nun analog zur Summe im trunkierten Luttinger-Modell (6.9) ausgewertet, hier müssen jedoch noch die Faktoren  $g_s(i)$  beachtet werden. Die Summationsindizes  $a_{i-1,i}$  seien durch

$$a_{i-1,i} = a_i - a_{i-1}$$

definiert. Weiterhin sei

$$G_n(s) = \sum_{i=n}^{|s|} g_i(s).$$

Für die Teilsummen zum String  $s$  ergibt sich somit

$$\begin{aligned} Z(s) &= \sum_{a_1=0}^{\infty} \sum_{a_{12}=1}^{\infty} \dots \sum_{a_{|s|-1,|s|=1}}^{\infty} \prod_{i=1}^{|s|} \exp \left\{ -\beta E_1 g_s(i) \left( a_1 + \sum_{n=2}^i a_{n-1,n} \right) \right\} \\ &= \sum_{a_1=0}^{\infty} \sum_{a_{12}=1}^{\infty} \dots \sum_{a_{|s|-1,|s|=1}}^{\infty} \prod_{i=1}^{|s|} \exp(-\beta E_1 g_s(i) a_1) \prod_{i=1}^{|s|} \exp \left( -\beta E_1 g_s(i) \sum_{n=2}^i a_{n-1,n} \right) \\ &= \frac{1}{1 - q^{G_1(s)}} \sum_{a_1=0}^{\infty} \sum_{a_{12}=1}^{\infty} \dots \sum_{a_{|s|-1,|s|=1}}^{\infty} \exp \left( -\beta E_1 \sum_{i=1}^{|s|} g_s(i) \sum_{n=2}^i a_{n-1,n} \right) \\ &\quad \vdots \\ &= \frac{1}{1 - q^{G_1(s)}} \prod_{n=2}^{|s|} \frac{q^{G_n(s)}}{1 - q^{G_n(s)}} \quad \text{mit } q = e^{-\beta E_1}. \end{aligned} \quad (9.5)$$

Aus diesen Teilsummen erhält man nun die gesamte kanonische Zustandssumme, indem man über alle möglichen Strings summiert und die dazugehörigen Wechselwirkungsfaktoren berücksichtigt.

$$\begin{aligned} Z_N(\beta) &= \sum_{s \in \mathcal{A}_N} e^{\beta V N_0(s)} Z(s) \\ &= \sum_{s \in \mathcal{A}_N} \frac{e^{\beta V N_0(s)}}{1 - q^{G_1(s)}} \prod_{n=2}^{|s|} \frac{q^{G_n(s)}}{1 - q^{G_n(s)}} \end{aligned} \quad (9.6)$$

Für kleine  $N$  läßt sich diese Zustandssumme mit Hilfe von MATHEMATICA berechnen. Die Rechenmethode soll kurz dargestellt und auch gleichzeitig die Anzahl der Elemente von  $\mathcal{A}_N$  bestimmt werden. Mit diesen Ergebnissen läßt sich dann noch eine einfachere Form von (9.6) angeben.

Das System bestehe aus  $N$  Fermionen der Sorte 1 und  $N$  Fermionen der Sorte 2. Die Menge aller Strings  $s \in \mathcal{A}_N$  mit der gleichen Anzahl von Nullen  $N_0(s)$ , wird mit

$$\mathcal{A}_{N,N_0} = \{s \in \mathcal{A}_N \mid N_0(s) = N_0\}$$

bezeichnet und die Anzahl der Elemente dieser Menge mit  $\#\mathcal{A}_{N,N_0}$ . Die Teilsummen in denen alle Quantenzahlen verschieden sind, werden durch Strings mit  $N$  Einsen und  $N$  Zweien dargestellt.

$$s_1 = (\underbrace{1, \dots, 1}_{N\text{-mal}}, \underbrace{2, \dots, 2}_{N\text{-mal}}) \quad \#\mathcal{A}_{N,0} = \frac{(2N)!}{N!N!}$$

Die Anzahl der möglichen Permutationen des Strings  $s_1$  resultiert aus den möglichen Vertauschungen der Elemente. Hier gibt es  $(2N)!$  Möglichkeiten die Elemente umzusortieren. Die  $N!$  Möglichkeiten die Einsen untereinander und Zweien untereinander zu vertauschen führen auf keinen neuen String. Die Permutationen dieser Strings werden von MATHEMATICA erzeugt und dafür die Teilsummen (9.5) ausgewertet. Somit sind alle Möglichkeiten in denen alle Quantenzahlen verschieden sind behandelt. Nun wird der Fall behandelt, indem zwei Quantenzahlen gleich sind. Dazu werden eine Eins und eine Zwei aus dem String entfernt und eine Null eingefügt.

$$s_i = (0, \underbrace{1, \dots, 1}_{(N-1)\text{-mal}}, \underbrace{2, \dots, 2}_{(N-1)\text{-mal}}) \quad \#\mathcal{A}_{N,1} = \frac{(2N-1)!}{(N-1)!(N-1)!1!}$$

Es gibt nun  $(2N-1)!$  Möglichkeiten die Elemente umzusortieren, wobei jeweils  $(N-1)!$  Möglichkeiten der Vertauschung der Einsen untereinander und Zweien untereinander keine neuen Strings liefern.

$$s_j = (0, 0, \underbrace{1, \dots, 1}_{(N-2)\text{-mal}}, \underbrace{2, \dots, 2}_{(N-2)\text{-mal}}) \quad \#\mathcal{A}_{N,2} = \frac{(2N-2)!}{(N-2)!(N-2)!2!}$$

Sind zwei Nullen in dem String vorhanden, dann kommt noch hinzu, daß es  $2!$  Möglichkeiten gibt die Nullen zu vertauschen, was ebenfalls auf keinen neuen String führt.

$$s_k = \underbrace{(0, \dots, 0)}_{N\text{-mal}} \quad \#\mathcal{A}_{N,N} = \frac{(2N - N)!}{N!} = 1$$

Die Teilsummen werden noch von MATHEMATICA mit den dazugehörigen Wechselwirkungsfaktoren  $\exp(N_0(s)\beta V)$  versehen und addiert. So ist die Zustandssumme analytisch exakt ausgewertet. Für die Anzahl der Permutationen mit der gleichen Anzahl von Nullen gilt allgemein

$$\#\mathcal{A}_{N,N_0} = \frac{(2N - N_0)!}{[(N - N_0)]^2 N_0!}$$

und somit für die Anzahl aller Strings der Menge  $\mathcal{A}_N$

$$\#\mathcal{A}_N = \sum_{N_0=0}^N \frac{(2N - N_0)!}{[(N - N_0)]^2 N_0!}$$

Diese Methode läßt sich allerdings noch vereinfachen, da der Beitrag einer Teilsumme, die durch einen String repräsentiert wird, nur von der Position der Nullen im String abhängt. Es wird deshalb eine neue Menge von Strings definiert, in der die Strings nur aus Einsen und Nullen bestehen [22]. Hierfür werden in den bekannten Strings  $s \in \mathcal{A}_N$  die Zweien einfach durch Einsen ersetzt. Die Menge dieser Strings mit einer bestimmten Anzahl von Nullen wird mit

$$\mathcal{B}_{N,N_0} = \{s \mid N_0 = N_0(s) = N - N_1(s)\}$$

bezeichnet. Für die Zustandssumme muß nun noch ein Faktor  $F(N_0)$  bestimmt werden, der die Anzahl der Strings  $s \in \mathcal{A}_{N,N_0}$  angibt, die Nullen an den gleichen Stellen haben. Es gilt

$$F(N_0) = \frac{(2N - 2N_0)!}{[(N - N_0)!]^2} = \binom{2(N - N_0)}{N - N_0},$$

da es  $(2N - 2N_0)!$  Möglichkeiten gibt bei gegebenen Positionen der Nullen, die Einsen und Zweien umzusortieren, dabei führen aber jeweils  $(N - N_0)!$  Vertauschungen der Einsen untereinander und der Zweien untereinander auf keinen neuen String. Hiermit läßt sich die kanonische Zustandssumme (9.6) schreiben als

$$Z_N(\beta) = \sum_{N_0=0}^N e^{\beta N_0 V} \binom{2(N - N_0)}{N - N_0} \sum_{s \in \mathcal{B}_{N,N_0}} \frac{1}{1 - q^{G_1}} \prod_{n=2}^{|s|} \frac{q^{G_n}}{1 - q^{G_n}} \quad (9.7)$$

$$\text{mit } q = e^{-\beta E_1}$$

## 10. Thermodynamische Zustandsgrößen

### 10.1. Skalierte Zustandssumme

Um die thermodynamischen Zustandsgrößen in Abhängigkeit von der Teilchenzahl  $N$  zu betrachten, soll zunächst die kanonische Zustandssumme skaliert werden. Wie dieses für den harmonischen Oszillator gemacht wird, ist in [23] ausführlich dargestellt. Diese Skalierung wird auch benötigt um den thermodynamischen Limes  $N \rightarrow \infty$  bei  $N/L = \text{const.}$  zu ermitteln, wobei  $L = \sqrt{\frac{\hbar^2}{mE_1}}$  die typische Länge des harmonischen Oszillators ist. Mit steigender Teilchenzahl muß also auch die Skalierung des Energiespektrums bedacht werden. Die Ersetzung  $E_1 \rightarrow E_1/N$  streckt das System um den Faktor  $\sqrt{N}$ , wie an der typischen Länge  $L$  zusehen ist. Dies hebt genau die Divergenz der Einteilchendichte  $\sqrt{N}$  auf. In der Zustandssumme muß also die Energie  $E_1$  durch  $E_1/N$  ersetzt werden. Die skalierte Zustandssumme wird mit

$$Z'_N(\beta) = \sum_{s \in \mathcal{A}_N} \frac{e^{\beta V N_0(s)}}{1 - e^{-\beta \frac{E_1}{N} \beta G_1}} \prod_{n=2}^{|s|} \frac{e^{-\beta \frac{E_1}{N} G_n}}{1 - e^{-\beta \frac{E_1}{N} G_n}} \quad (10.1)$$

bezeichnet. Die Zustandsgrößen, die in den nächsten Abschnitten in Abhängigkeit von der Teilchenzahl  $N$  oder der Art des Systems betrachtet werden, werden mit dieser skalierten Zustandssumme berechnet. Zur Unterscheidung gegenüber den unskalierten Größen werden diese mit einem ' gekennzeichnet.

### 10.2. Innere Energie

Die innere Energie ist wieder durch

$$U_N(\beta) = -\frac{\partial}{\partial \beta} \ln Z_N(\beta)$$

gegeben. Die Formeln der thermodynamischen Zustandsgrößen werden mit Hilfe von MATHEMATICA aus (9.7) ermittelt und hier nicht angegeben, da sie sehr lang sind und sich nicht leicht zusammenfassen lassen. In Abbildung 18 ist die innere Energie für die Teilchenzahl  $N = 5$  für verschiedene Wechselwirkungsstärken  $V$  unskaliert dargestellt. Die Wechselwirkungsstärke wird von  $V = 0$  bis  $V = 100E_1$  variiert. Für  $V = 0$  liegt der Fall von idealen Fermionen mit zwei Teilchensorten vor, von denen jeweils  $N$  Teilchen vorhanden sind. Man sieht deutlich, daß für stärker werdende Wechselwirkung die inneren Energien für  $T \rightarrow 0$  immer stärker vom klassischen Limes

$$\lim_{T \rightarrow \infty} U_N(T) = 2Nk_B T$$

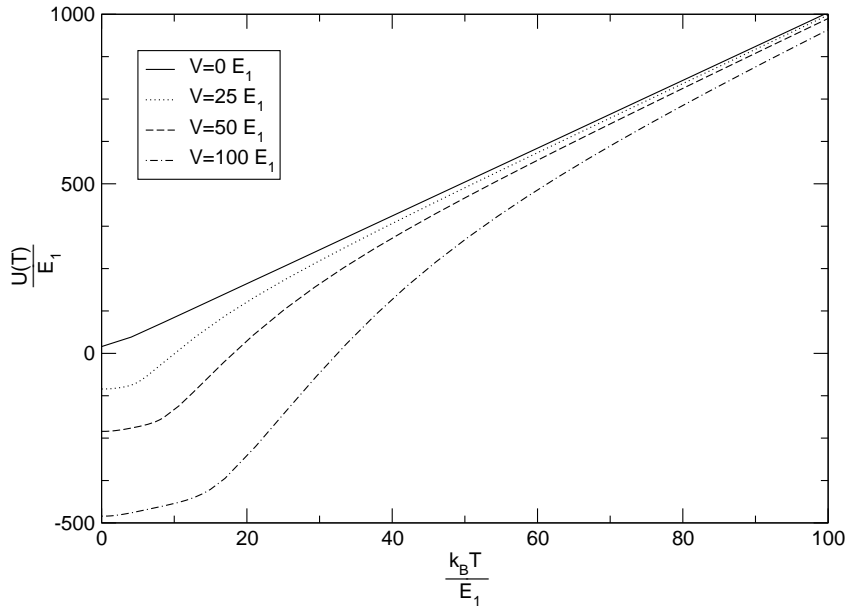


Abbildung 18: Innere Energie  $U_5(T)$  für verschiedene Wechselwirkungsstärken  $V$

abweichen.

$$\lim_{T \rightarrow 0} U_N(T) = E_0(N, V) = -NV + N(N-1)E_1$$

Der erste Teil ist dabei durch die Bindungsenergie zwischen den Fermionen, hervorgerufen durch die Wechselwirkung, der zweite Teil durch die Grundzustandsenergie (6.12) zu erklären. Für stärkere Wechselwirkungen nähern sich die Kurven der inneren Energien erst für höhere Temperaturen dem klassischen Limes an. Dieser Limes begründet sich in dem Gleichverteilungssatz der Energie. Hier muß  $2N$  angegeben werden, da  $2N$  die Gesamtteilchenzahl ist und  $N$  die Teilchenzahl der Fermionen einer Sorte. Bei niedrigen Temperaturen trägt jedoch nur jedes Teilchenpaar zur Bindungsenergie bei.

In Abbildung 19 ist die skalierte innere Energie  $U'_N(T)/N$  für verschiedene Teilchenzahlen  $N$  dargestellt.  $N = 8$  war die größte Teilchenzahl mit der sich diese Größe exakt berechnen ließ. Die Kurven unterscheiden sich nur minimal in der Steigung. Für  $T \rightarrow 0$  geht die innere Energie gegen die Grundzustandsenergie  $E_0(N, V)$ , für hohe Temperaturen nähert sie sich wieder dem klassischen Limes an.

Das hier behandelte System mit Wechselwirkung wird in Abbildung 20 mit einem System aus idealen Fermionen zweier Sorten mit  $N = 5, M = 5$ , was in diesem System  $V = 0$  entspricht und einem System idealer Bosonen mit  $N = 5$  verglichen. Die Größen für

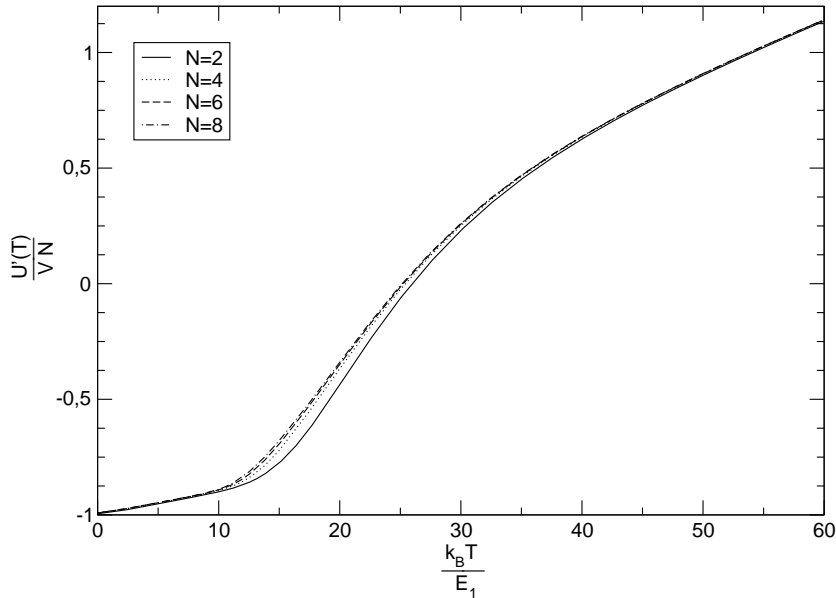


Abbildung 19: Innere Energie  $U'_N(T)$  für verschiedene Teilchenzahlen mit Wechselwirkungsstärke  $V = 100E_1$

die idealen Systeme werden aus den Zustandssummen (6.13) und (6.14) ermittelt und ebenfalls mit  $E_1 \rightarrow E_1/N$  mit  $N = 5$  skaliert. In der Zustandssumme der Bosonen wird wieder die Ersetzung  $E_1 \rightarrow 2E_1$  gemacht, da ein Pseudoboson aus zwei Fermionen besteht. Wie es für ideale Bosonen typisch ist geht die innere Energie für dieses System gegen Null, für ideale Fermionen mit zwei Teilchensorten gegen die Grundzustandsenergie (6.12). Bei hohen Temperaturen nähert sich die Kurve des Systems mit Wechselwirkung dem mit idealen Fermionen zweier Sorten an und entspricht dem klassischen Limes für Teilchenzahl  $2N$ . Für tiefe Temperaturen  $T \rightarrow 0$  läuft die Kurve des Systems mit Wechselwirkung parallel zur Kurve der idealen Bosonen, hat also die Steigung des klassischen Limes für  $N$ . Bei niedrigen Temperaturen verhält sich die innere Energie eines Systems mit  $2N$  wechselwirkenden Fermionen, wenn auch nicht absolut, aber immerhin in der Steigung wie ein System von  $N$  idealen Bosonen.



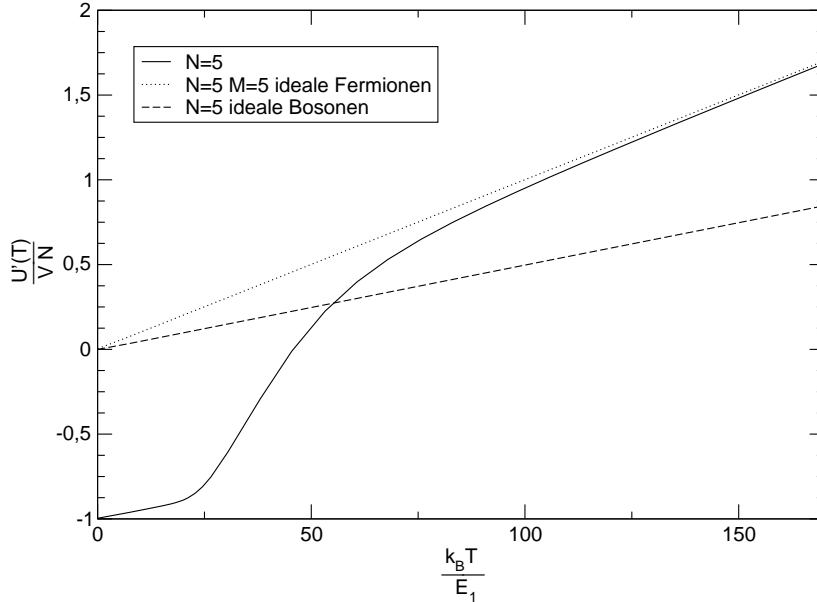


Abbildung 20: Innere Energie  $U'_N(T)$  für verschiedene Systeme mit Wechselwirkungsstärke  $V = 200E_1$

### 10.3. Spezifische Wärme

Die spezifische Wärme

$$C_N(\beta) = k_B \beta^2 \frac{\partial^2}{\partial \beta^2} \ln Z_N(\beta)$$

ist für verschiedene Wechselwirkungsstärken in Abbildung 21 dargestellt. Man sieht, daß für stärker werdende Wechselwirkungen die spezifischen Wärmen vom idealen Fall  $V = 0$  abweichen. Die Kurven nähern sich für hohe Temperaturen dem klassischen Limes

$$\lim_{T \rightarrow \infty} C_N(T) = 2Nk_B$$

an, der sich aus dem Dulong-Petit Gesetz ergibt. Jedoch bilden sich für  $T \rightarrow 0$  ganz neue Strukturen aus. In Abbildung 21 sieht man, daß sich die spezifische Wärme für eine niedrige Temperatur  $T_1$  scheinbar einem ersten Grenzwert

$$\lim_{T \rightarrow T_1} C_N(T) = Nk_B$$

nähert. Dieses entspricht dem klassischen Grenzwert von  $N$  idealen identischen Teilchen. Zwischen beiden Plateaus in den Kurven liegt ein Maximum, was zunächst auf einen Phasenübergang hinweisen könnte. Im Gegensatz zum trunkierten Luttinger-Modell hat hier

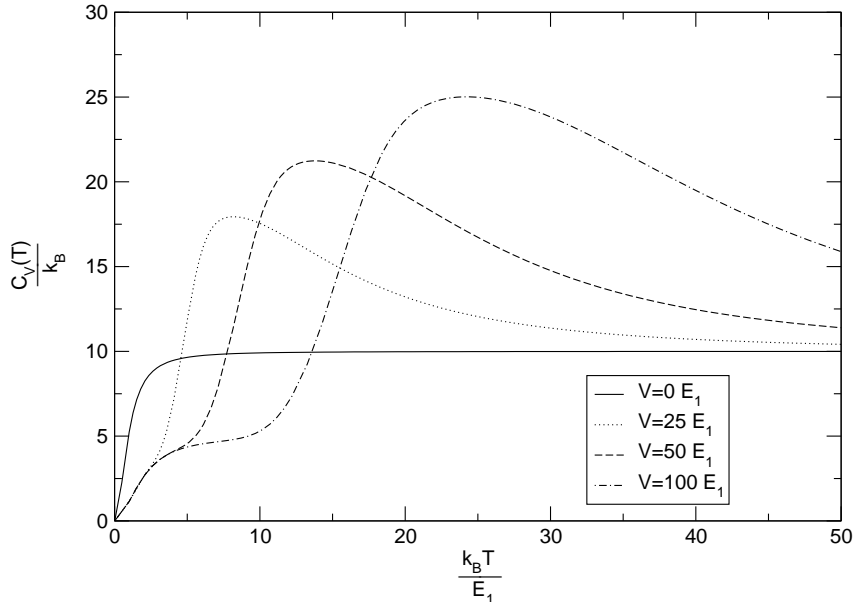


Abbildung 21: Spezifische Wärme  $C_5(T)$  für verschiedene Wechselwirkungsstärken  $V$

die Wechselwirkung zwischen den Fermionen eine deutliche Auswirkung auf die spezifische Wärme.

In Abbildung 22 ist die spezifischen Wärmen skaliert mit der Teilchenzahl bei der Wechselwirkungsstärke  $V = 100E_1$  dargestellt. Die Teilchenzahlen variieren von  $N = 2$  bis  $N = 8$ . Man sieht deutlich das erste Plateau bei  $Nk_B$  und den klassischen Grenzwert bei  $2Nk_B$ . Das Maximum der spezifischen Wärme scheint keinen Phasenübergang zu beschreiben, da es für steigende Teilchenzahlen nicht deutlich schärfer wird. Bei einem Phasenübergang würde man eine Singularität, oder eine nicht differenzierbare Stelle in der spezifischen Wärme erwarten. Ein Phasenübergang wäre durch das Aufbrechen von Bindungen zwischen den Fermionen, die durch die Wechselwirkung bedingt wären, zu erklären gewesen.

Für verschiedene Arten von Systemen ist die spezifische Wärme in Abbildung 23 mit der Wechselwirkungsstärke  $V = 200E_1$  dargestellt. Es sind die gleichen Systeme, die auch schon für die innere Energie dargestellt wurden. Für tiefe Temperaturen  $T < T_1$  entspricht die spezifische Wärme des Systems mit  $2N$  wechselwirkenden Fermionen der des Systems mit  $N$  idealen Bosonen. Ob dieses wirklich ein Verhalten von Bosonen ist läßt sich nicht sagen, da die spezifischen Wärmen von idealen Bosonen und Fermionen im eindimensionalen harmonischen Oszillator identisch sind. Jedoch ist gezeigt, daß sich die spezifische Wärme des Systems mit  $2N$  wechselwirkenden Fermionen bei tiefen Temperaturen, wie die eines

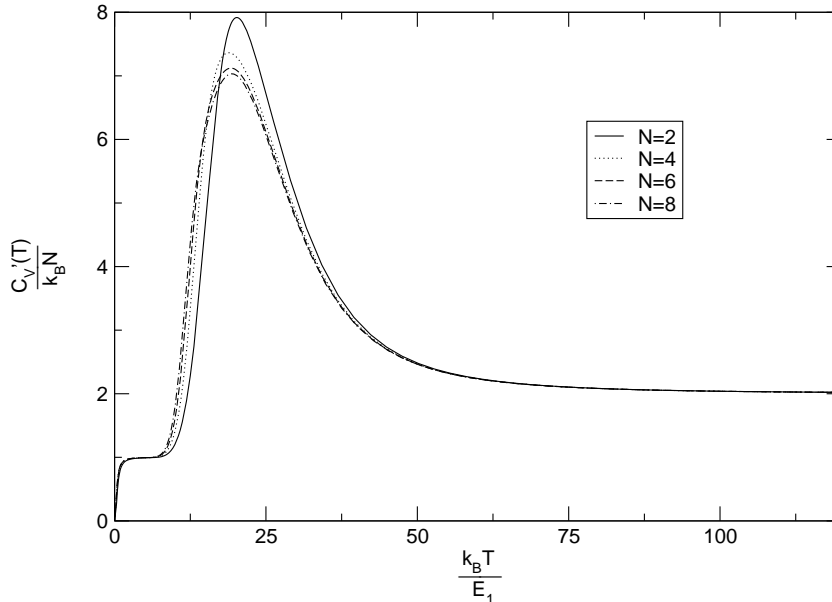


Abbildung 22: Skalierte spezifische Wärme  $C'_V(T)$  für verschiedene Teilchenzahlen mit Wechselwirkungsstärke  $V = 100E_1$

ideales Systems mit  $N$  identischen Teilchen verhält. Die unterscheidbaren Fermionen sind also zu Paaren gebunden und verhalten sich wie ideale, identische Teilchen. Die Entropie von idealen Bosonen und Fermionen ist in eindimensionalen Systemen nicht gleich. Hieran läßt sich bestimmen, ob sich die Fermionenpaare wie Bosonen oder Fermionen verhalten.

## 10.4. Entropie

Als letztes soll noch die Entropie

$$S_N(\beta) = -k_B \beta^2 \frac{\partial}{\partial \beta} \left( \frac{1}{\beta} \ln Z_N(\beta) \right)$$

untersucht werden. In Abbildung 24 ist die Entropie eines wechselwirkenden Systems mit  $N = 5$  für Wechselwirkungsstärken von  $V = 0$  bis  $V = 100E_1$  dargestellt. Auch hier sieht man für stärkere Wechselwirkungen ein deutliches Abweichen vom idealen Fall  $V = 0$ . Es scheint, daß der Verdacht auf einen Phasenübergang zunächst nicht bestätigt ist, da sonst eine Unstetigkeit oder Singularität in der Entropie vorhanden sein muß. Um dieses zu bestätigen wird allerdings noch die Hochtemperaturentwicklung für die

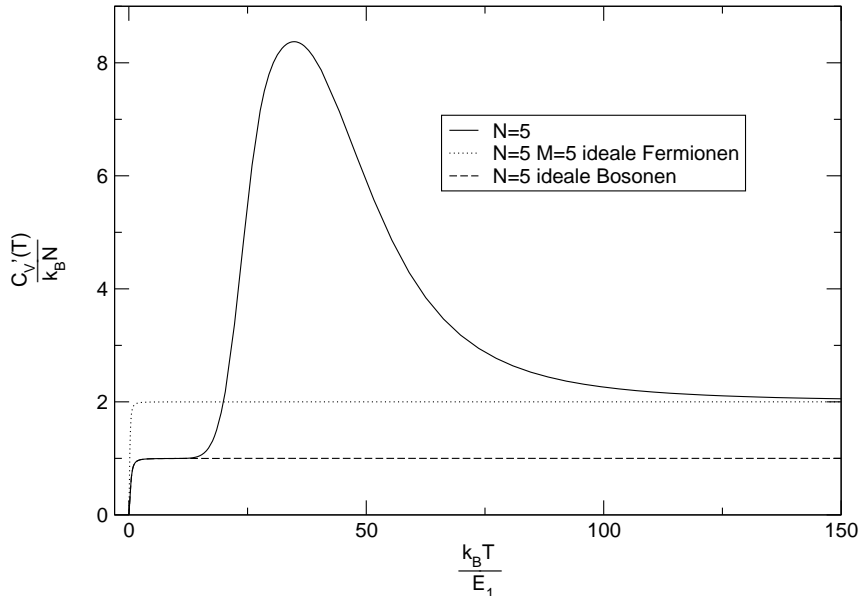
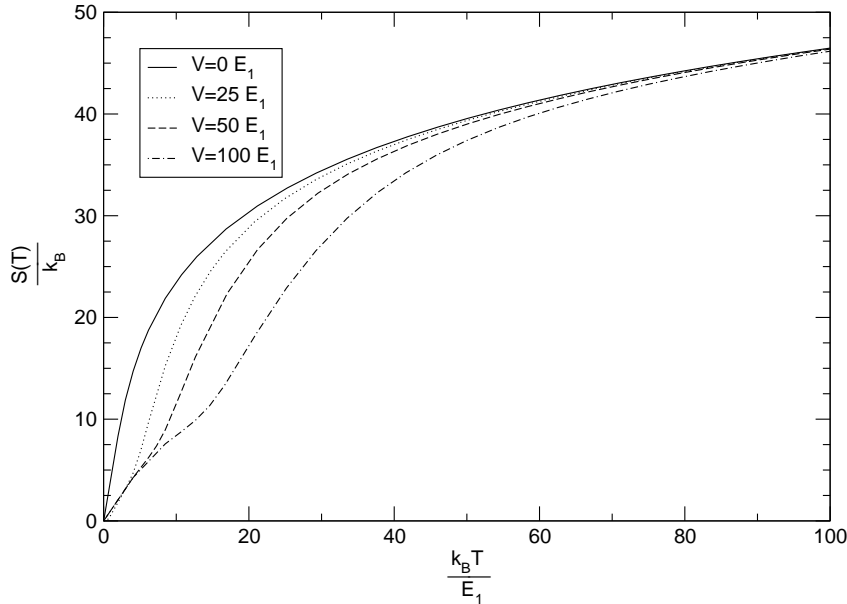


Abbildung 23: Spezifische Wärme  $C'_V(T)$  für verschiedene Systeme mit Wechselwirkungsstärke  $V = 200E_1$

spezifische Wärme untersucht, da sich diese auch für größere Teilchenzahlen berechnen läßt. Für hohe Temperaturen laufen die verschiedenen Kurven wieder zusammen und entsprechen dem Hochtemperaturlimes.

Für die skalierte Entropie  $S'_N(T)$  in Abbildung 25 mit verschiedenen Teilchenzahlen ist erkennbar, daß sich auch die skalierte Entropie mit steigender Teilchenzahl einem thermodynamischen Limes annähert, denn je größer die Teilchenzahl, desto dichter liegen die Kurven zusammen.

Die Entropie der verschiedenen idealen und wechselwirkenden Systeme ist in Abbildung 26 dargestellt. Auch ist wieder der Übergang des wechselwirkenden Systems vom Verhalten eines idealen Quantengases mit Teilchenzahl  $N = 5$ , zum idealen Quantengas mit Teilchen zweier Sorten mit Teilchenzahl  $N = 5, M = 5$  zu sehen. Hier wird bestätigt, daß sich das wechselwirkende System für niedrige Temperaturen sich tatsächlich wie ein System von Bosonen verhält, da sich die Entropien bosonischer und fermionischer Systeme auch in einer Dimension unterscheiden. Der Übergang vom Verhalten des Systems mit Teilchenzahl  $N$  zum Verhalten des Systems mit Teilchenzahl  $2N$  scheint nicht von einem Phasenübergang begleitet zu werden.

Abbildung 24: Entropie  $S_5(T)$  für verschiedene Wechselwirkungsstärken  $V$ 

## 10.5. Spezifische Wärme in der Hochtemperaturentwicklung

Um zu überprüfen, ob es für das System wechselwirkender Fermionen nun tatsächlich keinen Phasenübergang gibt sollte der thermodynamische Limes ( $N \rightarrow \infty$  bei  $N/L = \text{const.}$ ) untersucht werden. Hier soll es genügen die Hochtemperaturentwicklung der Terme in  $Z'_N(\beta)$  zu betrachten, was der Taylorentwicklung erster Ordnung nach  $\beta/N$  entspricht. Dies vereinfacht die Terme in (10.1) zu

$$\frac{e^{-\beta \frac{E_1}{N} G_n}}{1 - e^{-\beta \frac{E_1}{N} G_n}} \rightarrow \frac{N}{\beta G_n}.$$

Hiermit ergibt sich für die Zustandssumme in der Hochtemperaturentwicklung

$$Z'_N(\beta) \approx \sum_{s \in \mathcal{A}_N} e^{\beta V N_0(s)} \prod_{n=1}^{|s|} \frac{N}{\beta G_n(s)}, \quad (10.2)$$

woraus nun die spezifische Wärme berechnet werden kann.

Für die Wechselwirkungsstärke  $V = 100E_1$  und die Teilchenzahl  $N = 8$  stimmt das exakte Ergebnis schon gut mit der Hochtemperaturentwicklung überein. Man sieht in

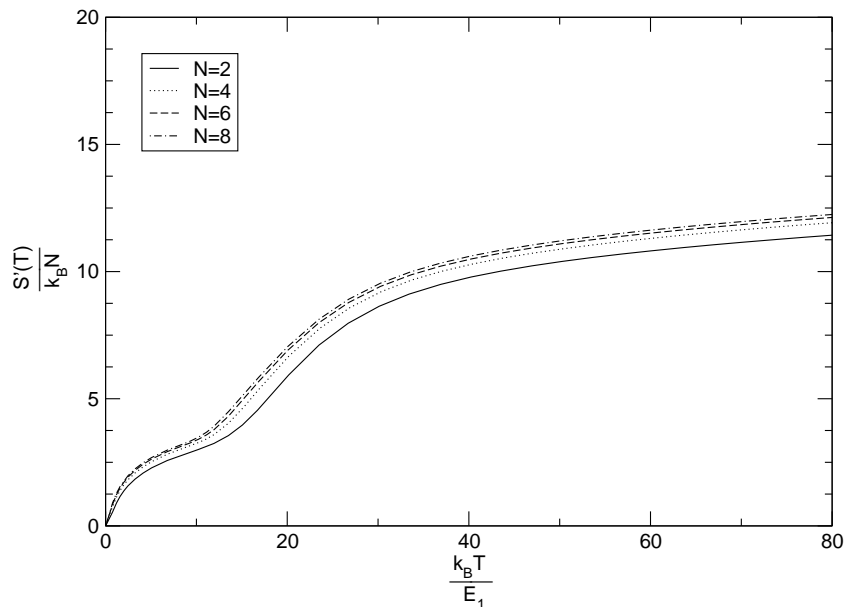


Abbildung 25: Entropie  $S'_N(T)$  für Teilchenzahlen mit der Wechselwirkungsstärke  $V = 100E_1$

Abbildung 27 nur minimale Abweichungen der beiden Kurven, außer natürlich für  $T \rightarrow 0$ , da die Hochtemperaturentwicklung das Tieftemperaturverhalten der Quantensysteme nicht berücksichtigt. Jedoch sind auch hier die beiden Plateaus in der spezifischen Wärme zu erkennen. Mit der einfacheren Form (10.2) der Zustandssumme lassen sich nun auch Zustandsgrößen für größere Teilchenzahlen berechnen. In Abbildung 27 ist außerdem noch die spezifische Wärme in der Hochtemperaturentwicklung für  $N = 40$  dargestellt [22]. Die Kurve ändert sich zwar noch für große Teilchenzahlen, jedoch bleibt die spezifische Wärme eine glatte Funktion der Temperatur und damit kann nicht von einem Phasenübergang an der Stelle des Maximums gesprochen werden. Ein Phasenübergang ließe sich jedoch qualitativ durch das Aufbrechen der Bindungen zwischen den Fermionen erklären. Daher ist es wahrscheinlich, daß in höheren Dimensionen doch ein Phasenübergang an dieser Stelle stattfindet.

## 11. Fazit Fermionen mit Wechselwirkung

Dieses Modell von wechselwirkenden  $2N$  Fermionen zweier Sorten hat den gewünschten Erfolg gebracht. An den verschiedenen thermodynamischen Zustandsgrößen die dargestellt

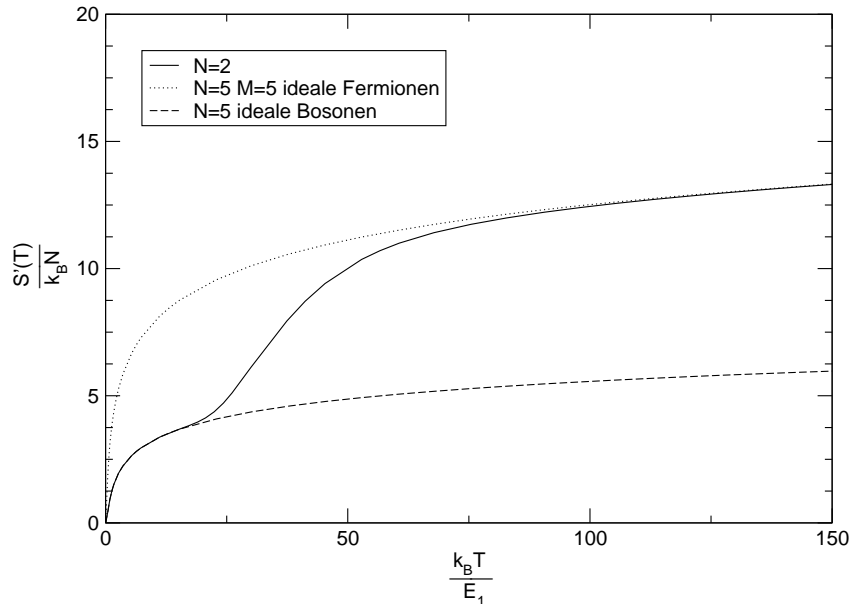


Abbildung 26: Entropie  $S'_N(T)$  für verschiedene Systeme mit der Wechselwirkungsstärke  $V = 200E_1$

wurden, ließ sich ein Übergang vom Verhalten eines Systems mit  $N$  idealen, identischen Teilchen zu einem System mit  $2N$  idealen, identischen Teilchen feststellen. Anhand der spezifischen Wärme konnte bei tiefen Temperaturen jedoch nicht gesagt werden, ob sich das System bosonisch oder fermionisch verhält, da die spezifische Wärme für die idealen Quantensysteme in einer Dimension gleich sind. Jedoch hat sich gezeigt, daß die Entropie des wechselwirkenden Systems im Tieftemperaturbereich der des idealen Systems mit halbsovielen Bosonen entspricht. Somit ist gezeigt, daß dieses System wechselwirkender Fermionen in seinen Eigenschaften bei tiefen Temperaturen dem des Systems idealer Bosonen gleich ist. Die innere Energie stimmt nicht absolut überein, da im System mit Wechselwirkung die Bindungsenergie der Fermionen mit eingeht, die bei den idealen Systemen fehlt. Die Fermionen binden sich also paarweise zu Pseudobosonen. Bei höheren Temperaturen brechen diese Bindungen auf, was an einem Maximum der spezifischen Wärme zu sehen ist. An dieser Stelle kann viel Energie in das System gepumpt werden und die Temperatur ändert sich vergleichsweise wenig, da Energie für das Lösen der Bindungen benötigt wird. Sind die Bindungen vollständig gelöst geht das Verhalten in das von idealen klassischen Teilchen über.

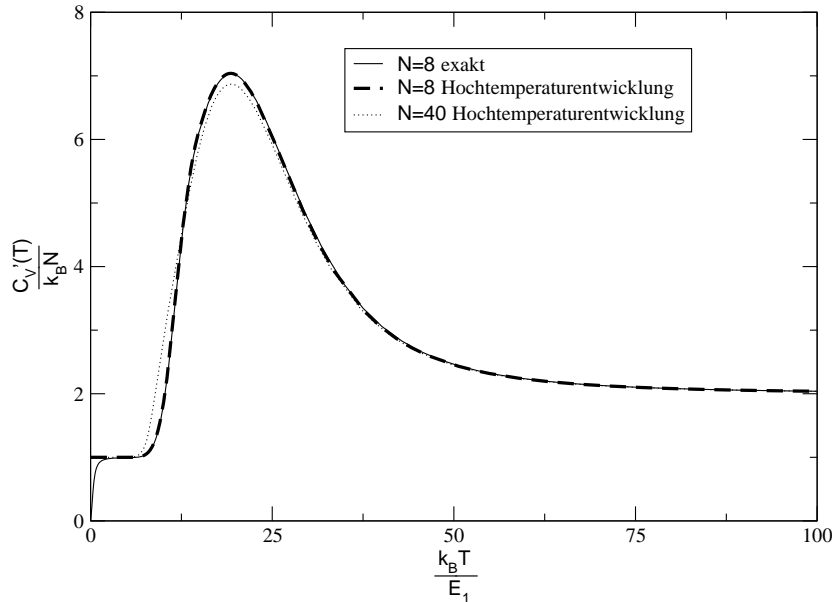


Abbildung 27: Spezifische Wärme  $C_V'(T)$  für Teilchenzahl  $N = 8$  exakt und in der Hochtemperaturrentwicklung mit der Wechselwirkungsstärke  $V = 100E_1$

## V.

# Zusammenfassung und Ausblick

In dieser Arbeit wurden einige Ansätze untersucht ein System von wechselwirkenden Fermionen als ein System von Pseudobosonen zu betrachten. Im ersten Teil dieser Arbeit wurde dazu eine Fermion-Boson-Abbildung definiert, die Zustände eines  $2N$  Multifermionenraumes auf Zustände eines  $N$  Pseudobosonenraumes abbildet. Die Abbildung ist die Identität, d.h. der physikalische Unterraum des Pseudobosonenraumes und der Multifermionenraum sind identisch. Dabei wurde klar, daß diese andere Betrachtungsweise des Problems nichts an den physikalischen Eigenschaften des Systems ändert. Die Energieeigenwerte bleiben erhalten und an den Besetzungszahlen der Einteilchenzustände ändert sich nichts, da die Teilchen effektiv Fermionen bleiben. Mit dieser Theorie kann die Bose-Einstein Kondensation von Pseudobosonen wie z.B. Atomen nur als eine Art klassischer Grenzfall erklärt werden, bei dem die Energieeigenwerte so dicht liegen, daß sie makroskopisch als nur ein Grundzustand zu erkennen sind.



---

Mit dem Luttinger-Modell wurde ein exakt lösbares System von wechselwirkenden Fermionen zweier Sorten betrachtet. Es wurden sowohl quantenmechanische Größen wie Korrelationsfunktionen und Teilchendichten, als auch die thermodynamischen Zustandsgrößen untersucht. Dabei hat sich ergeben, daß im Luttinger-Modell die Ortskoordinaten der Teilchen verschiedener Sorten gar nicht korreliert und die Impulse nur antikorreliert sind. Es konnte also keine Paarbildung von Fermionen beobachtet werden. Für die Betrachtung der thermodynamischen Zustandsgrößen wurde ein neues Modell, das trunkierte Luttinger-Modell eingeführt. Dieses entspricht in seinen thermodynamischen Zustandsgrößen einem eindimensionalen harmonischen Oszillator mit idealen Fermionen zweier Sorten. Auch hier konnte keine Paarbildung der Fermionen oder ein Verhalten eines bosonischen Systems beobachtet werden.

Den Erfolg hat schließlich ein neu definiertes Modell von wechselwirkenden Fermionen zweier Sorten in einem eindimensionalen harmonischen Oszillator gebracht. Hierzu wurden ebenfalls die thermodynamischen Zustandsgrößen untersucht und es konnte bei tiefen Temperaturen eine Paarbildung beobachtet werden. Die spezifische Wärme und Entropie des Systems war für niedrige Temperaturen mit dem eines Systems aus halbsovielen idealen Bosonen identisch. Bei einer gewissen Temperatur konnte ein Aufbrechen der Bindungen zwischen den Fermionen beobachtet werden, was sich in einem Maximum in der spezifischen Wärme dargestellt hat. Für hohe Temperaturen hat sich die spezifische Wärme dem klassischen Grenzfall genähert. Eine weitere Betrachtung dieses Modells wäre lohnenswert, da es in dieser Arbeit noch nicht ausreichend untersucht worden ist. So wäre eine Ausweitung dieses Modells auf den zwei- oder dreidimensionalen harmonischen Oszillator sehr interessant, da die Bose-Einstein Kondensation in einer Dimension nicht stattfindet. Mit einem solchen Modell könnte dann untersucht werden, ob in höheren Dimensionen eine Bose-Einstein Kondensation an der spezifischen Wärme wie im Fall idealer Bosonen [21] zu erkennen ist. Zwar Verhält sich das System in einer Dimension bei niedrigen Temperaturen genauso wie ein System mit idealen Bosonen, jedoch wurde im ersten Abschnitt gezeigt, daß das Pauli-Prinzip auch für Pseudobosonen erhalten bleibt. Weiter wäre noch ein Berechnen der Korrelationsfunktionen von Größen dieses Modells interessant. Von weiterem Interesse wäre in wie weit sich die Ergebnisse dieses idealisierten Wechselwirkungsmodells auf reale Systeme mit Bose-Einstein Kondensation übertragen lassen.

## Literatur

- [1] ANDERSON, M.H., J.R. ENSHER, M.R. MATTHEWS, C.E. WIEMANN und E.A. CORNELL: *Observation of Bose-Einstein Condensation in a dilute atomic vapor*. Science, 269:198–201, 1995.
- [2] BRADLEY, C.C., C.A. SACKETT, J.J. TOLLETT und R.G. HULET: *Evidence of Bose-Einstein Condensation in an Atomic Gas with Attractive Interactions*. Physical Review Letters, 75:1687–1690, 1995.
- [3] DAVIS, K.B., M.-O. MEWES, M.R. ANDREWS, N.J. VAN DRUTEN, D.S. DURFEE, D.M. KURN und W. KETTERLE: *Bose-Einstein Condensation in a Gas of Sodium Atoms*. Physical Review Letters, 75:3969–3973, 1995.
- [4] DALFOVO, F., S. GIORGINI, L.P. PITAEVSKII und S. DTRINGARI: *Theory of Bose-Einstein condensation in trapped gases*. Review of Modern Physics, 71:463–512, 1999.
- [5] ROMBOUTS, S., D. VAN NECK, K. PEIRS und L. POLLET: *Maximum occupation number for composite boson states*. Modern Physics Letters A, 17:1899–1907, 2002.
- [6] MEYER, J.: *Boson-Fermion and baryon mapping of multiquark states*. Journal of Mathematical Physics, 32:2142, 1991.
- [7] MEYER, J.: *Boson-Fermion und Baryonabbildung von Multiquarkzuständen*. Doktorarbeit, University of Oldenburg, 1990.
- [8] PENROSE, O. und L. ONSAGER: *Bose-Einstein Condensation and Liquid Helium*. Physical Review Letters, 104:576–584, 1956.
- [9] LUTTINGER, J.M.: *An Exactly Soluble Model of a Many-Fermion System*. Journal of Mathematical Physics, 15:609, 1963.
- [10] MATTIS, D.C. und E. H. LIEB: *Exact Solution of a Many-Fermion System and Its Associated Boson Field*. Journal of Mathematical Physics, 6:304, 1965.
- [11] LUTTINGER, J.M.: *Ground-State Energy of a Many-Fermion System*. Physical Review, 118:1417, 1960.
- [12] SCHÖNHAMMER, K.: *The Luttinger liquid concept for interacting electrons in one dimension*. Journal of Physics-Condensed Matter, 14:12783–12791, 2002.
- [13] SCHÖNHAMMER, K.: *Interacting fermions in one dimension: The Tomonaga-Luttinger model*. cond-mat/9710330.
- [14] SCHÖNHAMMER, K.: *Luttinger Liquids: The Basic Concepts*. cond-mat/0305035.

- 
- [15] GREINER, W.: *Theoretische Physik*, Band 9. Verlag Harry Deutsch, 1. Auflage, 1987.
- [16] FISCHER, G.: *Lineare Algebra*. Vieweg, 1995.
- [17] SCHNACK, J.: *Kurzreichweitige Korrelationen in der Fermionischen Molekulardynamik*. Doktorarbeit, Technische Hochschule Darmstadt, 1996.
- [18] COHEN-TANNOUJDI, C., B. DIU und F. LALOË: *Quantenmechanik*, Band 1. Walter de Gruyter, 2. Auflage, 1999.
- [19] CHAMPENEY, D.C.: *Fourier Transforms and their Physical Applications*. Academic Press, 3. Auflage, 1975.
- [20] GRADSTEJN, S. und I.M. RYZHIK: *Table of Integrals, Series, and Products*. Academic Press, 1980.
- [21] SCHMIDT, H.-J. und J.SCHNACK: *Investigations on finite ideal quantum gases*. *Physica A*, 260:479–489, 1998.
- [22] SCHMIDT, H.-J.: *persönliche Mitteilung*.
- [23] GLEISBERG, F., W. WONNEBERGER, U. SCHLÖDER und C. ZIMMERMANN: *Non-interacting fermions in a one-dimensional harmonic atom trap: Exakt one-particle properties at zero temperature*. *Physical Review A*, 62(063602), 2000.

## Danksagung

Diese Diplomarbeit ist in der Arbeitsgruppe „Makroskopische Systeme und Quantentheorie“ des Fachbereiches Physik an der Universität Osnabrück entstanden. Herrn Prof. Dr. Heinz-Jürgen Schmidt gilt mein besonderer Dank, da er sich bereit erklärt hat meine Diplomarbeit zu betreuen.

Ein weiterer Dank gilt PD Dr. Jürgen Schnack, der mir bei vielen Problemen durch Tips und Anregungen weitergeholfen hat.

Außerdem möchte ich Dipl.-Phys. Felix Homann für seine Hilfe mit dem Textsatzsystem  $\text{\LaTeX}$  und dem Betriebssystem Linux danken.

Weiterhin danke ich allen Mitgliedern der Arbeitsgruppe für die allzeit vorhanden gewesene Hilfsbereitschaft und fruchtbaren Diskussionen.

## Erklärung

Hiermit erkläre ich, die vorliegende Arbeit selbständig und nur mit den aufgeführten Hilfsmitteln verfaßt zu haben.

Osnabrück, im Mai 2003

Jörg Bartke