Bearbeitungszeit: 60 Minuten.
Für das Bestehen der Gesamtklausur sind mindestens 99 Punkte erforderlich. Beachten Sie die zusätzliche Formelsammlung am Ende der Klausuraufgaben!
Viel Erfolg!

1 Matrizen und Vektoren

1.1

Geben Sie für die folgenden allgemeinen Aussagen an, ob sie zutreffen oder nicht!

Aussage	Ja	Nein
Jede reelle hermitesche Matrix ist symmetrisch		
Jede verallgemeinerte Pauli-Matrix ist hermitesch und unitär		
Jede quadratische Matrix ist entweder hermitesch oder anti-hermitesch		
Die Spur jeder unitären Matrix hat den Betrag 1		
Jede unitäre Matrix ist invertierbar		
Jede hermitesche Matrix ist invertierbar		
Das Produkt von zwei unitären Matrizen ist immer unitär		
Jede reelle Matrix hat mindestens einen reellen Eigenwert		

Bei falschen Antworten gibt es einen entsprechenden Punkteabzug. Daher ist ein wahlloses Ankreuzen nicht zu empfehlen !

(24 Punkte)

1.2

Bestimmen Sie für folgende Matrix A Eigenwerte und Eigenvektoren und normieren Sie letztere!

$$A = \begin{pmatrix} 1 & i \\ -i & 1 \end{pmatrix} \tag{1}$$

(15 Punkte)

1.3

Wir definieren

$$\vec{r} \cdot \vec{\sigma} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \sigma_z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} z & x - iy \\ x + iy & -z \end{pmatrix} . \tag{2}$$

Zeigen Sie: $(\vec{a} \cdot \vec{\sigma})(\vec{b} \cdot \vec{\sigma}) = \vec{a} \cdot \vec{b}\, E_2 + i\,(\vec{a} \times \vec{b}) \cdot \vec{\sigma}$!

(25 Punkte)

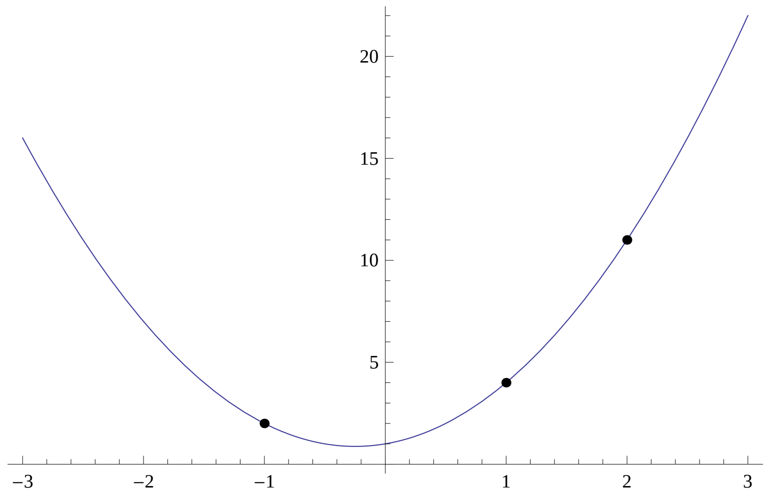

Figure 1: Parabel durch drei Punkte, siehe Aufgabe 2.1.

1.4

Es sei

$$R = \begin{pmatrix} \cos\phi & -\sin\phi & 0 \\ \sin\phi & \cos\phi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} . \tag{3}$$

1.4.1

Bestimmen Sie für diese Drehmatrix die Standardform
$R = (1 - \cos\alpha)\, P + \cos\alpha\, E_3 + \sin\alpha\, V$ gemäß Formelsammlung 1.8!

(20 Punkte)

1.4.2

Stellen Sie R in der Form $R = \exp(\phi V)$ mit einer antisymmetrischen Matrix V dar!

(20 Punkte)

1.5

Stellen Sie die Permutationsmatrix E_π für die Permutation

$$\pi = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 3 & 4 & 1 \end{pmatrix} \tag{4}$$

auf und geben Sie ihre Eigenwerte an! Bestimmen Sie die von E_π erzeugte Gruppe von Matrizen!

(40 Punkte)

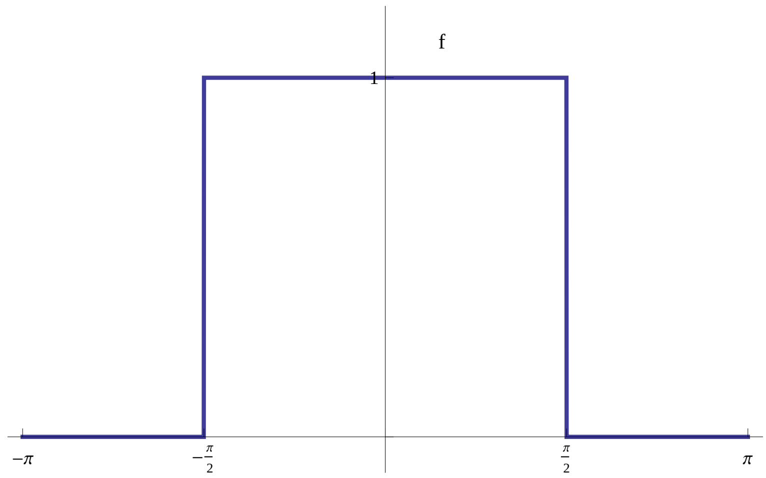

Figure 2: Die Funktion f , siehe Aufgabe 4.1.

2 Lineare Gleichungssysteme

2.1

Geben Sie die Gleichung einer Parabel an, die durch die Punkte $P_1 = (-1, 2)$, $P_2 = (1, 4)$, $P_3 = (2, 11)$ geht und deren Symmetrieachse parallel zur y-Achse liegt, siehe Figur 1!

(25 Punkte)

3 Funktionen als Vektoren

3.1

Lösen Sie die Differentialgleichung

$$\ddot{x}(t) = x(t) \tag{5}$$

und konstruieren Sie im Lösungsraum eine ONB in Bezug auf das Skalarprodukt $\langle x|y\rangle = \int_{-1}^{1} \overline{x(t)}\, y(t)\, dt$! Berechnen Sie die Matrix D des Operators $\frac{d}{dt}$ in dieser ONB! Überprüfen Sie die Identität $D^2 = E_2$, die auf Grund von (5) gelten muss! Tipp: Hyperbolische Winkelfunktionen! (40 Punkte)

4 Fouriertransformationen

4.1

Bestimmen Sie die Fourierreihe für die Funktion

$$f(t) = \begin{cases} 0 & : \quad -\pi \leq t < -\pi/2 \\ 1 & : \quad -\pi/2 \leq t < \pi/2 \\ 0 & : \quad \pi/2 \leq t < \pi \end{cases} \tag{6}$$

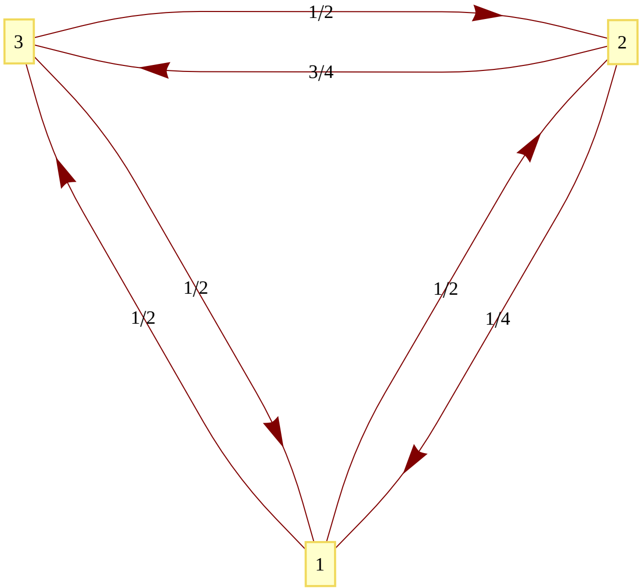

Figure 3: Übergangswahrscheinlichkeiten zwischen 3 Zuständen, siehe Aufgabe 5.1.

siehe Figur 2!

(50 Punkte)

5 Markov-Prozesse

5.1

Die Übergangswahrscheinlichkeiten zwischen 3 Zuständen sind gemäß Figur 3 gegeben. Stellen Sie die entsprechende stochastische Matrix P auf! Bestimmen Sie die stationäre Wahrscheinlichkeitsverteilung für den zugehörigen Markov-Prozess!

(50 Punkte)

6 Formelsammlung

$$\cosh(x) = \frac{1}{2}(e^x + e^{-x}) \tag{7}$$

$$\sinh(x) = \frac{1}{2}(e^x - e^{-x}) \tag{8}$$

$$\cosh^2(x) - \sinh^2(x) = 1 \tag{9}$$

$$\frac{d}{dx}\cosh(x) = \sinh(x) \tag{10}$$

$$\frac{d}{dx}\sinh(x) = \cosh(x) \tag{11}$$

$$\int \sinh^2(x)\,dx = \frac{1}{2}\left(\cosh(x)\sinh(x) - x\right) \tag{12}$$

$$\int \cosh^2(x)\,dx = \frac{1}{2}\left(\cosh(x)\sinh(x) + x\right) \tag{13}$$

$$\int \cosh(x)\sinh(x)\,dx = \frac{1}{2}\cosh^2(x) \tag{14}$$